УДК 514.115

Зеленяк Олег Петрович
кандидат педагогічних наук, учитель математики та інформатики
Олександрійський колегіум, м. Олександрія, Україна
zlnk@ukr.net

ТЕХНОЛОГІЇ ЗАСТОСУВАННЯ СЕРЕДОВИЩ ДИНАМІЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Анотація. У статті розглянуті окремі проблеми і технології навчання геометрії із застосуванням динамічних середовищ учнів класів з поглибленим і профільним вивченням математики. Інтегроване застосування знань з геометрії, алгебри і математичного аналізу, інформатики сприяє реалізації міжпредметних зв'язків і знайомить учнів з елементами дослідницького підходу. Наголошено на актуальності створення комп'ютерно-орієнтованих технологій навчання математики, внесенні відповідних змін до навчальних програм і посібників, проведенні системних досліджень ефективності їх застосування з урахуванням педагогічних ризиків.

Ключові слова: комп'ютерно-орієнтовані технології; середовища динамічної геометрії; моделювання; геометрична конфігурація; міжпредметні зв'язки; дослідницький підхід.

1. ВСТУП

Постановка проблеми. Інформатизація освіти передбачає застосування програмних засобів навчального призначення. Програми з математики протягом тривалого часу наводять перелік тем, під час вивчення яких доцільно використовувати GRAN, DG, бібліотеки електронних наочностей тощо.

Ще майже десять років тому зазначалося: «Інформатизація загальноосвітніх навчальних закладів в Україні вступила в якісно новий етап: переважна більшість шкіл мають у своєму розпорядженні сучасні комп'ютерні класи, які підключені до мережі Інтернет, з багатьох предметів розроблені програмно-методичні комплекси, що забезпечує можливість проводити заняття на якісно новому рівні на основі дослідницького підходу в навчанні. … Водночас методика використання математичних пакетів, зокрема пакетів динамічної геометрії, на уроках математики ще не досить глибоко розроблена й усталена» [1, 2].

Які зміни відбулися? Ідеї й елементи окремих технологій комп'ютерної підтримки навчального процесу стихійно проникли в методичні системи навчання математики. Але змушені констатувати, що консерватизм і традиції фундаментальності в освіті — стійкіші [2]. Процес навчання (програми, підручники) — непорушний. Ніби принципово не бажаючи змінюватись, він залишається «безмашинним». Ускладнюється проблема недостатньою кількістю годин на вивчення математики, антиматематизацією (антифундаменталізацією) шкільного курсу інформатики, відсутністю комп'ютерів, сервісів доступу до Інтернету, ліцензійних програм.

Надзвичайно впливовий аспект проблеми — технологічна складова ІКТ. Дійсно, каталізуючи процеси науково-технічного і суспільного розвитку країни, впливаючи на конкурентоспроможність її економіки, вона домінувала й домінує. Позаду залишились калькулятори, бурхлива процесорна революція, локальні мережі. Нині маємо глобальні мережі, цифрове відео, електронні засоби і ресурси навчання, стрімкий розвиток мобільних пристроїв, інституційні репозитарії, аутсорсери, хмарні обчислення, інтелектуальні сервіси з «оркестрами» алгоритмів [3], мережні віртуальні майданчики мережних хмарних ІКТ-інфраструктур і т. д. Попереду …

Тому підвищена увага до технологічної складової зрозуміла: завжди сучасно, цікаво і перспективно для дисертаційного дослідження.

У травні 2013 р. в Херсонському державному університеті успішно пройшла Всеукраїнська науково-практична конференція «*Інформаційні технології в освіті України: стан, проблеми, перспективи*». Прозвучали змістовні доповіді, обговорення та дискусії. Але вкотре більшість рекомендацій і висновків заключного рішення торкаються лише інформатики й технічних питань, пов’язаних з ІКТ, незважаючи на те, що тематика конференції значно ширша. На секції «Комп'ютерно орієнтовані системи навчання учнів загальноосвітніх навчальних закладів» учасників було найменше. На нашу пропозицію відповідальним особам організувати Всеукраїнський практичний експеримент із застосування комп’ютера на уроках стереометрії щонайменше на два роки була відповідь: «експериментувати можна, але коштів на це немає».

Зауважимо, що: а) проблема, яка розглядується, — невід’ємна локальна комп’ютерно-орієнтована складова глобального процесу інформатизації освіти, і з позицій системного підходу вона, як одна з кінцевих, має системно досліджуватися й розвиватися, незважаючи на стрімкий і невпинний розвиток ІКТ; б) ***технологічна складова критично вже не впливає на застосування комп’ютера на уроках математики!***

Окрім того, цю роботу можна було розпочинати ще з появою GRAN1 під DOS. Швидкодія й обсяг пам’яті вражають на сьогоднішній день навіть у мобільних пристроях. Ресурси одного Pentium’а набагато більші від сумарної потужності всіх обчислювальних пристроїв Академії наук СРСР на початку 60-х років. Вони еквівалентні приблизно 500 комп’ютерам БЭСМ-2М (рос.): RAM 10 Kb, тактова частота 0,5 MHz, швидкодія 8–10 тисяч операцій за секунду. Саме на таких комп’ютерах успішно виконано розрахунки атомних бомб і реакторів, конструкцій ракет і орбіт супутників! Отже, надзвичайно гостро постає питання ефективності затрат на інформатизацію й навчання тих, хто створюватиме подібні обчислювальні алгоритми.

Тому сучасний стан розв’язання вказаної проблеми, на наш погляд, є неприйнятним. Потребують вирішення питання використання середовищ, розроблених в інших країнах. Міжнародний проект з відкритим кодом GeoGebra [4] — вільний продукт із потужними функціональними можливостями й уже нарешті з україномовним інтерфейсом. Geometer's Sketchpad, Cabri 3D — комерційні середовища, які локалізовано для шкіл Росії. Останнє, вважаємо, необхідно локалізувати і для українських шкіл.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженню різних аспектів інформатизації освіти й **у**провадженню засобів ІКТ у навчальний процес присвячені роботи В. Ю. Бикова, М. І. Жалдака, Ю. О. Жука, В. І. Клочка, М. С. Львова, С. А. Ракова, Ю. С. Рамського, О. В. Співаковського та інших.

Технології використання середовищ динамічної геометрії (СДГ) розглядали в своїх роботах Є. Ф. Вінниченко, Ю. В. Горошко, В. П. Горох, Л. В. Грамбовська, М. І. Жалдак, Т. Г. Крамаренко, С. А. Раков, Ж. Дахан (Франція), В. Н. Дубровський (Росія), Х. Шуманн (Німеччина) та інші.

Аналіз сучасного етапу інформатизації суспільства й освіти з позицій системного підходу досліджено у роботі [5]. «Експоненційне зростання знань і пов’язані з цим радикальні технологічні зміни по іншому ставлять традиційні проблеми здобування знань, опанування знаннями в професійному середовищі й освіті наступних поколінь. Принциповим компонентом здійснюваних змін є ІКТ» [5, 1].

Проблеми інформатизації навчального процесу в середніх і вищих навчальних закладах розглянуто в роботі [6]. «Значною перешкодою для широкого впровадження й ефективного використання засобів ІКТ у навчальному процесі … є майже повна відсутність відповідного комп'ютерно-орієнтованого навчально-методичного забезпечення, що стримує інформатизацію навчального процесу і значно знижує ефективність використання ІКТ …» [6, 11].

Особливості навчальної діяльності в комп'ютерно-орієнтованому навчальному середовищі, його вплив на психічні якості людини і її «особистісний простір», можливі супутні педагогічні ризики розглянуті у роботах [8; 10].

Суттєва критична думка автора цілком збігається з нашою точкою зору на сучасний стан практичної реалізації проблеми. «Аналіз літератури показує поширення дисертаційно-декларативних висловлень про те, що використання засобів ІКТ в освіті "поліпшує", "забезпечує підвищення", "надає можливість" і т. ін. Це пояснюється превалюванням у дослідженнях позитивних результатів використання ІКТ у навчальному процесі, короткостроковістю досліджень і впливом сформованості в широких колах освітян "позитивістського" підходу до трактування результатів впровадження ІКТ, що досягають сьогодні міфологічного рівня … Число публікацій, у яких доводиться, що "комп'ютери забезпечують індивідуалізацію навчання", а застосування навчальних програм дає тільки позитивні результати, перевищує всі розумні межі» [8, 4].

Критерії зовнішньої і внутрішньої якості інформаційно-комунікаційних технологій навчання, підходи щодо оцінювання показників для з'ясування ступеня проявлення критеріїв обґрунтовано у роботі [10].

Отже, у результаті аналізу джерел констатуємо, що проблема створення комп'ютерно-орієнтованого навчально-методичного забезпечення процесу навчання математики потребує термінового розв'язання. «Для створення й розробки комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання потрібні значні затрати зусиль і часу методистів-предметників… Сподівання ж на те, що вчителі самі створять комп'ютерно-орієнтовані системи навчання своїх предметів, є наївними, утопічними і безпідставними» [11, 7].

Мета статті полягає у висвітленні окремих технологій застосування СДГ на уроках математики в класах з поглибленим і профільним вивченням предмета.

2. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження проблеми проводилися в процесі тривалої педагогічної практики в старших класах з поглибленим і профільним вивченням математики на уроках математики, інформатики, технологій та позакласних заняттях.

Для комплексної реалізації міжпредметних зв'язків математики й інформатики використовувалися набори міжпредметних взаємопов'язаних задач, розв'язування яких вимагає інтегрованих знань з алгебри й математичного аналізу, геометрії та інформатики. Форми роботи — бінарні й інтегровані уроки математики й інформатики, проекти, навчально-дослідницькі завдання, конурси-захисти науково-дослідницьких робіт учнів-членів Малої академії наук України.

Засоби навчання — інтерактивні середовища GRAN-2D, GeoGebra, GRAN-3D, Cabri 3D, середовище програмування Turbo Pascal, MS Excel, Wolfram Alpha і т. д.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Наш двадцятирічний практичний досвід застосування комп'ютера на уроках математики, наукові дослідження з проблеми реалізації міжпредметних зв'язків математики й інформатики й результати педагогічної практики переконують, що СДГ разом з відповідною підготовкою вчителів у галузі ІКТ, педагогіки й психології здатні суттєво змінити і покращити технології й результати навчання геометрії.

Моделювання слід ефективно поєднувати з програмуванням, знайомлячи учнів з реалізацією окремих функцій спеціалізованих середовищ [2; 12; 13; 24; 25]. Це забезпечує неізольоване вивчення розділу «Алгоритмізація і програмування» і не «створює відчуженості учня від процесів, які відбуваються в програмному середовищі комп’ютера» [8, 5].

На підставі досліджень ми вважаємо, що «магічні швидкість, точність, виразність, динамічність, інтелектуальність» [1, 7], які надають СДГ, неминуче вплинуть на зміст шкільної геометричної освіти. Зрушення в педагогіці, спрямовані на перехід до комп’ютерно-орієнтованої парадигми, посилять прикладне спрямування курсів математики і тому ***до класичної статичної евклідової геометрії необхідно додати моделювання і кінематики***.

Геометрія — надбання людства, наука, яка існує тисячоліття. Її курс вирізняє стійкий зміст і гуманітарна спрямованість. Російський геометр і методист І. Ф. Шаригін емоційно писав: «Сегодня геометрия является одним из немногих экологически чистых продуктов, потребляемых в образовании» [14, 243]. Дійсно, неможливо переоцінити вплив цієї дисципліни на інтелектуальний, творчий і естетичний розвиток учня.

Окремі авторські технології навчання геометрії й технології розв’язування геометричних задач узагальнено в роботах[[15, 27–46; 25].

Нижче розглядатимемо технології застосування СДГ на уроках геометрії, акцентуючи увагу на моделюванні, динаміці конфігурацій і навчальних дослідженнях.

3.1. Планіметрія.

Різні аспекти використання СДГ у навчанні планіметрії і відповідні методологічні питання розглянуті в посібниках М. Жалдака, С. Ракова.

Комп’ютерні динамічні моделі на площині розглядаються в статтях Н. Бугайця, Є. Вінниченка, Ю. Горошка, Л. Грамбовської, С. Ракова та інших.

Додамо аспект, який, на наш погляд, є змістово-суттєвим і раніше не розглядався.

Сучасними тенденціями вдосконалення змісту шкільної освіти є інтеграція знань в єдину наукову картину світу і посилення творчо-діяльнісного компоненту.

«Зараз існує нічим не виправданий розрив між шкільними курсами алгебри та геометрії. Годі й казати, що це на шкоду їм обом… Найсуттєвішим недоліком використовуваного нині масиву задач є майже повна відсутність задач, які моделювали б функціональні зв’язки між змінними величинами в реальних, змістових ситуаціях. Натомість на першому плані суто математична рафінована формалістика. З року в рік учнів привчають до того, що функції – це певного ґатунку формули. Ситуації, які породжують ці формули, здебільшого лишаються за кадром» [16, 33].

Отже, звернувшись до геометрії, як до джерела математичних моделей і функціональних залежностей, наведемо дві авторські задачі, у яких моделюються функціональні зв’язки між змінними величинами.

Геометричні конфігурації, як правило, задаються набором параметрів. Якщо їх змінювати неперервно, конфігурація також в певному сенсі змінюється «неперервно». Аналіз поведінки змінної величини в такій конфігурації (об’єму, площі, довжини відрізка тощо) залежно від зміни лише одного її параметра приводить до дослідження функції від однієї змінної, що є закономірним й обов’язковим етапом.

- ***Задача 1.*** Рівнобічна трапеція $ABCD$ ($AD > BC$) описана навколо кола з центром I і радіусом IK, $IK = 1$. $U = AC \cap IK$, $V = AC \cap OB$, $W = OB \cap IK$, де O — центр описаного навколо трапеції кола. Знайти найбільше значення площі трикутника $\boldsymbol{UVW}$.

У даній динамічній конфігурації за фіксованого радіуса кола існує безліч трапецій і відповідно трикутників *UVW*. Якщо позначити гострий кут трапеції α, то можна довести, що на інтервалі $(0;\ \pi/2)$ площа $S(\alpha)$ трикутника *UVW* змінюється, досягаючи свого найбільшого значення, яке необхідно обчислити.

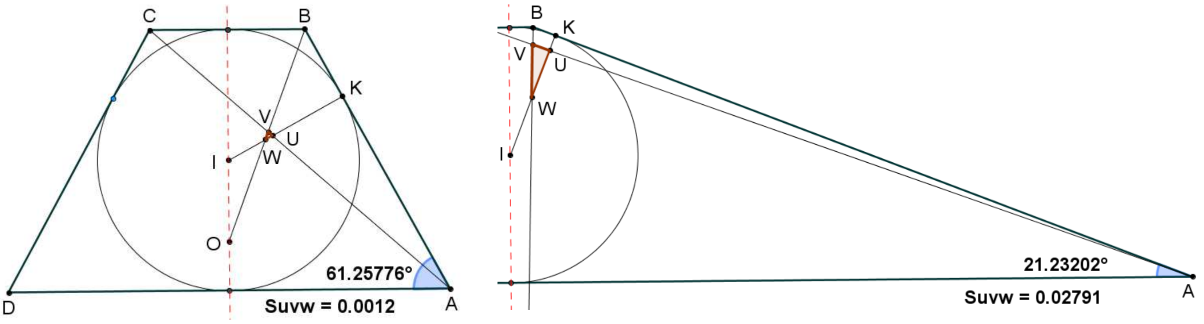

Рис. 1. Множина вписано-описаних рівнобічних трапецій

Застосовуючи метод координат і тригонометричні функції, одержимо

$$S_{UVW} = S(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^6\alpha\cdot(\cos\alpha-1)}{\sin\alpha\cdot(\cos^3\alpha-2\cos^2\alpha+2)\cdot(\cos^3\alpha-2\cos\alpha-1)},\ \text{де}\ \alpha\in(0;\ \pi/2).$$

Для дослідження $S(\alpha)$ засобами математичного аналізу необхідна похідна цієї функції. З формули зрозуміло, що її знаходження пов’язане з чималими технічними труднощами. Тому для подальшого розв’язування розглядається підходяща допоміжна функція $g(\alpha)$. Для знаходження її критичних точок відносно cos α одержується рівняння високого степеня: $3\cos^5\alpha + \cos^4\alpha - 13\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 9\cos\alpha + 6 = 0$. Wolfram Alpha дає розклад на множники: $(\cos\alpha + 1)(\cos\alpha - 2)(3\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 3\cos\alpha - 3) = 0$.

Корінь визначається з рівняння $3\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 3\cos\alpha - 3 = 0$, але його можна обчислити лише наближено ($\alpha \approx 0{,}39450$), тому застосування комп’ютера не уникнути.

Наведена неповна схема розв’язування задачі. Повне розв’язання [15, 17–19] технічно складне, але його варто демонструвати учням для порівняння з розв’язанням у СДГ [13]. Останнє під силу учням, знайомим з основними функціями середовища. Відповідь $S(\alpha) \approx 0{,}02791$ одержується швидко і з необхідною точністю.

- ***Задача 2.*** У прямокутному трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = \alpha$, $AB = 1$. Точки P і Q — центри кіл, вписаних в трикутники ABL і BCL, де BL — бісектриса кута трикутника. Знайти найбільше значення відстані PQ між центрами кіл.

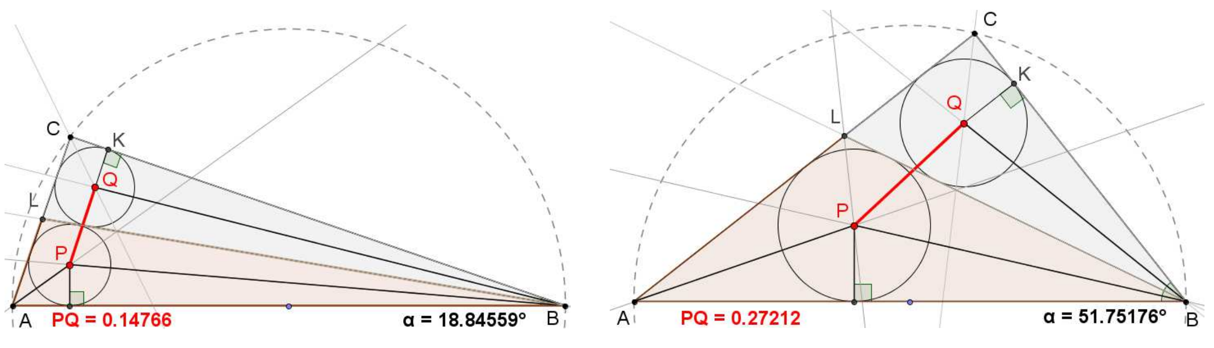

Рис. 2. Множина прямокутних трикутників

Можна довести, що: $Q\left(1-\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos{}^{3\alpha}\!/_4}{\sin{}^{\alpha}\!/_4+\cos{}^{\alpha}\!/_4};\ \dfrac{\cos\alpha\cdot\sin{}^{3\alpha}\!/_4}{\sin{}^{\alpha}\!/_4+\cos{}^{\alpha}\!/_4}\right);$

$$P\left(1:\left(1+\frac{\operatorname{ctg}{}^{\alpha}\!/_4}{\operatorname{ctg}(\pi/4-\alpha/2)}\right);\ 1:(\operatorname{ctg}(\pi/4-\alpha/2)+\operatorname{ctg}{}^{\alpha}\!/_4)\right).$$

Громіздкі формули для координат інцентрів свідчать про технічну складність подальшого «чесного» розв’язування засобами математичного аналізу. От де може знадобитись «псалтир тригонометричних формул і їх калейдоскопічних перетворень» (Ж. Дьєдонне)! Окрім того, розв’язування найшвидше, як і в попередній задачі, вимушено використовуватиме комп’ютер для уточнення кореня рівняння.

Створивши за декілька хвилин відповідну динамічну модель і виконавши вимірювання, отримаємо: $PQ \approx 0.27212$ при $\alpha \approx 51.75176°$.

Формули для координат точок P і Q дозволяють розв’язати задачу шляхом програмування. Пов’язуючи геометричні й аналітичні перетворення [25], ми поглиблюємо розуміння учнями функцій СДГ, навчаємо їх застосовувати знання. Це є актуальним, тому що прогрес у комп’ютерній графіці, моделюванні, робототехніці, системах автоматизованого керування зумовлює розвиток обчислювальної геометрії.

Наведемо розв’язання в середовищі Turbo Pascal.

```
Const step: Extended=0.000001;
      eps : Extended=0.000000001;
Var   a,f,g,PQ_old,PQ_new,
      xp,yp,xq,yq: Extended;

Function ctg(x:Extended):Extended;
begin ctg:=cos(x)/sin(x) end;

BEGIN
  {початкові присвоювання}
  PQ_new:=0; a:=51*pi/180;
  {ітераційний цикл з постумовою}
  Repeat
    PQ_old:=PQ_new;
    a:=a+step;
    {обчислення координат точки P}
    f:=ctg(a/4); g:=ctg(pi/4-a/2);
    xp:=1/(1+f/g);    yp:=1/(f+g);
    {обчислення координат точки Q}
    f:=cos(a); g:=sin(a/4)+cos(a/4);
    xq:=1-(f*cos(0.75*a))/g;
    yq:=f*sin(0.75*a)/g;
    {обчислення довжини відрізка PQ}
    PQ_new:=Sqrt(Sqr(xp-xq)+Sqr(yp-yq));
    WriteLn(a*180/pi,'  ', PQ_new);
  Until Abs(PQ_old-PQ_new)<=eps;
  {шукані екстремальні значення}
  Write(a*180/pi:1:5,'  ',PQ_new:1:5)
END.
```

Програма легко читається. Проміжні змінні скорочують кодування формул. Специфіка команди присвоювання дозволяє змінні f і g двічі використати в ітераційному циклі з постумовою. Необхідна точність обчислень досягається зміною значень величин крок (step) і точність (eps).

Отже, у динамічних геометричних конфігураціях дістаємо можливості формулювати нові типи задач і серії задач [17], які є міжпредметними і нетрадиційними, «хорошо поставленными». Внаслідок математичного моделювання одержуються функції, строге математичне дослідження яких складне, або й неможливе без комп'ютера. Для їх дослідження і розв'язування раціонально використовуються комп'ютерні середовища.

Досвід переконує в доцільності навчання в «глибину», а не в «ширину». Але планіметрія «представляет собой замкнутую модель науки, внутри которой можно бесконечно совершенствоваться» [14, 251]. На міжнародних олімпіадах з математики школярам пропонують саме планіметричні задачі. Тому глибина занурення у навчанні планіметрії і геометрії взагалі має бути ретельно виваженою.

Варто звернути увагу також на «тихий» опір моделюванню й кінематиці у процесі навчання геометрії з боку метрів статичної евклідової геометрії, дехто з яких ще й нині не користується електронною поштою. Відсутні експерименти, заперечення, дискусії, але і зміни не відбуваються. На жаль, все за класичним сценарієм. На уроці інформатики ми наводимо учням приклад: досвідчений висококваліфікований робітник розбив молотом верстат з числовим програмним управлінням тому, що заробітна плата навчених працювати на ньому молодих робітників стала вищою.

3.2. Стереометрія.

Учені й методисти постійно звертали увагу на важливість розвитку просторової уяви учнів. Видатний математик-педагог С. І. Шварцбурд у математичному розвитку школяра виділяв розвиток просторової уяви як одну з головних складових. Геометр М. Ф. Четверухін наголошував: «Однією з найважливіших задач викладання геометрії у школі є формування і розвиток в учнів просторової уяви, а також здібності і вміння проводити операції над просторовими об'єктами».

Сучасний етап упровадження систем автоматизованого проектування характеризується підвищеним інтересом до об'ємного моделювання. Комп'ютери суттєво розширили можливості обчислень за методами аналітичної і диференціальної геометрії. «Електронні кульмани» на сьогоднішній день наявні в усіх конструкторських бюро, геометрія сучасних виробів вражає. Робота в просторі вимагає не лише традиційних креслярських навичок. В інженерній практиці відомий метод декомпозиції: виріб розглядається як система агрегатів, що складаються з вузлів, а ті, у свою чергу, — з деталей. В об'ємному моделюванні вищі моделі, як правило, включають деталізовані нижчі, а складність формалізації всіх зв'язків у параметричних моделях вимагає пошуку асоціацій.

З огляду на те, що в стереометрії «конфігураційне» мислення й пошук асоціацій надважливі, вважаємо, що сучасні програми її навчання мають знайомити учнів з геометричним моделюванням, формувати навички формалізації і деталізації.

Чи відомий нині методистам і науковцям реальний рівень навчальних досягнень випускників з геометрії? Учителі на кожному уроці переконуються в «навчальній безпорадності» старшокласників. На згадуваній вище конференції у своєму виступі ми говорили про глобальні проблеми — повсюдне завищення оцінок, низькі вимоги ЗНО, підручникотворення (лобізм, «мозаїка», забезпеченість, наступність) і «дрібниці» — моделі з дроту, які ще рекомендуються у новітніх статтях; відсутність навіть згадки про програмні засоби для підтримки курсу математики в розділі «Ознайомлення з програмними засобами навчального призначення» в підручнику з інформатики тощо.

Розвивати просторову уяву лише за допомогою таблиць, кодопозитивів, зошитів із статичними малюнками, наборів штампів, фізичних моделей, стереометричних ящиків — учорашній день, за допомогою моделювання з елементами дослідницької діяльності — сьогоднішній. В. І. Арнольд зазначає: «Мягкое моделирование требует гармоничной работы обоих полушарий мозга... Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастию, системой. Выросли целые поколения профессиональных математиков и преподавателей математики, умеющих только это и не представляющих себе возможности какого-либо другого преподавания математики» [20]. «Меньше схоластики, меньше формализма, меньше жестких моделей, меньше опоры на левое полушарие мозга! Больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше мягких моделей, больше опоры на правое полушарие мозга» [21].

Нарешті, й у чинній програмі з математики зазначено: «Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення. Широке й системне застосування методу математичного моделювання протягом вивчення курсу математики може стати потужним засобом формування в учнів навички повсякденного користування математикою при вивченні природничих предметів».

Алгоритми побудов у СДГ — повчальні й цікаві для учнів. Віртуальні лінійка (відрізок, промінь, пряма) і циркулі (у фіксованій площині — коло, у просторі — сфера) дозволяють застосовувати всі класичні алгоритми задач на побудову.

Побудови — складова частина розв’язування. За допомогою методів паралельного проектування вони зводяться до плоского малюнка на площині, що відображає ракурс зображення просторового геометричного тіла. У разі необхідності його зміна потребує часу на уроці і тому рідко виконується. Виготовити фізичну тривимірну модель до кожної стереометричної задачі також неможливо. Окрім того, статичні моделі не дозволяють варіювати параметри, отже, не сприяють дослідженням. Динамічні малюнки, що легко й миттєво змінюються, створюють СДГ, середовища інтерактивного моделювання у віртуальному просторі, просторового конструювання. Кожний малюнок у ньому є фактично нескінченною множиною малюнків. Учень може зафіксувати той один, на якому він уявляє дану конфігурацію найкраще.

Найважливіше те, що малюнок у СДГ — це модель, яка зберігає не лише результат побудови, а також її алгоритм з усіма кроками, вихідними даними, залежностями між базовими об’єктами. Усі поточні побудови фіксуються й за необхідності легко редагуються. Будь-які зміни в необхідному масштабі й динаміці відображаються на дисплеї. Отже, роль малюнка зростає суттєво. Він стає не лише ілюстрацією у процесі розв’язування, а його важливою й невід’ємною частиною.

«Провідним принципом, який визначає структуру навчання математики за математичним та фізико-математичним профілями, є моделювання в навчальному процесі елементів діяльності фахівця-математика», — наголошується в програмі з математики. Вважаємо, що систематичне використання програмних засобів навчального призначення сформує в учнів навички їх застосування в процесі навчання у вузі, розширить математичний кругозір, познайомить з методами дослідження у відповідній галузі науки.

Наведемо практично значимі аспекти застосування СДГ Cabri 3D.

Детально моделювання стереометричних динамічних конфігурацій з досвіду викладання геометрії розглянуто в роботах [22; 23].

- ***Наочна демонстрація аксіом, означень, теорем, доведень***. Комп’ютерні моделі чудово виконують роль інтерпретаторів математичних тверджень. Говорячи, що означений кут між площинами не залежить від вибору січної площини, що міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута, доводячи задачу-теорему про об’єм похилої призми з виконанням паралельного перенесення її частини тощо, вчитель посилається або на статичні малюнки, або на уяву учнів. Засоби анімації, вбудовані в СДГ, дають можливість моделювати динаміку подібних процесів.

Учням варто наголосити, що в реальності ні точок, ні прямих, ні площин не існує. Узагалі, геометрія моделює і досліджує об’єкти в абстрактній формі. СДГ — це лише наочна й наближена комп’ютерна інтерпретація, яка перетворює стереометрію у красиву і «живу».

- ***Мимобіжні прямі***. Ми виділяємо цей пункт тому, що на площині вказані об’єкти не існують, підручники і збірники задач містять недостатню кількість задач із цієї теми. Учням важко даються задачі на знаходження кутів і відстаней між мимобіжними прямими. Експериментування з моделями навчає їх знаходити і будувати необхідні паралельні площини, спільний перпендикуляр. Вважаємо, що СДГ дозволяють розглядати мимобіжні прямі пропедевтично значно раніше десятого класу.

Задача 3. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, довжина ребра якого дорівнює a. Знайти довжини ребер тетраедра B_1ABD (2 бали). Для кожної пари мимобіжних його ребер вказати паралельні площини, які проходять через ці прямі або площину, що проходить через одну з них, паралельно до другої (3 бали). Знайти відстань між мимобіжними прямими першої (2 бали), другої (2 бали) і третьої пари (3 бали).

Подібні рівневі серії вправ доцільно пропонувати учням для розв’язування з використанням СДГ як навчальні. Шукані відстані: a, $a/\sqrt{2}$, $a/\sqrt{3}$ (рис. 3).

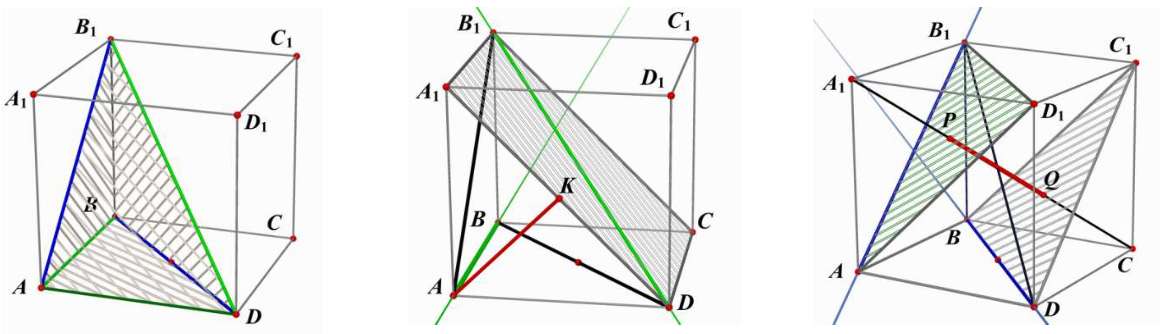

Рис. 3. Пари мимобіжних прямих: тетраедр у кубі

- ***Вимірювання у просторі***. У чинній програмі з математики зазначено: «Передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу … вимірює геометричні величини, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходить кількісні характеристики фігур (площі, об’єми)».

Зауважимо, що: а) за традиційного «безмашинного» навчання стереометрії вказані уміння взагалі не відпрацьовуються; б) Cabri 3D — потужний і високоточний розв’язувач задач на вимірювання (рис. 4).

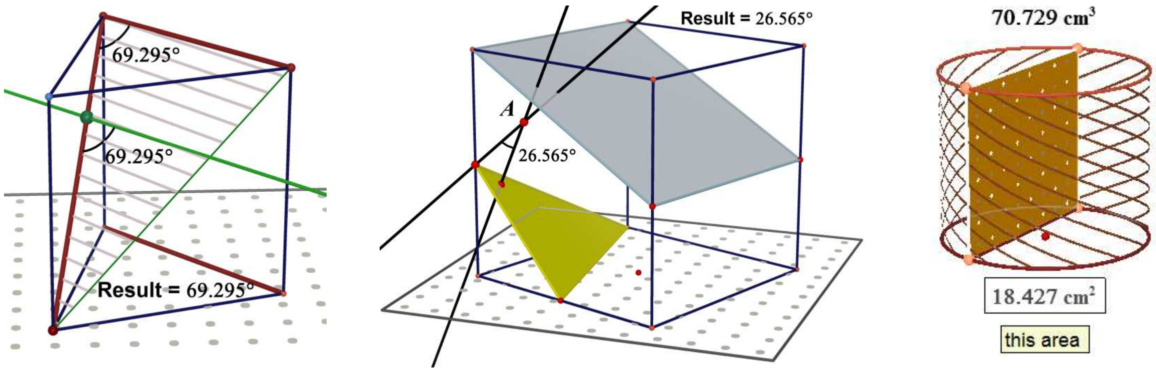

Рис. 4. Вимірювання у просторі

Задача 4. Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює стороні основи. Знайти величину кута між стороною основи й діагоналлю бічної грані, яка цю сторону не перетинає.

Побудувавши модель, виконуємо вимірювання (*Angle*). Наразі можна вибрати довільну точку на діагоналі, провести через неї паралельну пряму до прямої, що містить сторону основи й виміряти величину утвореного кута з вершиною в цій точці.

Задача 5. Знайти величину кута між площинами, виділеними на малюнку. Усі вершини трикутника і прямокутника є або вершинами куба, або серединами його ребер.

Кут між площинами дорівнює куту між перпендикулярними прямими, проведеними до цих площин. Вимірюємо величину кута з вершиною *A*, що утворився при перетині вказаних прямих.

Задача *6*. Знайти об’єм і площу перерізу циліндра.

Вбудованими засобами середовища вимірюємо об’єм циліндра (*Volume*) і площу прямокутника-перерізу (*Area*).

• ***Побудова перерізів***. Ця тема — одна з найсприятливіших для вступу до моделювання. Рисунки нижче ілюструють відому задачу побудови перерізу куба площиною, яка проходить через три точки, що належать попарно мимобіжним ребрам.

Cabri 3D дозволяє виконувати реальні перерізи (рис. 5) многогранників площиною (*Cut Polyhedron*), довільно маніпулювати многогранником (*Manipulation*), виконувати анімацію (*Animation*), автоматично і покроково відтворювати побудови (*Replay Construction*), додавати різні проекції для перегляду (*Document / Add View / Front*), відтворювати динамічні малюнки в Microsoft Word тощо.

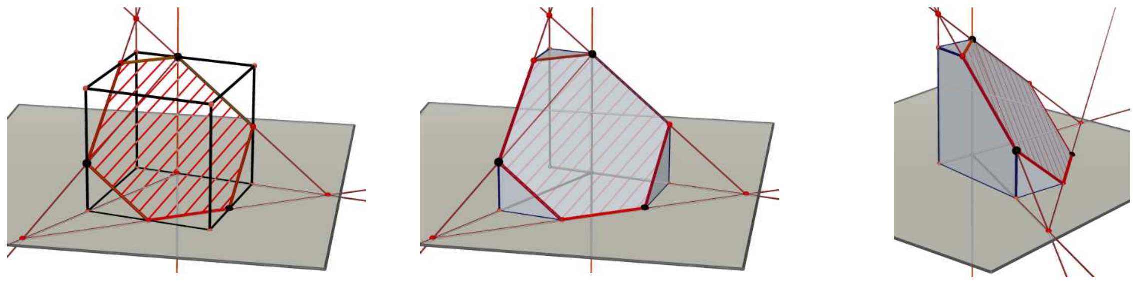

Рис. 5. Побудова перерізів

• ***Моделювання конфігурацій***. Моделювання може застосовуватись як ілюстративне (окремий вид навчальної діяльності) або поєднуватися з процесом розв’язування задачі [22]. Як правило, статичні моделі створюються для вимірювань. Динамічні й комбіновані моделі (деякі точки моделі залежні, а деякі — незалежні) створюються для подальших досліджень з варіюванням параметрів.

Наближені моделі-ілюстрації доцільно використовувати для демонстрації декількох розв’язків однієї задачі, складних багатофігурних комбінацій тощо.

Задача 7. Знайти двогранний кут при основі правильної чотирикутної піраміди, якщо радіус описаної навколо неї кулі в 3 рази більший від радіуса вписаної кулі.

Рухаючи незалежну вершину піраміди, спостерігаємо за значеннями даного відношення *a* і шуканого лінійного кута. Бачимо, що *a* двічі набуває значення 3 (рис. 6).

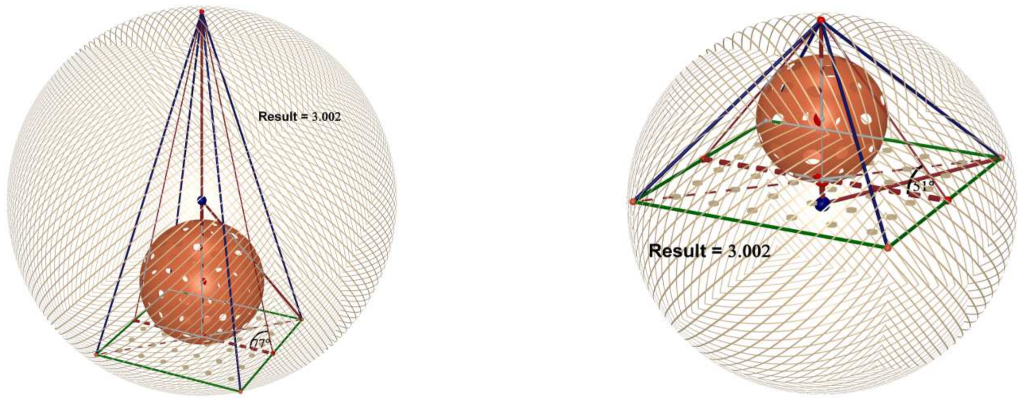

Рис. 6. Моделі-ілюстрації

Задача має два розв'язки. У другому випадку центр описаної кулі лежить поза пірамідою. Такі моделі можна створювати або демонструвати перед розв'язуванням з метою вивчення конфігурації і пошуку способу розв'язування. Після одержання відповіді цікаво створити точну модель або модель з точністю до подібності.

Узагалі, спектр моделей, з точку зору технологій їх застосування, дуже широкий. Обрати той чи інший тип моделі допоможе практика їх застосування.

Задача 8. Конус і циліндр мають спільну основу і спільну висоту. Усередині циліндра, але поза конусом, розміщені шість рівних куль, кожна з яких дотикається верхньої основи й бічної поверхні циліндра, двох сусідніх куль і бічної поверхні конуса. Радіус кожної кулі дорівнює r. Знайти радіус кулі, вписаної у конус.

Під час розв'язування складних задач на тіла обертання, як правило, не можна обмежитись одним планіметричним малюнком — осьовим перерізом конфігурації. Необхідно розглядати декілька перерізів відповідними площинами (рис. 7).

СДГ роблять наочними і доступнішими розв'язування таких задач.

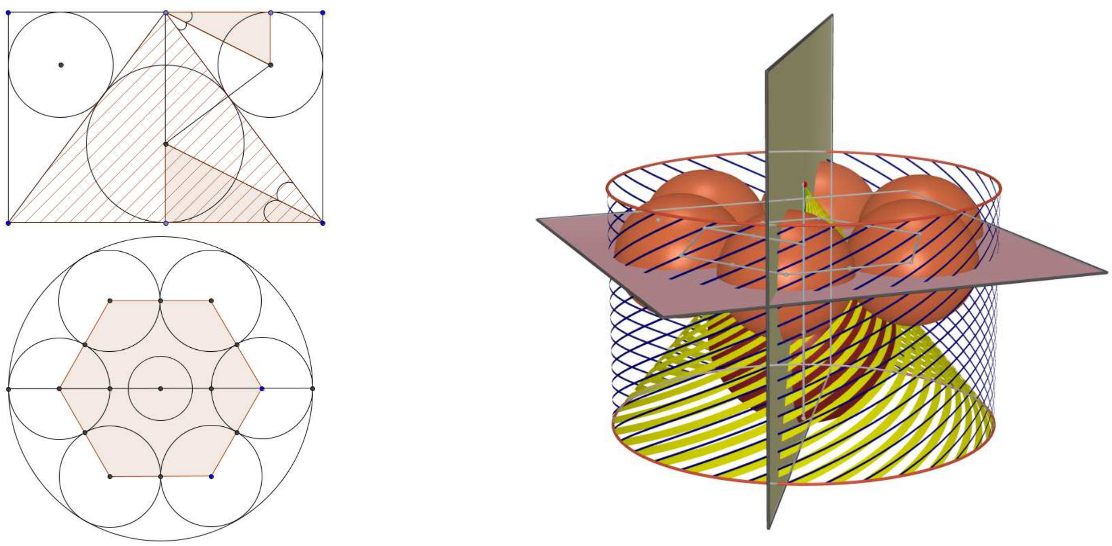

Рис. 7. Багатофігурні конфігурації

- ***Перевірка відповідей***. Аналіз і перевірка отриманої відповіді – обов'язковий етап розв'язування задачі.

Задача 9. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагональ бічної грані, протилежної цьому куту, дорівнює *a* й утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм призми.

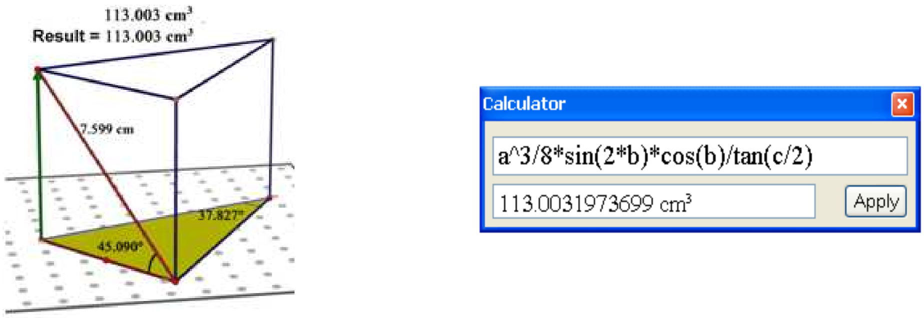

Рис. 7. Порівняння відповідей

Вираз-відповідь $\frac{a^3}{8}\sin 2\beta \cdot \cos\beta \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$ залежить від трьох аргументів-параметрів.

Щоб перевірити її за допомогою створеної динамічної моделі, достатньо виміряти об'єм призми засобами СДГ (*Volume*) й порівняти його з величиною, яка обчислюється за формулою за допомогою вбудованого калькулятора (*Calculator*). Зрозуміло, що виміряна й обчислена величини з великою точністю повинні співпадати (рис. 7).

• ***Конфігурації–каркаси***. Використання допоміжної фігури чи конфігурації-каркаса може спростити розв'язування задачі.

Задача 10. Пряма утворює зі сторонами прямого кута кути по 60°. Знайти величину кута між цією прямою і площиною прямого кута.

Допоміжна фігура-каркас існує неявно — правильний октаедр. Він містить конфігурацію, яка визначається вихідними даними задачі. Будуємо тіло (*Regular Octahedron*) і, вимірючи шуканий кут *MAC* (*Angle*), отримуємо величину 45° (рис. 8).

У Cabri 3D правильні многогранники — базові об'єкти. Їх можна швидко будувати, масштабувати, додавати розгортки (*Open Polyhedron, Add Net Page*). За допомогою останніх зручно виготовляти фізичні моделі правильних многогранників.

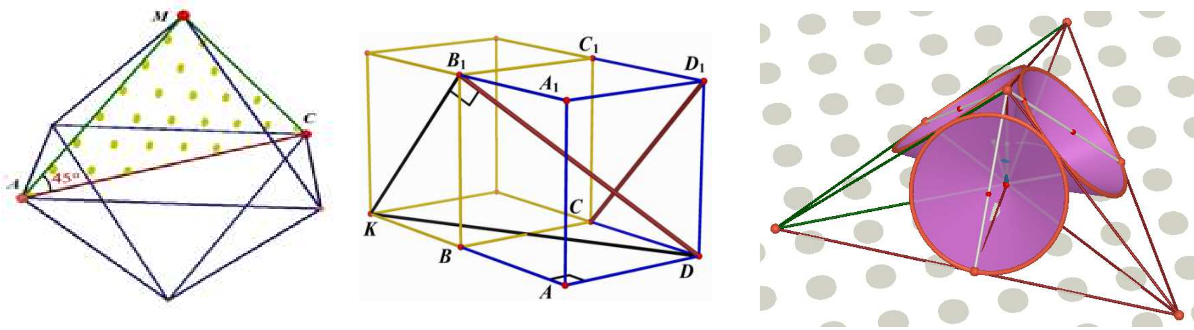

Рис. 8. Каркаси

Задача 11. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Довести, що $B_1D \perp D_1C$.

Розглядаючи допоміжну конфігурацію-каркас з двох кубів, легко переконуємося, що $\angle KB_1D = 90°$: $DK^2 = 5a^2$, $B_1D^2 = 3a^2$, $B_1K^2 = 2a^2$, де $AB = a$ (рис. 8).

Наведене розв'язування важливо порівняти з векторним.

Задача 12. Три рівних конуси мають спільну вершину, дотикаються однієї площини і попарно дотикаються між собою. Знайти кут в осьовому перерізі конуса.

Побудова підходящої конфігурації у цій складній задачі вимагає розвиненої просторової уяви. Кофігурація-каркас може складатись з трьох трикутних пірамід, що мають спільне бічне ребро, перпендикулярне до площини основи, яка є рівнобедреним трикутником з кутом 120°. У кожну з цих пірамід можна вписати конус, основа якого вписана у бічну грань піраміди, а вершина збігається з основою її висоти (рис. 8).

• ***Створення нових задач.*** Аналіз функціональних залежностей у процесі дослідження відповідних моделей сприяє створенню нових екстремальних задач.

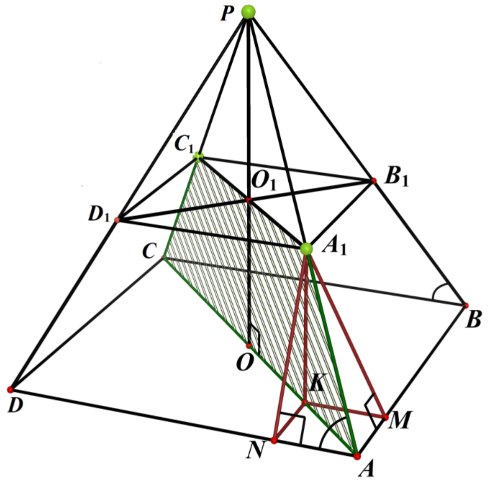

Рис. 9. Переріз

Задача 13. Бічне ребро правильної зрізаної чотирикутної піраміди і сторона меншої основи дорівнюють a. Кут між бічним ребром і стороною більшої основи дорівнює α. Знайти площу діагонального перерізу зрізаної піраміди.

У цій типовій задачі (№12.368 із збірника задач за редакцією М. І. Сканаві) вираз-відповідь $2a^2\cos^2\alpha/2\sqrt{-2\cos 2\alpha}$ для площі розглянемо як функцію від двох змінних $S(a, \alpha)$. Їх значення на динамічній моделі змінюватимемо при русі незалежних точок A_1 і P (рис. 9).

Тоді при фіксованому значенні величини кута α одержуємо множину подібних пірамід.

Якщо зафіксувати величину a, то при русі незалежної точки P по прямій OO_1 змінюватиметься лише α. $S(a, \alpha)$ перетвориться в функцію від однієї змінної. Можна помітити, що існує найбільше значення площі даного діагонального перерізу. Вимірюємо величини a, α, S при зафіксованому якомога точніше найбільшому значенні площі діагонального перерізу AA_1C_1C: $a \approx 6{,}10096$ см, $\alpha \approx 72{,}00185°$, $S \approx 61{,}97761$ см^2. Впевнимось за допомогою калькулятора, що і за формулою-відповіддю отримується таке саме значення (Result = 61.97761 см^2).

Виникає гіпотеза: площа діагонального перерізу зрізаної піраміди набуває найбільшого значення при $\alpha = 72°$.

Отже, у результаті моделювання й дослідження з обчислювальним експериментом сформулюємо нову екстремальну задачу.

Бічне ребро правильної чотирикутної зрізаної піраміди й сторона меншої її основи дорівнюють 1. Кут між бічним ребром і стороною більшої основи дорівнює α. Довести, що площа діагонального перерізу піраміди набуває найбільшого значення тоді, коли вершина її меншої основи ділить бічне ребро відповідної повної піраміди у відношенні золотого перерізу. Знайти найбільше значення площі цього перерізу.

4. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Педагогічна практика і проведені дослідження підтверджують високу ефективність застосування СДГ у навчанні стереометрії і їхній значний гуманітарний потенціал, пов'язаний з розвитком творчого мислення.

На часі створення комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання математики, системні дослідження з вивченням функціональних можливостей СДГ і супутніх педагогічних ризиків. Для молодших школярів середовища інтерактивного моделювання можуть сприяти побудові якісно нових, електронних пропедевтичних курсів геометрії, для старших — пошуку й удосконаленню способів розв'язування задач, розв’язуванню задач прикладного і практичного характеру, створенню і глибокому дослідженню відповідних математичних моделей.

Таблиця 1

Можливості СДГ і продуктивні підходи

Для учня	*Для вчителя*
Розвиток просторової уяви, образного мислення, посилення інтелектуальної діяльності	Підвищення продуктивності уроку, інтенсифікація навчальної діяльності
Динамізація об’єктів, цілісне неперервне сприйняття просторової конфігурації	Міжпредметні зв’язки алгебри і математичного аналізу, геометрії: функціональні залежності, геометричні перетворення
Автоматизація побудов і обчислень. Велика швидкість, потужність і точність обчислень	Моделювання багатофігурних конфігурацій, створення нових задач
Перевірка розв’язків задач, чисельні експерименти, інтерпретація результатів	Складання серій тестів, задач для самостійних і контрольних робіт
Алгебра у стереометрії: функціональні залежності, координати, рівняння (прямих, площин, сфери тощо), геометричні перетворення	Прикладна спрямованість уроку, теми, курсу. Удосконалення форм навчальної роботи: сприяння індивідуалізації і диференціації
Експериментальна перевірка гіпотез, конструювання контрприкладів, пошук нестандартних підходів до розв’язування і створення задач	Організація самостійної творчої роботи учнів на уроці і вдома
Розв’язування багатьох задач без повного знання відповідного аналітичного апарату і методів — «математика для всіх»	Освітнє середовище з елементами навчально-дослідницької діяльності, наближення до методології відповідної галузі науки

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Раков С. А. Вивчення геометрії на основі дослідницького підходу з використанням пакета динамічної геометрії DG / С. А. Раков // Математика в школі. — 2005. — № 7. — С. 2–9.
2. Зеленяк О. П. Інтегровані уроки з математики та інформатики в класах з поглибленим вивченням цих предметів / О. П. Зеленяк // Комп’ютер у школі та сім’ї. — 2006. — № — С. 16–18.
3. Зеленяк О. П. Математические «способности» веб-сервиса Wolfram Alpha / О. П. Зеленяк // Математика. Все для учителя! — М. : ООО ИГ Основа. — 2012. — № 9 [21]. — С. 32–38.
4. Ракута В. М. Система динамічної математики GeoGebra як інноваційний засіб для вивчення математики / В. М. Ракута // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2012. — № 4 (30) [Електронний ресурс]. — Режим доступу до журналу : http://www.journal.iitta.gov.ua.
5. Биков В. Ю. ІКТ-аутсорсінг і нові функції ІКТ-підрозділів навчальних закладів і наукових установ / В. Ю. Биков// Інформаційні технології і засоби навчання. — 2012. — № 4 (30). [Електронний ресурс]. — Режим доступу до журналу : http://www.journal.iitta.gov.ua.
6. Жалдак М.І. Проблеми інформатизації навчального процесу в середніх і вищих навчальних закладах / М. І. Жалдак // Комп’ютер у школі та сім’ї. — 2013. — №3. — С.8-15.
7. Жалдак М. І. Математика з комп’ютером : посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. — К., 2009. — 280 с.
8. Жук Ю. О. Діалектика педагогічного знання в умовах комп’ютерно орієнтованого процесу навчання / Ю. О. Жук // Комп’ютер у школі та сім’ї. — 2011. — № 4. — С. 3–6.
9. Жук Ю. О. Особистісний простір учня в комп’ютерно-орієнтованому навчальному середовищі / Ю. О. Жук // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2012. — № 3 (29) [Електронний ресурс]. — Режим доступу до журналу : http://www.journal.iitta.gov.ua.
10. Спірін О. М. Критерії і показники якості інформаційно-комунікаційних технологій навчання / О. М. Спірін // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2013. — № 1 (33). [Електронний ресурс]. — Режим доступу до журналу : http://journal.iitta.gov.ua.
11. Жалдак М. І. Використання комп’ютера в навчальному процесі має бути педагогічно виваженим і доцільним / М. І. Жалдак // Комп’ютер у школі та сім’ї. — 2011. — № 3. — С. 3–12.

12. Зеленяк О. П. Компьютерное моделирование в геометрии / О. П. Зеленяк // Информатика и образование. — 2007. — № 5. — С. 40–50 ; № 6. — С. 114–119 ; № 7. — С. 47–55.
13. Зеленяк О. П. Моделювання динамічної геометричної конфігурації / О. П. Зеленяк // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2012. — № 4. — С. 33–40.
14. Шарыгин И. Ф. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. / И. Ф. Шарыгин. — М. : Дрофа, 1999. — 300 с.
15. Зеленяк О. П. Технології розв'язування геометричних задач / О. П. Зеленяк // Наукові записки. Серія: математичні науки. Випуск 71. — Кіровоград : КДПУ ім. В. Винниченка, 2012. — С. 27–46.
16. Панченко Н. Геометрія як джерело функціональних залежностей / Н. Панченко // Математика в школі. — 2003. — № 8. — С. 33–36.
17. Зеленяк О. П. Динаміка геометричних конфігурацій / О. П. Зеленяк // У світі математики. Національний університет ім. Т. Шевченка. — Т. 18, вип. 1. — К. : ТвіМС. — 2012. — С. 18–27.
18. Зеленяк О. П. Динамічна геометрична конфігурація / О. П. Зеленяк // Математика в сучасній школі. — К., 2012. — № 9. — С.22-28.
19. Зеленяк О.П. Динамическая геометрическая конфигурация // Математика. Все для учителя! —М.: ООО ИГ Основа. — 2012. — № 11 [23]. — С. 10–17.
20. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. —М. : МЦНМО, 2004. — 32 с.
21. Саранцев Г. И. Методические основы школьного учебника математики / Г. И. Саранцев // Педагогика. — 2003. — № 10.
22. Зеленяк О.П. Розв'язування стереометричних задач: плюс моделювання // Математика в школах України. — 2012. — №34-36 (370-372). — С. 10-23.
23. Зеленяк О. П. Розв'язування стереометричних задач: допоміжна конфігурація / О. П. Зеленяк // Математика в школах України. — 2012. — № 34–36 (370–372). — С. 24–34.
24. Зеленяк О. П. Практикум программирования на Turbo Pascal. Задачи, алгоритмы и решения / О. П. Зеленяк. — [3-е изд., испр. и доп]. — СПб. : ДиаСофтЮП, М. : ДМК Пресс, 2007. — 320 с.
25. Зеленяк О.П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal / О. П. Зеленяк. — СПб.: ДиаСофтЮП, М. : ДМК Пресс, 2008. — 330 с.

Матеріал надійшов до редакції 28.06.2013 р.

ТЕХНОЛОГИИ ПРИМЕНЕНИЯ СРЕД ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Зеленяк Олег Петрович
кандидат педагогических наук, учитель математики и информатики
Александрийский коллегиум, г. Александрия, Украина
zlnk@ukr.net

Аннотация. В статье рассмотрены отдельные проблемы и технологии обучения геометрии с применением динамических сред учащихся классов с углубленным и профильным изучением математики. Интегрированное применение знаний по геометрии, информатике, алгебре и математическому анализу способствует реализации межпредметных связей и знакомит учащихся с элементами исследовательского подхода. Отмечена актуальность создания компьютерно ориентированных технологий обучения математике, внесения соответствующих изменений в учебные программы и пособия, проведения системных исследований эффективности их применения с учетом педагогических рисков.

Ключевые слова: компьютерно ориентированные технологии; среды динамической геометрии; моделирование; геометрическая конфигурация; межпредметные связи; исследовательский подход.

TECHNOLOGIES OF APPLICATION OF DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENTS

Oleg P. Zeleniak
PhD (pedagogical sciences), teacher of mathematics and computer science
Oleksandriia Collegium, Oleksandriia, Ukraine
zlnk@ukr.net

Abstract. The paper considers some problems and technologies of teaching geometry using dynamic geometry environments to students of advanced classes and specialized study of mathematics. Integrated application of knowledge of geometry, algebra and mathematical analysis and computer science provides implementation of intersubject relations and introduces to students the elements of the research approach. The author emphasizes the urgency of creating computer-oriented technologies in teaching mathematics, making appropriate amendments to the curriculum and textbooks, conducting systematic research of the effectiveness of their application considering educational risks.

Keywords: computer-oriented technologies; environment of dynamic geometry; modeling; geometric configuration; intersubject relations; the research approach.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Rakov S. A. The study of geometry on the research based approach using the dynamic geometry package DG // Matematyka v shkoli. — 2005. — № 7. — P. 2– . (in Ukrainian)
2. Zeleniak O. P. Integrated math and computer science lessons in advanced math and science classes // Kompiuter u shkoli ta simi. — 2006. —№ 4. — P. 16–18. (in Ukrainian)
3. Zeleniak O. P. Mathematical «abilities» of the Web Service Wolfram Alpha // Matematika. Vse dlja uchitelja! — M. : OOO IG Osnova. — 2012. — № 9 [21]. — P. 32–38. (in Russian)
4. Rakuta V. M. GeoGebra dynamic mathematics system as innovative tool for the study of mathematics [online] // Informatsiini tekhnolohii i zasoby navchannia. — 2012. — № 4 (30). Available from : http://www.journal.iitta.gov.ua. (in Ukrainian)
5. Bykov V. Yu. ICT-outsourcing and new functions of ICT-departments of educational and scientifical institutions [online] // Informatsiini tekhnolohii i zasoby navchannia. — 2012. — № 4 (30). Available from : http://www.journal.iitta.gov.ua. (in Ukrainian)
6. Zhaldak M. I. Problems of Informatization of the educational process in secondary and higher education // Kompiuter u shkoli ta simi. — 2013. — № 3. — P. 8–15. (in Ukrainian)
7. Zhaldak M. I., Horoshko Yu. V., Vinnychenko Ye. F. Mathematics with computer. Posibnyk dlia vchyteliv. — К., 2009. — 280 p. (in Ukrainian)
8. Zhuk Yu. O. Dialectics of pedagogical knowledge in a computer-based learning process // Kompiuter u shkoli ta simi. — 2011. — № 4. — P. 3–6. (in Ukrainian)
9. Zhuk Yu. O. Personal space of student in computer-oriented learning environment [online] // Informatsiini tekhnolohii i zasoby navchannia. — 2012. — № 3 (29). Available from : http://www.journal.iitta.gov.ua. (in Ukrainian)
10. Spirin O. M. Criteria and quality indicators of information and communication technologies of learning [online] // Informatsiini tekhnolohii i zasoby navchannia. — 2013. — № 1 (33). Available from : http://www.journal.iitta.gov.ua. (in Ukrainian)
11. Zhaldak M. I. Use of the computer in the classroom must be pedagogically-mentally weighed and appropriate // Kompiuter u shkoli ta simi. — 2011. — № 3. — P. 3–12. (in Ukrainian)
12. Zeleniak O. P. Computer modeling in geometry // Informatika i obrazovanie. — 2007. — № 5. — P. 40-50. (in Russian)
13. Zeleniak O. P. Modeling Dynamic geometric configuration // Kompiuter u shkoli ta simi. — 2012. — № 4. — P. 33–40. (in Ukrainian)
14. Sharygin I. F. 2200 problems in geometry for students and university entrants. / I. F. Sharygin. — M. : Drofa, 1999. — 300 p. (in Russian)
15. Zeleniak O. P. Technologies for solving geometric problems // Naukovi zapysky. Ceriia: matematychni nauky. Vypusk 71. — Kirovohrad : KDPU im. V.Vynnychenka, 2012. — P. 27–46. (in Ukrainian)

16. Panchenko N. P. Geometry as a source of functional dependencies // Matematyka v shkoli. — 2003. — № 8. — P. 33–36. (in Ukrainian)
17. Zeleniak O. P. Dynamics of geometric configurations // U sviti matematyky. Natsionalnyi universytet im. T. Shevchenka. Tom 18, vypusk 1. — Kyiv : TviMS. — 2012. — P. 18–27. (in Ukrainian)
18. Zeleniak O. P. Dynamic geometric configuration // Matematyka v suchasnii shkoli. — K., 2012. — № 9. — P. 22–28. (in Ukrainian)
19. Zeleniak O. P. Dynamic geometric configuration // Matematika. Vse dlja uchitelja! — M. : OOO IG Osnova. — 2012. — № 11 [23]. — P. 10–17. (in Russian)
20. Arnol'd V. I. «Hard» and «soft» mathematical models. — M. : MCNMO, 2004. — 32 c. (in Russian)
21. Sarancev G. I. Mathematical foundations of mathematics textbook // Pedagogika. — 2003. — № 10. (in Russian)
22. Zeleniak O. P. Solving stereometric problems: plus modeling // Matematyka v shkolakh Ukrainy. — 2012. — № 34–36 (370–372). — P. 10–23. (in Ukrainian)
23. Zeleniak O. P. Solving stereometric problems: support configuration // Matematyka v shkolakh Ukrainy. — 2012. — № 34–36 (370–372). — P. 23–34. (in Ukrainian)
24. Zeleniak O. P. Workshop on Programming in Turbo Pascal. Problems, algorithms and solutions. — 3-e izdanie, ispr. i dop. — SPb. : DiaSoftJuP, M. : DMK Press, 2007. — 320 p. (in Russian)
25. Zeleniak O. P. Solving the plane geometry problems. Technology of an algorithmic approach and basic problems. Modeling in Turbo Pascal environment. — SPb. : DiaSoftJuP, M. : DMK Press, 2008. — 330 p. (in Russian)