

UDC 528.4

V. LITYNS'KYY^{1*}, M. FYS², I. POKOTYLO³, S. LITYNS'KYY⁴

^{1*}Department of geodesy of National university Lviv polytechnic, 12 Bandera street, Lviv, Ukraine, 79013, tel. +38(097)3311900, e-mail Litynsky@polynet.lviv.ua.

²Department of cartography and geospatial modeling of National university Lviv polytechnic, 12 Bandera street, Lviv, Ukraine, 79013.

³Department of geodesy of National university Lviv polytechnic, 12 Bandera street, Lviv, Ukraine, 79013.

⁴Department of programming of Ivan Franko National university of Lviv, 1 University street, Lviv, Ukraine, 79000.

CALCULATION OF OPTIMAL VALUES OF MEASURED LENGTHS FOR ACCURATE DETERMINATION OF SMALL SEGMENTS

The paper considers a method of minimizing error when the linear values are determined by measured distances and angles by device that is located not directly ahead of determined intervals. The formula is given for choosing the optimal distance and angles to determined objects. The optimal distances and angles are depended on the defined linear segments and the accuracy of the measured distances and angles to determined objects. As can be seen from the analysis of the determination of the formulas accuracy of determined segments are several times (from 5 to 25 times) higher than the precision of measurements, which define these segments. The graphs of accuracy of defined segments by the accuracy of the measured distances and angles are also given. The proposed method can be used to calculate the accuracy of the previous determination of small segments when using the devices for measuring linear and angular values of specified accuracy. Measurement of small segments with high accuracy requires special instruments or devices. For example, to determine the length of the meter and decimeter ranges of leveling rods, that are used in II, III and IV leveling classes, one need to have control meter or special comparator. Using the proposed method it is possible to compare above mentioned rods using electronic total stations. The proposed method can also measure the phase section of exemplary basis, create a reference base for angular measurements, installing equipment in project position, observe deformations of buildings and equipment as well as numerous other engineering tasks.

Introduction

Measurement of small segments with high accuracy [Antonyuk V, 2006; Instructions for leveling I, II, III and IV classes, 1990; Tchebotarev A, 1962; Reference for surveyor, 1966; Geodetic encyclopedic dictionary, 2001] requires special equipment or accessories. For example, to determine the length of one meter leveling rods [Instructions for leveling I, II, III and IV classes, 1990] should have control meter, which must certify in Kharkiv Meteorological Institute. Measurement of the phase measure of reference basis requires special equipment [Kupko V., Prokopov O., Lukin I., Sobol' V., Kosenko O., Kofman, 2004; Trevoho I.S., Savchuk S.H, Denysov O.M. Volchko P.I, 2004].

We propose a method that allows calculating the accuracy of surveying instruments, such as electronic total station that should be used for specific desired precision of determination of length of small intervals [Fys M.,Lityns'kyy V., Pokotylo I., Lityns'kyy S].

Purpose

We perform the calculation of accuracy of the lengths of small segments [Tchebotarev A.S., Selyhanjvich V.G., Sokolov M.N.; Reference for surveyor, 1966] depending on the length of the measured lines on which these segments are calculated and the accuracy of measurement of lines and angles [Plotnykov V.S., 1987]. Let us consider Fig. 1.

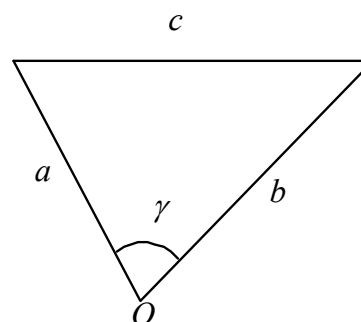


Fig. 1. Scheme for determination of the length of the segment c

Find the best length of segments a and b for the mean square error of determining the length of the segment c to be minimal.

Length of the segment c is given by.

$$c(a, b, \gamma) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}. \quad (1)$$

$$m_c(a, b, \gamma) = \frac{1}{c} \sqrt{(b - a \cos \gamma)^2 m_b^2 + (a - b \cos \gamma)^2 m_a^2 + a^2 b^2 \sin^2 \gamma m_\gamma^2}. \quad (2)$$

Let's plot formula (2) for fixed values of m_a, m_b and m_γ for a certain length.

From Figure 2 one can see that minimum of m_c is achieved when $a = b$. Let's denote these values by one letter l .

For equal sides of a triangle formulas (1, 2) can be significantly simplified:

$$c(l, a) = \sqrt{l^2 + l^2 - 2l^2 \cos \gamma} = 2l \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

Thus, the error of side c is calculated with the following formula:

$$m_c(l, \gamma) = \sqrt{m_l^2 [(\partial c(l, \gamma) / \partial l)]^2 + m_\gamma^2 [(\partial c(l, \gamma) / \partial \gamma)]^2}. \quad (4)$$

Denote by m_a, m_b (if $a=b$, then this error will be denoted as $m_{a/b}$) and m_γ mean square error of values of a, b and γ . Find the mean square error of the segment c as a function of a, b and γ . Obtaining formula for m_c in an explicit form [2]

For formula (3) error is as follows:

$$m_c(l, \gamma) = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\gamma}{2} m_l^2 + l^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} m_\gamma^2} \quad (5)$$

where $m_l = \frac{m_{(a/b)}}{\sqrt{2}}$ because the length of l is actually measured twice.

To find the minimum [Bertsekas, Dimitri P., 1999; Vapnyarskii, I.B., 2001; Lemaréchal, Claude, 2001] of (5) by condition (3) one can construct the Lagrange function [2]

$$F(l, \gamma, \lambda) = m_c(l, \gamma) + \lambda \left(\frac{c - 2l \sin \gamma}{2} \right). \quad (6)$$

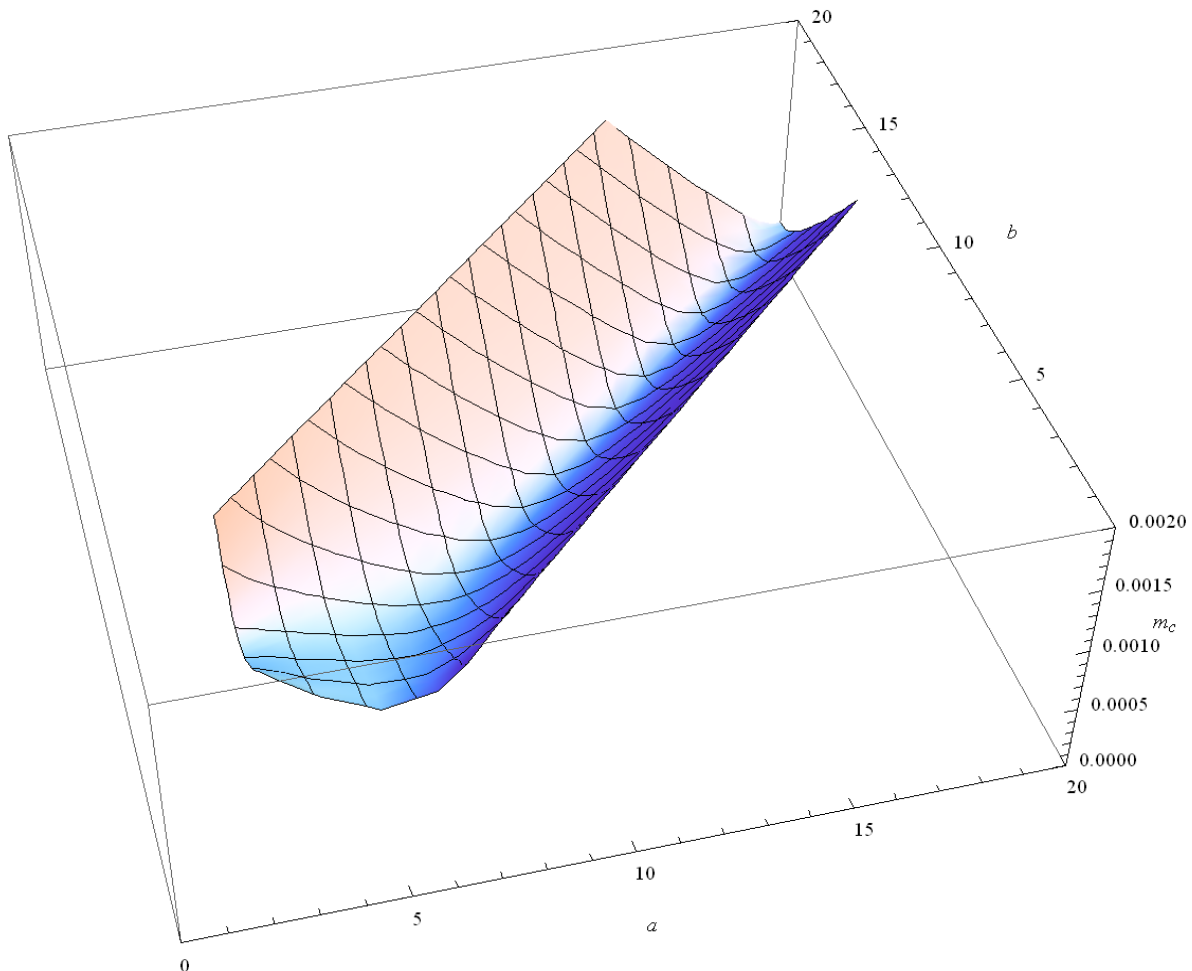
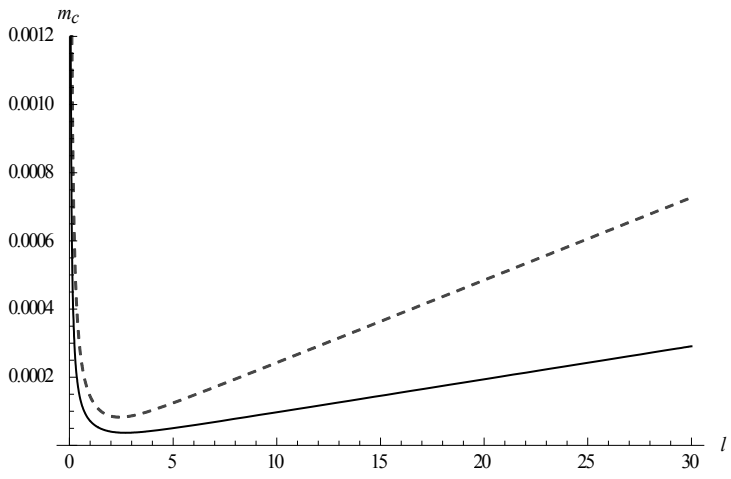
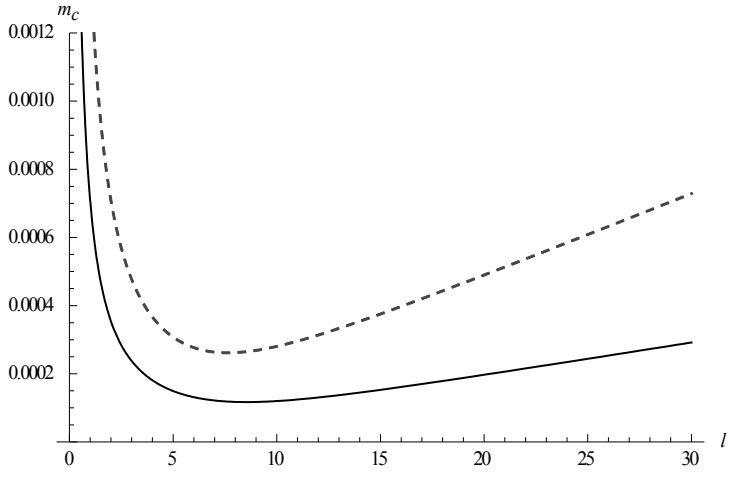
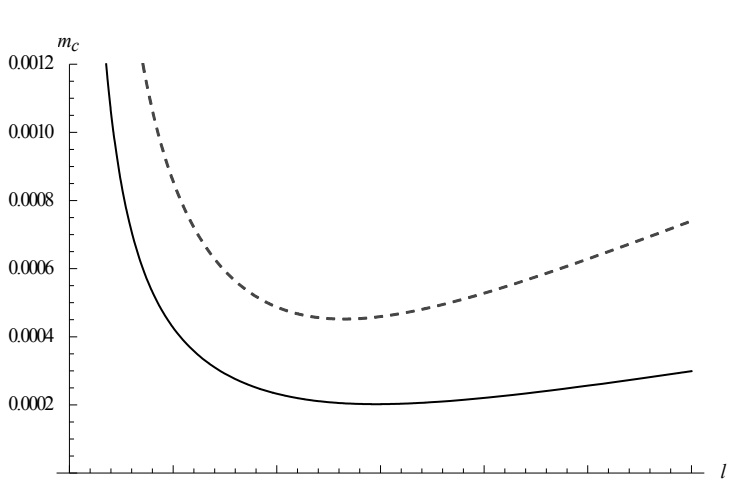


Fig. 2. The dependence of the mean square error of determination of the length $c = 5$ m (by length of a and b)

Table 1

The dependence of the mean square error m_c from length of l for

$$m_{a/b} = 2\text{ mm and } m_\gamma = 5'' , m_{a/b} = 1\text{ mm and } m_\gamma = 2''$$

| $c, \text{ m}$ | The dependence of the mean square error from the length of $l, \text{ m}$ | Optimal l and m_c |
|----------------|--|---|
| 0.1 |  | <p>For $m_{a/b} = 2\text{ mm and } m_\gamma = 5''$ $l = 2,41\text{ m, } m_c = 0,08\text{ mm}$</p> <p>For $m_{a/b} = 1\text{ mm and } m_\gamma = 2''$ $l = 2,69\text{ m, } m_c = 0,04\text{ mm}$</p> |
| 1.0 |  | <p>For $m_{a/b} = 2\text{ mm and } m_\gamma = 5''$ $l = 7,63\text{ m, } m_c = 0,26\text{ mm}$</p> <p>For $m_{a/b} = 1\text{ mm and } m_\gamma = 2''$ $l = 8,53\text{ m, } m_c = 0,12\text{ mm}$</p> |
| 3.0 |  | <p>For $m_{a/b} = 2\text{ mm and } m_\gamma = 5''$ $l = 13,22\text{ m, } m_c = 0,45\text{ mm}$</p> <p>For $m_{a/b} = 1\text{ mm and } m_\gamma = 2''$ $l = 14,79\text{ m, } m_c = 0,20\text{ mm}$</p> |

Let's find the extremum (6) for all variables

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F(l, \gamma, \lambda)}{\partial l} = l \cos^2 \frac{\gamma}{2} m_\gamma^2 - \lambda \sin \frac{\gamma}{2} = 0 \\ \frac{\partial F(l, \gamma, \lambda)}{\partial \gamma} = \sin \frac{\gamma}{2} (4m_\alpha^2 - l^2 m_\alpha^2) - \lambda l = 0 \\ \frac{\partial F(l, \gamma, \lambda)}{\partial \lambda} = c - 2l \sin \frac{\gamma}{2} = 0 \end{array} \right.$$

Hence

$$l = \sqrt{\frac{cm_l}{m_\gamma}} = \sqrt{\frac{cm_{a/b}}{m_\gamma \sqrt{2}}}, \quad (7)$$

All angular values are in radians.

Results

Let's give a table and graphs from which one can get the optimal length of side l (formula (7)) and the mean square error (formula (5)), depending on the length of the side.

The derived formulas show how having defined precision of angular measurements [Plotnykov V.S., 1987] to determine the optimal length of linear measurements to obtain the required accuracy of definable intervals. The accuracy of the desired segments may be significantly greater than the accuracy of linear measurements.

Conclusion 1

Lengths of the sides should be equal for determining the length of the segment with the minimum mean square error.

Conclusion 2

When measuring certain lengths c one should perform measurements with shoulder length according to formula (7) to obtain the best accuracy.

REFERENCES

Antonyuk V. Kompleksna realizatsiya metodu vstanovlennya obladnannya v proektne polozhennya z vykorystannyam suchasnoho ta tradytsiynoho heodezychnoho obladnannya [Comprehensive implementation of the method of installation of equipment project position using modern and

traditional surveying equipment]. V. Antonyuk, V. Astaf'yev, V. Hrek, Ye. Klepver, V. Korol'ov, M. Lobur, V. Nikitchenko, A. Vivat, S. Savchuk, T. Shevchenko. "Heodeziya, kartohrafiya i aerofotoznimannya". [*"Geodesy, Cartography and Aerial Photography"*]. 2006, issue. 67. – P. 10–16.

Zabolots'kyy M. V. ta in. Matematychnyy analiz [Mathematical analysis]. Kyiv, 2008. – P.424.

Instruktsyya po nyvelyrovanyyu I, II, III i IV klassov. [Instructions for leveling I, II, III and IV classes]. M.: Nedra, 1990. – P.167.

Tchebotarev A. S., Selyhanjvich V.G., Sokolov M.N. Geodezyja. Ch.II Uchebnik dlja vuzov. [Geodesy. Part II. Textbook for high schools]: Moskovskaya pravda, 1962. – 614 p.

Spravochnyk geodezyzta [Reference for surveyor]. Moskov: Nedra, 1966. – 984 p.

Kupko V., Prokopov O., Lukin I., Sobol' V., Kosenko O., Kofman. O. Natsional'nyy etalonnyy liniyno-heodezychnyy polihon. "Suchasni dosyahnennya heodezychnoyi nauky ta vyrobnytstva" [National standard linear geodesic polygon. "Recent advances in geodetic science and industry"]. 2004. – P. 98–104.

Plotnykov V.S. Heodezycheskye prybory: Uchebnyk dlya vuzov. [Geodezycal instrumentation: Textbook for Universities]. Moskov. Nedra, 1987. – P. 396.

Trevoho I.S., Savchuk S.H, Denysov O.M. Volchko P.I. Novyy vzirtsevyy heodezychnyy bazys. "Visnyk heodeziyi ta kartohrafiyi" [New etalon geodetic basis. "*Bulletin of Surveying and Mapping*"]. 2004, №1(32). – P. 13–16.

Fys M.,Lityns'kyy V., Pokotylo I., Lityns'kyy S. Obruntuvannya tochnosti vyznachennya intervaliv mirnykh shkal za vymiryannymy vidstanyamy i kutamy [Justification accuracy of the measured interval scales for the measured distances and angles]. XVIII Mizhnarodnyy naukovotekhnichnyy sympozium "Heoinformatsiynny monitorynh navkolyshn'oho seredovyscha". [International Science and Technology Symposium "Geoinformation monitoring of the environment"]. 2013. – P. 228.

Bertsekas, Dimitri P. (1999). Nonlinear Programming (Seconded.). Cambridge, MA.: Athena Scientific. ISBN 1-886529-00-0.

Vapnyarskii, I.B. (2001), "Lagrange multipliers", in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4.

- Lemaréchal, Claude (2001). "Lagrangian relaxation". In Michael Jünger and Denise Naddef. Computational combinatorial optimization: Papers from the Spring School held in Schloß Dagstuhl, May 15–19, 2000. Lecture Notes in Computer Science 2241. Berlin: Springer-Verlag. pp. 112–156. doi:10.1007/3-540-45586-8_4. ISBN 3-540-42877-1. MR 1900016.
- Geodezychjy encyklopedychnyj slovnyk [Geodetic encyclopedic dictionary]. Lviv: Eurosvit, 2001. – P. 668.

В. ЛІТИНСЬКИЙ^{1*}, М. ФИС², І. ПОКОТИЛО³, С. ЛІТИНСЬКИЙ⁴

^{1*}Кафедра геодезії, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013, тел. +38(097)3311900, ел. пошта Litynskyu@polynet.lviv.ua.

²Кафедра картографії та геопросторового моделювання, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013.

³Кафедра геодезії, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013.

⁴Кафедра програмування, Львівський Національний університет ім. Івана Франка, вул. Університетська 1, Львів, Україна, 79000.

РОЗРАХУНОК ОПТИМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ВИМІРЮВАНИХ ВІДДАЛЕЙ ДЛЯ ТОЧНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ДОВЖИН НЕВЕЛИКИХ ВІДРІЗКІВ

Розглянуто метод мінімізації похибки під час посереднього визначення лінійних відрізків за вимірними лініями і кутами приладом, що розташований не у створі визначуваного відрізка. Виведено формулу вибору оптимальних віддалей і кутів від приладу до кінців визначуваного відрізка залежно від величини шуканих лінійних відрізків та точності вимірюваних ліній і кутів. Як бачимо із аналізу точності формул, точність шуканих відрізків є в п'ять – двадцять п'ять разів, залежно від точності вимірюваних кутів та величини шуканого відрізка, більшою, ніж точність вимірюваних віддалей, за якими визначають ці відрізки. Подано графіки, за допомогою яких, залежно від величин шуканих відрізків та точності вимірюваних віддалей і кутів, можна безпосередньо знайти точність шуканого відрізка. Запропонований спосіб можна використовувати для попереднього розрахунку точності визначень невеликих відрізків під час використання приладів для вимірювання лінійних та кутових величин заданої точності. Вимірювання невеликих відрізків з великою точністю вимагає спеціальних приладів чи приладдя. Наприклад, для визначення довжин дециметрових та метрових інтервалів нівелірних рейок, які використовують у II, III і IV класах нівелювання, необхідно мати контрольний метр або спеціальний компаратор. Використовуючи запропоновану методику, можна компарувати вищезазначені рейки, використовуючи електронні тахеометри. Цим способом можна також вимірювати фазову ділянку взірцевого базису, створювати еталонні базиси для кутових вимірювань, установлювати устаткування у проектне положення, спостерігати за деформаціями споруд та устаткування, а також для інших багаточисленних інженерних задач.

Ключові слова: розрахунок точності визначень відрізків; вимірювання відрізків; взірцевий базис; компарування рейок; спостереження за деформаціями.

В. ЛИТЫНСЬКИЙ^{1*}, М. ФИС², І. ПОКОТЫЛО³, С. ЛИТЫНСЬКИЙ⁴

^{1*}Кафедра геодезии, Национальный университет "Львовская политехника", ул. С. Бандеры 12, Украина, 79013, тел +38 (097) 3311900, эл. почта Litynskyu@polynet.lviv.ua.

²Кафедра картографии и геопространственного моделирования, Национальный университет "Львовская политехника", ул. С. Бандеры 12, Украина, 79013.

³Кафедра геодезии, Национальный университет "Львовская политехника", ул.С. Бандеры 12, Украина, 79013.

⁴Кафедра программирования, Львовский национальный университет имени Ивана Франка, ул. Университетская 1, Украина, 79000.

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИЗМЕРЯЕМЫХ РАССТОЯНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧНОСТИ ДЛИН НЕБОЛЬШИХ ОТРЕЗКОВ

Рассмотрен метод минимизации погрешности при косвенном определении линейных отрезков по измеренным линиям и углам прибором, расположенным не в створе определяемого отрезка. Выведена формула выбора оптимальных расстояний и углов от прибора до концов определяемого отрезка в зависимости от величины искомых отрезков и точности измеряемых линий и углов. Как видно из анализа

точности формул, точность искомых отрезков в пять – двадцать пять раз, в зависимости от точности измеряемых углов и величин искомого отрезка, больше, чем точность измеряемых расстояний, по которым определяют эти отрезки. Подано графики, на которых, в зависимости от величин искомых отрезков и точности измеряемых расстояний, и углов, можно непосредственно получить точность искомого отрезка. Предлагаемый способ можно использовать для предрасчета точности определений небольших отрезков, когда используют приборы для измерения линейных и угловых величин заданной точности. Измерение небольших отрезков с большой точностью требует специальных приборов и приспособлений. Например, для определения длин дециметровых и метровых интервалов нивелирных реек, используемых в II, III и IV классах нивелирования нужно иметь контрольный метр или специальный компаратор. Используя предлагаемую методику можно компарировать вышеуказанные рейки, используя электронные тахеометры. Предлагаемым способом можно также измерять фазовый участок эталонного базиса, создавать эталонные базисы для угловых измерений, устанавливать оборудование в проектное положение, наблюдать за деформациями сооружений и оборудования, а также для других многочисленных инженерных задач.

Ключевые слова: расчет точности определений отрезков; измерения отрезков; образцовый базис; компарирования рельсов; наблюдения за деформациями.

Надійшла 15.02.2014 р.