

Н. В. Ткаченко, О. В. Шабанова

УДОСКОНАЛЕННЯ НАУКОВО-МЕТОДИЧНОГО ПІДХОДУ ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ НЕДЕРЖАВНИХ ПЕНСІЙНИХ ФОНДІВ

Авторами статті розроблено структурно-логічну схему формування й перегляду інвестиційного портфеля недержавних пенсійних фондів (НПФ), що передбачає формулювання мети та вибір стратегії інвестування, оцінювання інвестиційного потенціалу, збір інформації про фінансові інструменти, врахування інвестиційних обмежень, вибір оптимального варіанта формування такого портфеля, визначення ефективності інвестиційної діяльності НПФ за нормативною динамічною моделлю, моніторинг чинників, що обумовлюють необхідність ротації фінансових інструментів та реформатування інвестиційного портфеля. Підкреслено, що інвестиційний керуючий активами НПФ повинен застосовувати різні критерії оптимізації такого портфеля. Залежно від ситуації, відповідними критеріями можуть бути: мінімально можливий ризик, максимально можливий дохід, мінімальний ризик при заданому рівні доходності, максимальна доходність при заданому рівні ризику, ризикова віддача активів. Остання являє собою співвідношення ризикової еластичності кожного активу та його середньої доходності. Еластичність доходності активу за ризиком показує, на скільки зміниться доходність у разі зміни ризиковості активу на 1%. Оптимальна структура інвестиційного портфеля за співвідношенням доходності й ризику пропорційна ризиковій еластичності конкретного активу. За критерієм мінімального ризику вона повинна бути пропорційна одиничній ризиковій віддачі активів. За критерієм максимуму доходності частки кожного активу в загальному портфелі мають бути пропорційні коефіцієнтам доходності, що показують, який відсоток активів певного виду забезпечуватиме дохід, не менший від заданого. Щоб визначити структуру інвестиційного портфеля з мінімальним ризиком при заданій доходності, необхідно зафіксувати доходність кожного активу на середньому фактичному рівні, а дисперсію кожного прийняти в частках, пропорційних вагам базисної структури портфеля. Для визначення структури інвестиційного портфеля з максимальним доходом при заданому рівні ризику треба зафіксувати дисперсію кожного активу на фактичному рівні, а середню доходність прийняти в частках, пропорційних вагам базисної структури.

Ключові слова: недержавний пенсійний фонд (НПФ), інвестиційний портфель, інвестиційні рішення, пенсійні активи, кореляція активів, коефіцієнт ризикової еластичності, коефіцієнт ризикової віддачі.

Форм. 41. Рис. 3. Табл. 7. Літ. 16.

Н. В. Ткаченко, Е. В. Шабанова

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ НЕГОСУДАРСТВЕННЫХ ПЕНСИОННЫХ ФОНДОВ

Авторами статьи разработана структурно-логическая схема формирования и пересмотра инвестиционного портфеля негосударственных пенсионных фондов (НПФ), что предполагает формулирование целей и выбор стратегии инвестирования, оценку инвестиционного потенциала, сбор информации о финансовых инструментах, учет инвестиционных ограничений, выбор оптимального варианта формирования такого портфеля, определение эффективности инвестиционной деятельности НПФ по нормативной динамической модели, мониторинг факторов, которые обуславливают необходимость ротации финансовых инструментов и реформатирования инвести-

© Ткаченко Н. В., Шабанова О. В., 2016

ціонного портфеля. Підкреснуто, що інвестиційний управляючий активами НПФ повинен застосовувати різні критерії оптимізації такого портфеля. В залежності від ситуації, відповідними критеріями можуть бути: мінімальний ризик, максимально можливий дохід, мінімальний ризик при заданому рівні доходності, максимальна доходність при заданому рівні ризику, ризикова віддача активів. Остання представляє собою співвідношення ризикової еластичності кожного активу та його середньої доходності. Еластичність доходності активу по ризику показує, наскільки зміниться доходність при зміні ризику активу на 1%. Оптимальна структура інвестиційного портфеля по співвідношенню доходності та ризику пропорційна ризикової еластичності конкретного активу. По критерію мінімального ризику вона повинна бути пропорційна до ризикової віддачі активів. По критерію максимуму доходності частки кожного активу в загальному портфелі повинні бути пропорційні коефіцієнтам доходності, що показують, який відсоток активів певного виду буде забезпечувати дохід не менше заданого. Щоб визначити структуру інвестиційного портфеля з мінімальним ризиком при заданій доходності, необхідно зафіксувати доходність кожного активу на середньому фактичному рівні, а дисперсію кожного прийняти в частках, пропорційних вагам базової структури портфеля. Для визначення структури інвестиційного портфеля з максимальним доходом при заданому рівні ризику потрібно зафіксувати дисперсію кожного активу на фактичному рівні, а середню доходність прийняти в частках, пропорційних вагам базової структури.

Ключові слова: недержавний пенсійний фонд (НПФ), інвестиційний портфель, інвестиційні рішення, пенсійні активи, кореляція активів, коефіцієнт ризикової еластичності, коефіцієнт ризикової віддачі.

Nataliia Tkachenko, Olena Shabanova

THE ENHANCEMENT OF SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL APPROACH TO OPTIMIZATION OF AN INVESTMENT PORTFOLIO OF PRIVATE STATE PENSION FUNDS

A logical structural scheme of formation and revising of an investment portfolio of private state pension funds has been developed. It envisages formulation of the goal and choice of investment strategy, assessment of the amount of investment potential, collection of information about financial instruments, considering investment potential, collection of information about financial instruments, which takes into account the volume of investment potential, collection of information about financial instruments, consideration of investment restrictions, assessment of relative effectiveness of different variants of investment portfolio formation, argumentation of an optimal variant of the portfolio, assessment of the effectiveness of investment activity of private state pension funds according to the normative dynamic model, monitoring of the factors, that condition the necessity of financial instruments rotation and re-formation of an investment portfolio. The attention has been focused on the duties of the investment assets manager of private state pension funds to use various criteria of optimization of an investment portfolio. Depending on the particular situation the criteria of portfolio optimization may be the following: the minimal possible risk, the maximum possible profit, minimal risk at a given rate of profitability, maximum profitability at a given rate of risk, the risk assets gain. The risk assets gain represents a proportion of risk flexibility of every asset and its average profitability. The flexibility of asset profitability with regard to the risk shows how the profitability of this asset changes when the amount of risk is changed by 1%. The optimal structure of an investment portfolio according to the criterion "profitability — risk" is proportional to the risk flexibility of a particular asset. According to the minimal risk criterion the structure of an investment portfolio has to be proportional to one digit risk gains on assets. According to the maximum profitability criterion the share of each asset in the general portfolio must be proportional to the profitability rates that show the percentage of particular assets, which will secure a profit that is no less than the given one. It is necessary to fix the profitability of every asset at an average actual level and the dispersion of each asset take as quotas proportionate to the weights of the basic portfolio structure to determine the structure

of an investment portfolio with minimal risk with a given profitability. It is necessary to fix the dispersion of each asset at an actual level and to take the average profitability in quotas, proportionate to the weights of basic structure to determine the structure of an investment portfolio with the maximum profitability at a given risk rate.

Keywords: private state pension funds, investment portfolio, investment decisions, pension assets, correlation of assets, the rate of risk flexibility, the rate of risk gains.

JEL classification: G20, G23.

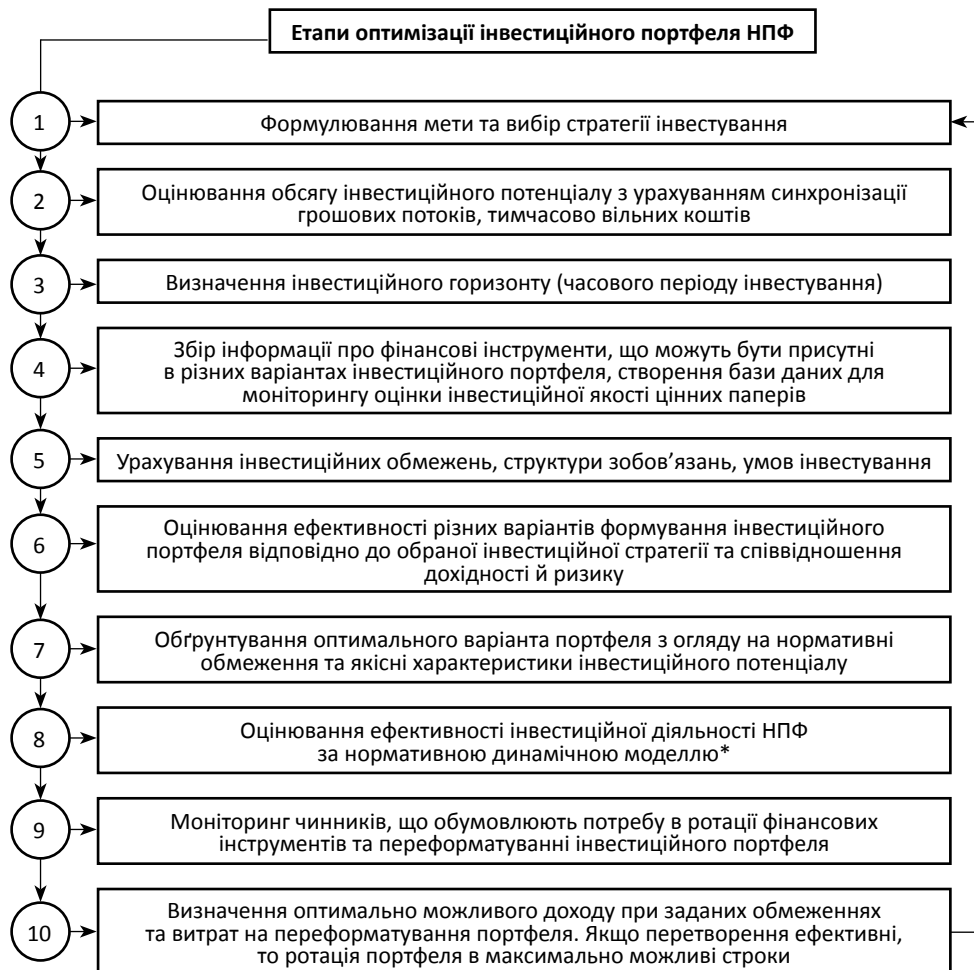
Ефективна інвестиційна діяльність недержавних пенсійних фондів (НПФ) дає змогу розробляти критеріальні оцінки вибору фінансових інструментів для формування інвестиційного портфеля, забезпечує ефективний розподіл і використання наявних інвестиційних ресурсів, сприяє адаптації до змін зовнішнього середовища (економічних, політичних чинників, демографічної ситуації) й не можлива без урахування особливостей реалізації довгострокових загальних та інвестиційних цілей розвитку такого фонду. У цьому контексті моделювання інвестиційного портфеля НПФ є засобом діагностики інвестиційного середовища, що уможливорює ухвалення зважених рішень для отримання інвестиційного прибутку з урахуванням прийняттого ризику. У мінливих ринкових умовах інвестиційний портфель повинен бути динамічним, його склад і структура — постійно вдосконалюватись із урахуванням змін економічної ситуації, тож його оптимізація є безперервним процесом.

Проблемам оптимізації інвестиційного портфеля як передумови розвитку інвестиційного потенціалу НПФ присвячено праці ряду вітчизняних учених, зокрема О. Кириленко, Г. Козак, Д. Леонова, Т. Смовженко, Н. Ткаченко, Н. Цікановської, А. Федоренка [1—5]. Вагомий внесок у розроблення теоретичних і методологічних засад управління інвестиційним портфелем зробили такі зарубіжні дослідники: Г. Александер, Дж. Бейлі, З. Боді, А. Гітман, М. Джонк, А. Кейн, Б. Койлі, А. Маркус, Т. Райс, У. Шарп, Ф. Фабозці [6—10] та ін. Велика увага приділяється модифікації моделі Г. Марковіца в частині її доповнення теоріями нечітких множин [11], нейронних мереж [12], застосуванням генетичних алгоритмів [13] та ін.

Незважаючи на чималий доробок у зазначеній сфері, дотепер не конкретизовані методи й інструментарій розв'язання наявних проблем НПФ, недостатньо досліджені теоретико-методичні засади оптимізації інвестиційного портфеля таких фондів. Якісне управління останнім є доволі складним завданням, адже в разі збільшення обсягу активів у складі портфеля зростає імовірність придбання неякісних фінансових інструментів. Тому процес оптимізації інвестиційного портфеля має бути інтегрований у загальну схему управління інвестиційними ресурсами НПФ та базуватися на науково обґрунтованому методичному підході. Зазначене зумовлює актуальність обраної теми та спонукає до подальших пошуків.

Метою статті є вдосконалення підходу до формалізації вибору складу і структури оптимального інвестиційного портфеля НПФ за різними критеріями за умови врахування ризикової еластичності та ризикової віддачі як окремих активів, так і портфеля загалом задля його оптимізації в умовах слабкої кореляції дохідності активів.

Основою науково-методичного підходу до оптимізації інвестиційного портфеля НПФ є структурно-логічна схема його формування й перегляду, що включає етапи його оптимізації (рис. 1).



* Див.: Ткаченко Н. В. Нормативна динамічна модель оцінювання ефективності інвестиційної діяльності недержавних пенсійних фондів / Н. В. Ткаченко, О. В. Шабанова // Наукові записки Національного університету "Острозька академія". Серія : економіка. — 2014. — Вип. 25. — С. 163—169.

Джерело: розроблено авторами.

Рис. 1. Структурно-логічна схема оптимізації інвестиційного портфеля НПФ

Метою оптимізації інвестиційного портфеля є забезпечення бажаного співвідношення ризику й дохідності за дотримання загальних для всіх учасників ринку та специфічних для НПФ обмежень:

- чинного законодавства щодо використання фінансових інструментів;
- особливостей структури зобов'язань НПФ, яка залежить від статевовікового складу учасників, адже чим більшою є частка учасників передпенсійного віку, тим вищою повинна бути частка високоліквідних активів для виконання пенсійних зобов'язань;

- індивідуальних переваг інвестиційних керуючих компанії з управління активами НПФ із метою убезпечення портфеля.

При підборі фінансових інструментів для включення їх до інвестиційного портфеля слід використовувати такі критерії:

- 1) для розміщення довгострокових фінансових ресурсів — це регулярний поточний дохід, висока надійність, середня чи низька ліквідність, довгостроковість;

- 2) для розміщення короткострокових фінансових ресурсів — це висока дохідність, середній або низький рівень ризику, середня чи висока ліквідність, короткостроковість тощо.

Також варто враховувати, що активи НПФ мають відповідати зобов'язанням за обсягами і структурою [3, с. 193].

Підстава для перегляду складу і структури інвестиційного портфеля виникає, коли:

- актив не приніс очікуваного доходу та малоімовірно, що в майбутньому ситуація зміниться на краще;

- актив більше не відповідає принципам надійності й ліквідності;

- актив досяг максимального прогнозу курсової вартості та став переоціненим;

- з'явилися привабливіші інструменти інвестування.

При цьому необхідно уникати надмірної диверсифікації, коли темпи приросту витрат на формування портфеля перевищують аналогічний показник його дохідності. Ротація фінансових інструментів у портфелі є вигідною, якщо приріст очікуваного доходу оновленого портфеля перевищить витрати на саму ротацію. Застосування запропонованої структурно-логічної схеми формування збалансованого інвестиційного портфеля сприятиме накопиченню додаткового джерела доходу учасників фонду після виходу на пенсію.

Оптимізація інвестиційного портфеля здійснюється на основі використання економіко-математичних методів та інформаційно-аналітичної бази даних. Після побудови моделі та прогнозу по ній встановлюється відхилення очікуваних результатів інвестування від фактичних, виявляються причини таких відхилень, виконується коригування обраної моделі та приймається оптимальний варіант інвестиційного рішення.

Одним із класичних підходів до оптимізації інвестиційного портфеля є використання моделі Г. Марковіца [6]. Перевага цієї моделі полягає в тому, що на її основі визначається структура ефективного інвестиційного портфеля, тобто такого, який забезпечує максимальний дохід при заданому рівні ризику або мінімальний ризик при заданому рівні доходу.

Зауважимо, що модель Г. Марковіца є “універсальною”, оскільки застосовується в інвестиційній діяльності різних суб’єктів фінансового ринку, тому в ній не враховано особливості інвестування пенсійних активів, зокрема наявність інвестиційних обмежень на операції з активами певних видів, визначених законодавством. До того ж, ця модель ґрунтується на припущенні про нормальний статистичний розподіл показників дохідності та ризику інвестиційного портфеля, що в умовах економічної нестабільності унеможливає адекватну оцінку очікуваного співвідношення дохідності й ризику. Тому є потреба в удосконаленні науково-методичного підходу до оптимізації інвестиційного портфеля.

На нашу думку, заслуговує на увагу запропонований Н. А. Цікановською підхід до визначення складу і структури ефективних інвестиційних портфелів НПФ на основі застосування моделі Г. Марковіца з урахуванням інвестиційних обмежень на операції з пенсійними активами, встановлених законодавством та інвестиційною декларацією фонду, а також співвідношень ризику й дохідності, визначених для інвестиційних портфелів різних видів [14, с. 202]. Разом із тим вважаємо, що інвестиційний керуючий активами НПФ повинен застосовувати різні критерії оптимізації портфеля. Залежно від ситуації ними можуть бути:

- 1) мінімально можливий ризик;
- 2) максимально можливий дохід;
- 3) мінімальний ризик при заданому рівні дохідності;
- 4) максимальна дохідність при заданому рівні ризику;
- 5) ризикова віддача активів.

Розглянемо докладніше порядок визначення складу і структури інвестиційного портфеля за переліченими критеріями на прикладі портфеля з трьох активів, інвестиційні характеристики яких наведені в табл. 1.

Таблиця 1. Інвестиційні характеристики активів в умовному портфелі НПФ

Вид активу	Дохідність за період				Середня дохідність	Стандартне відхилення дохідності	Коефіцієнт варіації дохідності	Дисперсія дохідності
	1	2	3	4				
1	6	4	12	10	8	3,16	0,40	10
2	9	8	10	13	10	1,87	0,19	3,5
3	10	9	16	13	12	2,74	0,23	7,5

Джерело: складено авторами.

Базовими характеристиками активу та інвестиційного портфеля вважаємо середню дохідність, її стандартне відхилення, коефіцієнт варіації та дисперсію, що обчислюються за такими формулами [15]:

Середнє очікуване значення дохідності активу \bar{x}_i :

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{ti}, \quad (1)$$

де x_{ti} — дохідність активу i за період часу t .

Середнє очікуване значення дохідності інвестиційного портфеля \bar{x}_Σ :

$$\bar{x}_\Sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i, \quad (2)$$

де n — кратність інвестиційного портфеля (число активів у портфелі);

α_i — частка активу i в інвестиційному портфелі.

Дисперсія дохідності активу σ_i^2 :

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_{ti} - \bar{x}_i)^2, \quad (3)$$

де σ_i — стандартне (середньоквадратичне) відхилення дохідності активу;

x_{ti} — дохідність активу i за період часу t ;

\bar{x}_i — середнє очікуване значення дохідності активу.

Дисперсія дохідності інвестиційного портфеля σ_Σ^2 :

$$\sigma_\Sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2. \quad (4)$$

Стандартне (середньоквадратичне) відхилення дохідності активу σ_i :

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}. \quad (5)$$

Стандартне (середньоквадратичне) відхилення дохідності інвестиційного портфеля σ_Σ :

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_\Sigma^2}. \quad (6)$$

Коефіцієнт варіації дохідності активу:

$$v = \frac{\sigma_i}{\bar{x}_i} \cdot 100, \quad (7)$$

де σ_i — стандартне (середньоквадратичне) відхилення дохідності i -го активу;

\bar{x}_i — середнє очікуване значення дохідності активу.

Визначимо структуру інвестиційного портфеля за критерієм мінімального ризику. Для цього використаємо коефіцієнт еластичності дохідності за ризиком.

У математиці еластичність — це відношення відносного приросту функції до відповідного відносного приросту аргументу. При дослідженні економічних

явищ і процесів учені оперують поняттям еластичності, розуміючи під ним міру чутливості однієї змінної до зміни іншої. Вважаємо, що це поняття може бути вжите й при оптимізації інвестиційного портфеля. Так, при формуванні такого портфеля важливо враховувати, на скільки зміниться його ризиковість у разі зміни ризиковості певного активу. Також корисно знати, як змінюється середня дохідність активу залежно від його ризиковості.

Припустимо, що середня дохідність активу \bar{x}_i залежить від його ризикованості σ_i й ця залежність описується функцією $\bar{x}_i = f(\sigma_i)$. Визначимо еластичність \bar{x}_i , а саме на скільки зміниться змінна \bar{x}_i унаслідок зміни σ_i .

Введемо позначення для відносних приростів змінних:

$$\delta\sigma_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\sigma_i}, \quad (8)$$

$$\delta\bar{x}_i = \frac{\Delta\bar{x}_i}{\bar{x}_i} = \frac{f(\sigma_i + \Delta\sigma_i) - f(\sigma_i)}{f(\sigma_i)}. \quad (9)$$

Тоді еластичністю змінної \bar{x}_i за змінною σ_i є ліміт:

$$E_{\sigma_i}[f] = \lim_{\Delta\sigma_i \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{x}_i / \bar{x}_i}{\Delta\sigma_i / \sigma_i} = \left(\lim_{\Delta\sigma_i \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{x}_i}{\Delta\sigma_i} \right) \cdot \frac{\sigma_i}{\bar{x}_i} = \frac{d\bar{x}_i}{d\sigma_i} \cdot \frac{\sigma_i}{\bar{x}_i}. \quad (10)$$

Еластичність середньої дохідності активу \bar{x}_i показує, на скільки зміниться ця величина в разі зміни ризиковості активу σ_i на 1%. Математично еластичність інтерпретується як відносна похідна функції $\bar{x}_i = f(\sigma_i)$. Еластичність середньої дохідності активу може бути використана як критерій оптимізації структури інвестиційного портфеля з мінімальним ризиком.

Важливою характеристикою як окремого активу, так і інвестиційного портфеля загалом є ризикова віддача, що являє собою відношення середньої дохідності до дисперсії [13]:

1. Ризикова віддача окремого активу χ_i :

$$\chi_i = \frac{\bar{x}_i}{\sigma_i^2}. \quad (11)$$

2. Ризикова віддача інвестиційного портфеля χ_Σ :

$$\chi_\Sigma = \frac{\bar{x}_\Sigma}{\sigma_\Sigma^2}. \quad (12)$$

Тоді ризикова еластичність для кожного активу становить:

$$e_i = \frac{\chi_i}{\chi_\Sigma} = \frac{\bar{x}_i}{\sigma_i^2} \cdot \frac{\sigma_\Sigma^2}{\bar{x}_\Sigma}. \quad (13)$$

Коефіцієнт ризикової еластичності показує, на скільки відсотків зміниться ризикова віддача портфеля залежно від ризикової віддачі кожного активу.

Оптимальна структура інвестиційного портфеля за співвідношенням дохідності й ризику повинна бути пропорційна ризиковій еластичності конкретного активу:

$$\alpha_i = \frac{e_i}{\sum_{i=1}^n e_i}, \quad (14)$$

де α_i — частки окремих активів у складі портфеля;
 n — кратність портфеля (число активів).

Оскільки при розрахунку вагових коефіцієнтів показник ризикової віддачі портфеля скорочується, оптимальна структура останнього визначається ризиковою віддачею складових активів:

$$\alpha_i = \frac{\chi_i}{\sum_{i=1}^n \chi_i}. \quad (15)$$

Обчислимо одиничні ризикові віддачі, тобто ризикові віддачі 1 % дохідності кожного активу. Для цього слід поділити ризикову еластичність кожного активу на його середню дохідність. У результаті отримаємо формулу розрахунку вагових коефіцієнтів, у якій використовується лише одинична ризикова віддача кожного активу, тобто величина, обернена дисперсії:

$$\alpha_i = \frac{d_i}{\sum_{i=1}^n d_i}, \quad (16)$$

де $d_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$;

n — кратність портфеля, тобто число складових активів.

Для портфеля з трьох активів із формули (13) можна визначити частки активів у структурі портфеля за формулами:

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2^2 \cdot \sigma_3^2}{\sigma_2^2 \cdot \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \cdot \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}; \quad (17)$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_3^2}{\sigma_2^2 \cdot \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \cdot \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}; \quad (18)$$

$$\alpha_3 = \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_2^2 \cdot \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \cdot \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}; \quad (19)$$

3. Визначимо оптимальну структуру інвестиційного портфеля за критерієм мінімального ризику.

Для цього обчислимо одиничні ризикові віддачі, тобто величини, обернені дисперсіям, та за формулами (14—16) отримаємо частки окремих активів у структурі інвестиційного портфеля (табл. 2).

Таблиця 2. Оптимальна структура інвестиційного портфеля за критерієм мінімального ризику

Вид активу	Дисперсія дохідності активів	d_i	Частки активів у структурі портфеля, %
1	10	0,10	19
2	3,5	0,29	55
3	7,5	0,13	26
Сума	—	0,52	100

Джерело: розраховано авторами.

Середня дохідність такого портфеля становитиме $\bar{x}_\Sigma = 10,13\%$, дисперсія дохідності $\sigma_\Sigma^2 = 1,93$, середньоквадратичне відхилення $\sigma_\Sigma = 1,388$.

Визначимо оптимальну структуру інвестиційного портфеля за критерієм ризикової віддачі активів. Для цього обчислимо ризикову віддачу кожного активу за формулою (11), а частки окремих активів у структурі інвестиційного портфеля — за формулою (14). Результати розрахунків наведено в табл. 3.

Таблиця 3. Оптимальна структура інвестиційного портфеля за критерієм ризикової віддачі активів

Вид активу	Середня дохідність активів	Дисперсія активів	Ризикова віддача активів	Частки активів у структурі портфеля, %
1	8	10	0,80	15,3
2	10	3,5	2,86	54,3
3	12	7,5	1,60	30,4
Сума	—	—	5,26	100

Джерело: розраховано авторами.

Середня дохідність оптимального портфеля $\bar{x}_\Sigma = 10,3\%$, дисперсія дохідності портфеля $\sigma_\Sigma^2 = 1,96$, середньоквадратичне відхилення $\sigma_\Sigma = 1,4$. Будь-які інші портфелі матимуть або меншу дохідність, або більшу дисперсію.

Розглянемо оптимізацію структури інвестиційного портфеля за критерієм максимуму дохідності.

Інвестиційний портфель являє собою системну сукупність активів, причому кожний актив має власні статистичні характеристики, котрі можна оцінити за результатами ретроспективного аналізу трендів дохідності. Однією з характеристик випадкової величини є функція її розподілу. Іноді достеменно визначити таку функцію досить важко через брак статистичної інформації. Виходом із ситуації стає ймовірнісне моделювання дохідності активів. Із цією метою пропонуємо застосовувати закон розподілу Вейбулла — Гнеденка, результати моделювання за яким в умовах нестабільної економічної ситуації є точнішими, ніж за нормальним законом розподілу статистичних величин.

Для закону Вейбулла — Гнеденка ймовірність отримання дохідності, не меншої від заданої p_x , визначається за формулою [13]:

$$p_x = \exp \left[- \left(\frac{x_3}{x_0} \right)^m \right], \quad (20)$$

де x_0, m — параметри розподілу;

x_3 — задане значення дохідності.

Для орієнтовних розрахунків можна застосовувати емпіричні співвідношення:

$$x_0 = 1,1\bar{x}, \quad (21)$$

$$m = V^{-1,06}, \quad (22)$$

де \bar{x} — середнє значення дохідності активу;

V — коефіцієнт варіації дохідності активу.

Далі задаємо дискретні розрахункові рівні дохідності в діапазоні можливих значень для цього набору активів за формулами (21—22) та встановлюємо ймовірності того, що дохідність кожного активу буде рівною або більшою від заданої. Отримані дохідності належать до різних активів, тому їх можна інтерпретувати як коефіцієнти дохідності, оскільки вони показують, який відсоток цінних паперів цього виду забезпечуватиме дохід, не менший від заданого. Звідси, за критерієм максимуму дохідності частки кожного активу в загальному портфелі γ_i повинні бути пропорційні цим коефіцієнтам:

$$\gamma_i = \frac{P_{xi}}{\sum_{i=1}^n P_{xi}}, \quad (23)$$

де p_{xi} — розрахункові коефіцієнти за кожним активом;

n — число активів.

Із формули (23) визначимо формули для обчислення часток трьох активів, що входять до складу інвестиційного портфеля:

$$\gamma_1 = \frac{P_{x2} \cdot P_{x3}}{P_{x2} \cdot P_{x3} + P_{x1} \cdot P_{x3} + P_{x1} \cdot P_{x2}}; \quad (24)$$

$$\gamma_2 = \frac{P_{x1} \cdot P_{x3}}{P_{x2} \cdot P_{x3} + P_{x1} \cdot P_{x3} + P_{x1} \cdot P_{x2}}; \quad (25)$$

$$\gamma_3 = \frac{P_{x1} \cdot P_{x2}}{P_{x2} \cdot P_{x3} + P_{x1} \cdot P_{x3} + P_{x1} \cdot P_{x2}}; \quad (26)$$

Для формування альтернатив інвестиційних рішень виконаємо ймовірнісне моделювання функцій дохідності активів, а для пошуку ефективних рішень використаємо визначені критерії оптимальності.

У табл. 4 наведено вихідні дані для ймовірнісного моделювання функцій дохідності активів, а в табл. 5 та на рис. 2 — результати моделювання.

Таблиця 4. Вихідні дані для ймовірнісного моделювання функцій дохідності активів

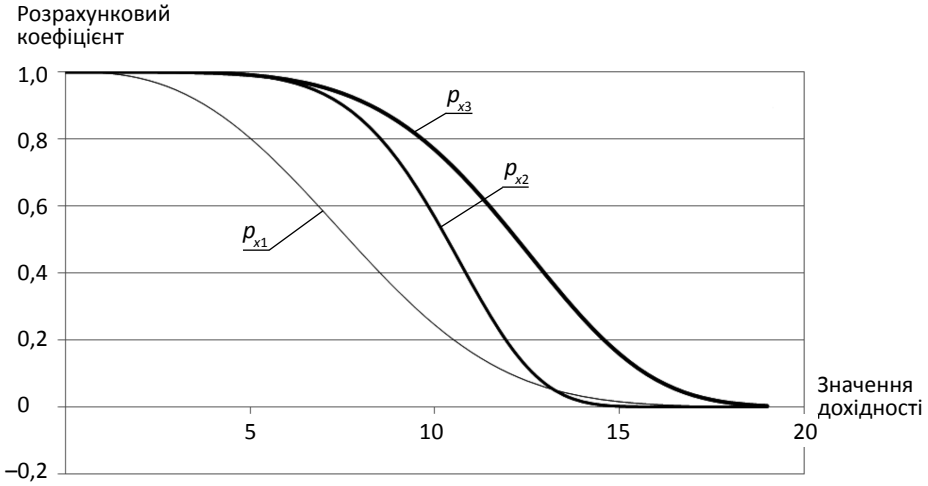
Вид активу	Середня дохідність активів	Стандартне відхилення дохідності активів	Коефіцієнт варіації дохідності	Параметри розподілу	
				m	x_0
1	8	3,16	0,40	2,67	8,8
2	10	1,87	0,19	5,91	11,0
3	12	2,74	0,23	4,79	13,2

Джерело: розраховано авторами.

Таблиця 5. Результати ймовірнісного моделювання функцій дохідності активів

x_3	p_{x1}	p_{x2}	p_{x3}	$\sum_{i=1}^3 p_{xi}$	γ_1	γ_2	γ_3	\bar{x}_Σ	σ_Σ^2	σ_Σ
0	1,00	1,00	1,00	3,00	0,33	0,33	0,33	10,00	2,333333	1,53
0,5	1,00	1,00	1,00	3,00	0,33	0,33	0,33	10,00	2,333023	1,53
1,0	1,00	1,00	1,00	3,00	0,33	0,33	0,33	10,00	2,331355	1,53
1,5	0,99	1,00	1,00	2,99	0,33	0,33	0,33	10,01	2,327522	1,53
2,0	0,98	1,00	1,00	2,98	0,33	0,34	0,34	10,01	2,320944	1,52
2,5	0,97	1,00	1,00	2,97	0,33	0,34	0,34	10,02	2,31126	1,52
3,0	0,95	1,00	1,00	2,94	0,32	0,34	0,34	10,04	2,298368	1,52
3,5	0,92	1,00	1,00	2,92	0,32	0,34	0,34	10,05	2,282465	1,51
4,0	0,89	1,00	1,00	2,88	0,31	0,35	0,35	10,08	2,264089	1,50
4,5	0,85	0,99	0,99	2,84	0,30	0,35	0,35	10,10	2,24414	1,50
5,0	0,80	0,99	0,99	2,78	0,29	0,36	0,36	10,14	2,223868	1,49
5,5	0,75	0,98	0,98	2,72	0,28	0,36	0,36	10,17	2,204847	1,48
6,0	0,70	0,97	0,98	2,65	0,26	0,37	0,37	10,21	2,188908	1,48
6,5	0,64	0,96	0,97	2,56	0,25	0,37	0,38	10,25	2,17807	1,48
7,0	0,58	0,93	0,95	2,47	0,24	0,38	0,39	10,30	2,174474	1,47
7,5	0,52	0,90	0,94	2,36	0,22	0,38	0,40	10,35	2,180369	1,48
8,0	0,46	0,86	0,91	2,23	0,21	0,38	0,41	10,41	2,198204	1,48
8,5	0,40	0,80	0,89	2,09	0,19	0,38	0,42	10,46	2,230864	1,49
9,0	0,35	0,74	0,85	1,93	0,18	0,38	0,44	10,52	2,282125	1,51
9,5	0,29	0,66	0,81	1,76	0,17	0,37	0,46	10,59	2,357345	1,54
10,0	0,24	0,57	0,77	1,58	0,16	0,36	0,49	10,66	2,464369	1,57
10,5	0,20	0,47	0,72	1,38	0,15	0,34	0,52	10,74	2,614456	1,62
11,0	0,16	0,37	0,66	1,19	0,14	0,31	0,55	10,83	2,822669	1,68
11,5	0,13	0,27	0,60	1,00	0,13	0,27	0,60	10,94	3,106513	1,76
12,0	0,10	0,19	0,53	0,82	0,12	0,23	0,65	11,05	3,480881	1,87
12,5	0,08	0,12	0,46	0,66	0,12	0,18	0,70	11,17	3,947797	1,99
13,0	0,06	0,07	0,39	0,52	0,11	0,13	0,76	11,29	4,483442	2,12
13,5	0,04	0,03	0,33	0,41	0,11	0,09	0,81	11,40	5,032832	2,24
14,0	0,03	0,02	0,27	0,31	0,10	0,05	0,85	11,50	5,525043	2,35
14,5	0,02	0,01	0,21	0,24	0,09	0,03	0,88	11,57	5,905695	2,43
15,0	0,02	0,00	0,16	0,18	0,09	0,01	0,90	11,62	6,160757	2,48
15,5	0,01	0,00	0,12	0,13	0,08	0,00	0,91	11,66	6,311555	2,51

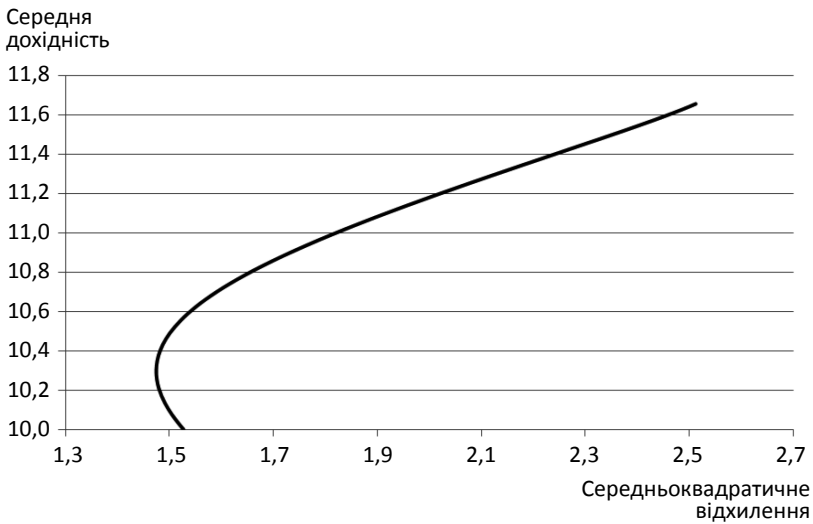
Джерело: розраховано авторами.



Джерело: побудовано за розрахунками авторів.

Рис. 2. Функції дохідності активів інвестиційного портфеля

На рис. 3 зображено базову криву ефективних інвестиційних портфелів.



Джерело: побудовано за розрахунками авторів.

Рис. 3. Базова крива ефективних інвестиційних портфелів

Далі розглянемо оптимізацію структури інвестиційного портфеля за критеріями мінімуму ризику при заданій дохідності та максимуму дохідності при заданому ризику.

Для того щоб визначити структуру інвестиційного портфеля з мінімальним ризиком при заданій дохідності, необхідно зафіксувати дохідність кожного активу на середньому фактичному рівні, а дисперсію кожного прийняти в частках, пропорційних вагам базисної структури портфеля. Тоді формула для визначення ризикової віддачі окремого активу набуде вигляду [13]:

$$\chi'_i = \frac{\bar{x}_i}{\gamma_i^2 \sigma_i^2} = \frac{\chi_i}{\gamma_i^2}, \quad (27)$$

де γ_i — вагові коефіцієнти базисної структури.

Частка кожного активу в таких портфелях обчислюється за формулою:

$$\alpha_i = \frac{\chi'_i}{\sum_{i=1}^n \chi'_i} = \frac{\chi_i}{\gamma_i^2} / \sum_{i=1}^n \frac{\chi_i}{\gamma_i^2}. \quad (28)$$

Щоб визначити структуру інвестиційного портфеля з максимальним доходом при заданому рівні ризику, необхідно зафіксувати дисперсію кожного активу на фактичному рівні, а середню дохідність прийняти в частках, пропорційних вагам базисної структури. У такому випадку вираз для ризикової віддачі окремого активу набуде вигляду [13]:

$$\chi'_i = \frac{\gamma_i \bar{x}_i}{\sigma_i^2} = \gamma_i \chi_i. \quad (29)$$

Частка кожного активу в таких портфелях:

$$\alpha_i = \frac{\chi'_i}{\sum_{i=1}^n \chi'_i} = \frac{\gamma_i \chi_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i \chi_i}. \quad (30)$$

Отже, в першому випадку інвестиційний менеджер варіюватиме дисперсією за фіксованою дохідності, а в другому — дохідністю за фіксованою дисперсією.

Структури оптимальних інвестиційних портфелів мінімального ризику при заданій дохідності та максимальної дохідності при заданому ризику отримаємо за допомогою формул (28) і (30).

У табл. 6 та 7 наведено частки активів у структурі оптимальних інвестиційних портфелів.

Також вважаємо за доцільне доповнити запропоновану математичну модель оптимізації інвестиційного портфеля інвестиційними обмеженнями, що встановлені Законом України “Про недержавне пенсійне забезпечення” [16] для операцій із пенсійними активами вітчизняних НПФ:

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \leq 0,5; \quad (31)$$

Таблиця 6. Структура оптимальних інвестиційних портфелів за критерієм мінімального ризику при заданій дохідності

x_s	χ'_1	χ'_2	χ'_3	$\sum_{i=1}^3 \chi'_i$	α_1	α_2	α_3	\bar{x}_Σ	σ_Σ^2	σ_Σ
0	7,20	25,71	14,40	47,31	0,15	0,54	0,30	10,30	1,96	1,40
0,5	7,20	25,71	14,40	47,31	0,15	0,54	0,30	10,30	1,96	1,40
1,0	7,23	25,66	14,37	47,26	0,15	0,54	0,30	10,30	1,96	1,40
1,5	7,28	25,56	14,32	47,17	0,15	0,54	0,30	10,30	1,96	1,40
2,0	7,38	25,39	14,22	47,00	0,16	0,54	0,30	10,29	1,96	1,40
2,5	7,54	25,14	14,08	46,75	0,16	0,54	0,30	10,28	1,95	1,40
3,0	7,76	24,79	13,89	46,44	0,17	0,53	0,30	10,26	1,95	1,40
3,5	8,06	24,35	13,65	46,05	0,18	0,53	0,30	10,24	1,94	1,39
4,0	8,46	23,82	13,36	45,63	0,19	0,52	0,29	10,21	1,94	1,39
4,5	8,97	23,21	13,02	45,20	0,20	0,51	0,29	10,18	1,94	1,39
5,0	9,63	22,55	12,63	44,82	0,21	0,50	0,28	10,13	1,94	1,39
5,5	10,46	21,87	12,21	44,54	0,23	0,49	0,27	10,08	1,96	1,40
6,0	11,50	21,18	11,75	44,44	0,26	0,48	0,26	10,01	1,99	1,41
6,5	12,80	20,54	11,25	44,60	0,29	0,46	0,25	9,93	2,04	1,43
7,0	14,41	19,98	10,73	45,12	0,32	0,44	0,24	9,84	2,13	1,46
7,5	16,39	19,55	10,16	46,10	0,36	0,42	0,22	9,73	2,26	1,50
8,0	18,79	19,31	9,57	47,66	0,39	0,41	0,20	9,61	2,43	1,56
8,5	21,66	19,33	8,93	49,92	0,43	0,39	0,18	9,49	2,65	1,63
9,0	25,05	19,70	8,25	53,00	0,47	0,37	0,16	9,37	2,90	1,70
9,5	28,94	20,58	7,52	57,05	0,51	0,36	0,13	9,25	3,16	1,78
10,0	33,27	22,22	6,77	62,25	0,53	0,36	0,11	9,15	3,39	1,84
10,5	37,93	25,03	5,99	68,95	0,55	0,36	0,09	9,07	3,54	1,88
11,0	42,77	29,85	5,22	77,84	0,55	0,38	0,07	9,03	3,57	1,89
11,5	47,68	38,36	4,48	90,52	0,53	0,42	0,05	9,05	3,42	1,85
12,0	52,64	54,41	3,82	110,87	0,47	0,49	0,03	9,12	3,11	1,76
12,5	57,83	87,76	3,25	148,84	0,39	0,59	0,02	9,27	2,73	1,65
13,0	63,68	166,70	2,79	233,17	0,27	0,71	0,01	9,48	2,54	1,59
13,5	70,74	387,53	2,45	460,72	0,15	0,84	0,01	9,70	2,71	1,65

Джерело: розраховано авторами.

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{2j} \leq 0,2; \tag{32}$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{3j} \leq 0,4; \tag{33}$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{4j} \leq 0,4; \tag{34}$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{5j} \leq 0,2; \tag{35}$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{6j} \leq 0,4; \tag{36}$$

Таблиця 7. Структура оптимальних інвестиційних портфелів за критерієм максимального доходу при заданому рівні ризику

x_3	χ'_1	χ'_2	χ'_3	$\sum_{i=1}^3 \chi'_i$	α_1	α_2	α_3	\bar{x}_Σ	σ_Σ^2	α_Σ
0	0,27	0,95	0,53	1,75	0,15	0,54	0,30	10,30	1,96	1,40
0,5	0,27	0,95	0,53	1,75	0,15	0,54	0,30	10,30	1,96	1,40
1,0	0,27	0,95	0,53	1,75	0,15	0,54	0,30	10,31	1,96	1,40
1,5	0,27	0,96	0,53	1,76	0,15	0,54	0,30	10,31	1,96	1,40
2,0	0,26	0,96	0,54	1,76	0,15	0,55	0,31	10,31	1,96	1,40
2,5	0,26	0,96	0,54	1,76	0,15	0,55	0,31	10,32	1,96	1,40
3,0	0,26	0,97	0,54	1,77	0,15	0,55	0,31	10,32	1,97	1,40
3,5	0,25	0,98	0,55	1,78	0,14	0,55	0,31	10,33	1,97	1,40
4,0	0,25	0,99	0,55	1,79	0,14	0,55	0,31	10,34	1,98	1,41
4,5	0,24	1,00	0,56	1,80	0,13	0,56	0,31	10,36	1,99	1,41
5,0	0,23	1,02	0,57	1,82	0,13	0,56	0,31	10,37	1,99	1,41
5,5	0,22	1,03	0,58	1,83	0,12	0,56	0,32	10,39	2,01	1,42
6,0	0,21	1,05	0,59	1,85	0,11	0,57	0,32	10,41	2,02	1,42
6,5	0,20	1,07	0,60	1,87	0,11	0,57	0,32	10,43	2,03	1,43
7,0	0,19	1,08	0,62	1,89	0,10	0,57	0,33	10,46	2,05	1,43
7,5	0,18	1,09	0,63	1,90	0,09	0,57	0,33	10,48	2,07	1,44
8,0	0,17	1,10	0,65	1,92	0,09	0,57	0,34	10,51	2,10	1,45
8,5	0,15	1,10	0,68	1,93	0,08	0,57	0,35	10,54	2,12	1,46
9,0	0,14	1,09	0,70	1,94	0,07	0,56	0,36	10,58	2,15	1,47
9,5	0,13	1,06	0,74	1,94	0,07	0,55	0,38	10,63	2,20	1,48
10,0	0,12	1,02	0,78	1,93	0,06	0,53	0,40	10,68	2,25	1,50
10,5	0,12	0,97	0,83	1,91	0,06	0,51	0,43	10,74	2,34	1,53
11,0	0,11	0,88	0,89	1,88	0,06	0,47	0,47	10,83	2,48	1,57
11,5	0,10	0,78	0,96	1,84	0,06	0,42	0,52	10,93	2,69	1,64
12,0	0,10	0,65	1,04	1,79	0,06	0,37	0,58	11,05	3,01	1,74
12,5	0,09	0,52	1,12	1,73	0,05	0,30	0,65	11,19	3,49	1,87
13,0	0,09	0,37	1,21	1,67	0,05	0,22	0,72	11,34	4,13	2,03
13,5	0,09	0,25	1,29	1,62	0,05	0,15	0,80	11,49	4,86	2,21

Джерело: розраховано авторами.

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{7j} \leq 0,1; \tag{37}$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{8j} \leq 0,1; \tag{38}$$

$$0 \leq \alpha_{ij} \leq 0,05, \tag{39}$$

де α_{ij} — частка пенсійних активів, вкладена у фінансовий інструмент певного виду, зокрема: $\sum_{j=1}^n \alpha_{1j}$ — у цінні папери, доходи за якими гарантовано Кабінетом

Міністрів України; $\sum_{j=1}^n \alpha_{2j}$ — у цінні папери, доходи за котрими гарантовано

Радою Міністрів Автономної Республіки Крим, та облігації місцевих позик; $\sum_{j=1}^n \alpha_{3j}$ — в облігації підприємств, емітентами яких є резиденти України; $\sum_{j=1}^n \alpha_{4j}$ — в акції вітчизняних емітентів; $\sum_{j=1}^n \alpha_{5j}$ — у цінні папери іноземних емітентів; $\sum_{j=1}^n \alpha_{6j}$ — в іпотечні облігації й іпотечні сертифікати; $\sum_{j=1}^n \alpha_{7j}$ — в об'єкти нерухомості; $\sum_{j=1}^n \alpha_{8j}$ — у банківські метали.

У разі якщо обсяг пенсійних активів НПФ не досяг 500 тис. грн та якщо з дати реєстрації НПФ не минуло понад 18 місяців, замість інвестиційних обмежень на вкладення пенсійних активів у цінні папери, доходи за котрими гарантовано Кабінетом Міністрів України (формула 31), та в банківські метали (формула 38) слід застосовувати такі:

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{2j} \leq 1; \quad (40)$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{8j} \leq 1. \quad (41)$$

Підбиваючи підсумок, зазначимо, що запропонований науково-методичний підхід до оптимізації інвестиційного портфеля НПФ ґрунтується на статистичній оптимізації інвестиційних рішень в умовах слабкої кореляції активів та передбачає застосування коефіцієнтів ризикової еластичності й ризикової віддачі як окремих активів, так і інвестиційного портфеля загалом. Запровадження результатів дослідження в практику управління пенсійними активами НПФ сприятиме поліпшенню інвестиційного менеджменту фондів за рахунок зниження ризику інвестиційних втрат унаслідок невдалого інвестиційного вибору.

Список використаних джерел

1. Кириленко О. П. Захист пенсійних накопичень у контексті інвестиційної діяльності недержавних пенсійних фондів / О. П. Кириленко, Г. І. Козак // Фінанси України. — 2012. — № 2. — С. 38—49.
2. Леонов Д. Тенденції розвитку інвестиційної діяльності недержавних пенсійних фондів / Д. Леонов // Вісник соціально-економічних досліджень. — 2007. — Вип. 25. — С. 210—218.
3. Смовженко Т. С. Недержавні пенсійні фонди у структурі сучасних пенсійних систем : монографія / Т. С. Смовженко, Н. В. Ткаченко, Н. А. Цікановська ; за заг. ред. Т. С. Смовженко. — К. : УБС НБУ, 2012. — 310 с.
4. Федоренко А. Інвестиційний потенціал накопичувальної системи пенсійного страхування / А. Федоренко // Світ фінансів. — 2011. — № 2. — С. 132—141.
5. Федоренко А. Об'єкти та процедури інвестування коштів недержавних пенсійних фондів / А. Федоренко // Україна фінансова: інф.-аналіт. портал Укр. агентства фін. розвитку [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://www.ufin.com.ua/analit_mat/rzp/036.htm.

6. Sharpe W. F. Investments / W. F. Sharpe, G. J. Alexander, J. V. Bailey. — New Delhi : Prentice Hall of India Pvt., Ltd., 1995.
7. Боди З. Принципы инвестиций / З. Боди, А. Кейн, А. Дж. Маркус. — М. : Вильямс, 2002. — 994 с.
8. Гитман Л. Дж. Основы инвестирования / Л. Дж. Гитман, М. Д. Джонк ; пер. с англ. — М. : Дело, 1999. — 1008 с.
9. Райс Т. Финансовые инвестиции и риск / Т. Райс, Б. Койли ; ред.: М. А. Гольцберг, Л. М. Хасан-Бек ; пер. с англ. — К. : BHV, 1995. — 592 с.
10. Фабоцци Ф. Управление инвестициями / Ф. Фабоцци ; пер. с англ. — М. : ИНФРА-М, 2000. — 932 с.
11. Bahadur R. Application of Markowitz and Sharpe Models in Nepalese Stock Market / R. Bahadur, P. S. Koirala // The Journal of Nepalese Business Studies. — 2006. — Vol. 3, No 1. — P. 18—35.
12. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization / T. J. Chang, N. Meade, J. E. Beasley, Y. M. Sharaiha // Computers & Operational Research. — 2000. — No 27. — P. 1271—1302.
13. Gnedenko B. V. Probabilistic Reliability Engineering / B. V. Gnedenko, I. Ushakov ; ed. by J. Falk. — N. Y. : John Wiley & Sons, Inc., 1995. — 454 p.
14. Цікановська Н. А. Науково-методичний підхід до формування ефективних інвестиційних портфелів недержавних пенсійних фондів / Н. А. Цікановська // Вісник Університету банківської справи Національного банку України. — 2013. — № 3. — С. 199—203.
15. Боярко І. М. Інвестиційний аналіз : навч. посіб. / І. М. Боярко, Л. Л. Грищенко — К. : ЦУЛ, 2011. — 400 с.
16. Про недержавне пенсійне забезпечення : закон України від 09.07.2003 № 1057-IV [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/1057-15>.

References

1. Kyrylenko, O. P., & Kozak, H. I. (2012). Zakhyst pensijnykh nakopychen' u konteksti investytsijnoyi diyal'nosti nederzhavnykh pensijnykh fondiv [Protection of pension savings in the context of investment activity of the NPF]. *Finansy Ukrainy* [Finance of Ukraine], 2, 38-49 [in Ukrainian].
2. Leonov, D. (2007). Tendenciyi rozvytku investytsijnoyi diyal'nosti nederzhavnykh pensijnykh fondiv [Trends in the investment of private pension funds]. *Visnyk social'no-ekonomichnykh doslidzhen'* [Journal of Social and Economic Research], 25, 201-218 [in Ukrainian].
3. Smovzhenko, T. S., Tkachenko, N. V., & Cikanovs'ka, N. A. (2012). *Nederzhavni pensijni fondy u strukturi suchasnykh pensijnykh system* [Private pension funds in the structure of modern pension systems]. Kyiv: UBS NBU [in Ukrainian].
4. Fedorenko, A. (2011). Investytsijnyj potencial nakopychuval'noyi systemy pensijnoho strakhuvannya [Investment potential of the pension insurance accumulation system]. *Svit finansiv* [World of finance], 2, 132-141 [in Ukrainian].
5. Fedorenko, A. (n. d.). Ob'yekty ta procedury investuvannya koshtiv nederzhavnykh pensijnykh fondiv [Objects and procedures of private pension funds investing]. *Ukrayina finansova: Informacijno-analitychnyj portal Ukrainyis'koho ahenstva finansovoho rozvytku* [Financial Ukraine: Information-analytical portal of Ukrainian Financial Development Agency]. Retrieved from http://www.ufin.com.ua/analit_mat/rzp/036.htm [in Ukrainian].
6. Sharpe W. F., Alexander, G. J., & Bailey, J. V. (1995). *Investments*. New Delhi: Prentice Hall of India Pvt. Ltd.
7. Bodie, Z., Basu, A., Drew, M. E., Kane, A., & Marcus, A. J. (2002). *Principy investicij* [Principles of Investments]. Moscow: Vil'yams [in Russian].
8. Gitman, L. J., Joehnk, M. D., & Smart, S. B. (1999). *Osnovy investirovaniya* [Fundamentals of investing]. Moscow: Delo [in Russian].

9. Rice, T., & Collie, B. (1998). *Finansovye investicii i risk* [Financial investment risk]. Kiev: Libra [in Russian].
10. Fabozzi, F. (2000). *Upravlenie investitsiyami* [Investment management]. Moscow: Infra-M [in Russian].
11. Bahadur, R., & Koirala, S. (2006). Application of Markowitz and Sharpe Models in Nepalese Stock Market. *The Journal of Nepalese Business Studies*, Vol. 3, No. 1, 18-35.
12. Chang, T. J., Meade, N., Beasley, J. E., & Sharaiha, Y. M. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization. *Computers & Operational Research*, 27, 1271-1302.
13. Gnedenko B. V., & Ushakov I. (1995). *Probabilistic Reliability Engineering*. New York: John Wiley & Sons.
14. Cikanovs'ka, N. A. (2013). Naukovo-metodychnyj pidkhid do formuvannya efektyvnykh investytsijnykh portfeliv nederzhavnykh pensijnykh fondiv [Scientific and methodical approach to the formation of efficient investment portfolios of private pension funds]. *Visnyk Universytetu bankivs'koyi spravy Nacional'noho banku Ukrainy* [Journal of University of Banking of National Bank of Ukraine], 3, 199-203 [in Ukrainian].
15. Boyarko, I. M., & Hrycenko, L. L. (2011). *Investytsijnyj analiz* [Investment analysis]. Kyiv: Centr uchbovoyi literatury [in Ukrainian].
16. Verkhovna Rada of Ukraine. (2003). *Pro nederzhavne pensijne zabezpechennya* [On private pension provision] (Law No. 1057-IV, July 9). Retrieved from <http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/1057-15> [in Ukrainian].