

УДК 378.147

**Бабенко Микола Іванович**

кандидат технічних наук, заслужений вчитель України, директор фізико-технічного ліцею Херсонський національний технічний університет, м. Херсон, Україна

## ВИКОРИСТАННЯ АЛГОРИТМУ ЕЙЛЕРА-КРОМЕРА ДЛЯ АНАЛІЗУ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

**Анотація.** Особливо актуальними нині є процеси впровадження у систему викладання фізики новітніх комп'ютерних та інформаційних технологій, що сприяють створенню умов для візуалізації та аналізу складних фізичних процесів. У статті розглядаються питання застосування алгоритму Ейлера-Кромера для моделювання фізичних процесів різноманітної природи. У якості прикладу представлені дослідження руху тіла у однорідному полі тяжіння з урахуванням сили опору повітря, побудовані графіки залежності досліджуваних величин від часу при різних значеннях коефіцієнту опору повітря. Аналіз побудованих залежностей сприяє глибокому розумінню фізичних процесів, що пов'язані з особливостями руху тіла у полі тяжіння при різних зовнішніх умовах.

**Ключевые слова:** алгоритм Ейлера-Кромера; моделювання фізичних процесів; рух тіла.

### 1. ВСТУП

**Постановка проблеми.** В умовах переходу системи освіти України на новий більш якісний рівень високу актуальність набувають процеси впровадження у систему викладання фізики новітніх комп'ютерних та інформаційних технологій, що сприяє створенню умов для візуалізації та аналізу складних фізичних процесів. Візуалізація протікання фізичних процесів при різноманітних параметрах фізичної системи, дослідження характеру протікання фізичного процесу при різних параметрах системи, знаходження оптимальних умов функціонування фізичної системи з використанням комп'ютерного моделювання сприяє глибокому розумінню фізичної природи того або іншого процесу, що в подальшому сприяє ефективному використанню того або іншого процесу у практиці та у виробництві.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Питанням комп'ютерного моделювання фізичних процесів присвячені роботи [1-5]. Авторами розглянуті різноманітні фізичні процеси, показаний підхід до побудови комп'ютерних моделей з використанням різних мов програмування. Але слід зазначити, що з розвитком комп'ютерних та інформаційних технологій створюються умови для створення та побудови більш сучасних платформ для аналізу фізичних процесів. У роботі [6] автором представлені розробки по використанню системи MATLAB для аналізу коливальних процесів, побудовані графіки зміни різних фізичних величин при коливаннях при різних параметрах коливальної системи, що без сумніву сприяє більш глибокому розумінню природи протікання досліджуваних явищ. В умовах переходу системи освіти України на новий більш якісний рівень високу актуальність набувають процеси впровадження у систему викладання фізики новітніх комп'ютерних та інформаційних технологій, що сприяє створенню умов для візуалізації та аналізу складних фізичних процесів. Візуалізація протікання фізичних процесів при різноманітних параметрах фізичної системи, дослідження характеру протікання фізичного процесу при різних параметрах системи, знаходження оптимальних умов функціонування фізичної системи з використанням комп'ютерного моделювання сприяє глибокому розумінню фізичної природи того або іншого процесу, що в

подальшому сприяє ефективному використанню того або іншого процесу у практиці та у виробництві.

Питанням комп'ютерного моделювання фізичних процесів присвячені роботи [1-5]. Авторами розглянуті різноманітні фізичні процеси, показаний підхід до побудови комп'ютерних моделей з використанням різних мов програмування. Але слід зазначити, що з розвитком комп'ютерних та інформаційних технологій створюються умови для створення та побудови більш сучасних платформ для аналізу фізичних процесів. У роботі [6] автором представлені розробки по використанню системи MATLAB для аналізу коливальних процесів, побудовані графіки зміни різних фізичних величин при коливаннях при різних параметрах коливальної системи, що без сумніву сприяє більш глибокому розумінню природи протікання досліджуваних явищ.

**Метою статті** є створення та дослідження математичної моделі руху тіла у однорідному полі тяжіння з урахуванням опору повітря з використанням алгоритму Ейлера-Кромера.

## 2. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Математичне моделювання – процес встановлення відповідності даному реальному об'єкту деякого математичного об'єкта, званого математичною моделлю, і дослідження цієї моделі, що дозволяє отримувати характеристики розглянутого реального об'єкта. Вид математичної моделі залежить як від природи реального об'єкта, так і задач дослідження об'єкта і необхідної достовірності і точності вирішення цієї задачі. Будь-яка математична модель, як і всяка інша, описує реальний об'єкт лише з деяким ступенем наближення до дійсності. У загальному вигляді будь-яка математична модель може бути представлена формулою:

$$Y=F(x_1,x_2,\dots,x_n) \quad (1)$$

де  $Y$  – вихідний параметр моделі;  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  – вхідні параметри моделі;  $F$  – задає залежність між вхідними і вихідними параметрами.

Структурна схема моделі представлена на рис.1. Побудова математичної моделі ділиться на такі етапи:

1. Постановка та дослідження задачі, для якої застосовується модель.
2. Визначити вхідні та вихідні параметри моделі.
3. Визначити характер взаємозалежності між вхідними та вихідними параметрами.
4. Установити аналітичну формулу залежності між вихідними та вхідними параметрами.
5. Установити параметри моделі та дослідити роботу побудованої моделі у всьому діапазоні відомих значень.
6. Побудувати графіки та діаграми отриманих залежностей і проаналізувати результати.



Рис. 1. Структурна схема моделі.

Аналіз характеру протікання реальних процесів не завжди дає можливість встановити аналітичну формулу залежності між вхідними та вихідними параметрами. Тому у цих випадках ефективними є методи, що засновані на ітераційному підході. Одним з таких методів є метод, що заснований на використанні алгоритму Ейлера-Кромера.

Алгоритм Ейлера-Кромера є типовим алгоритмом розв'язування систем диференціальних рівнянь. Нехай швидкість зміни функції у визначається формулою:

$$f = \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

а прискорення зміни цієї функції:

$$g = \frac{df}{dx} \quad (2)$$

У відповідності з алгоритмом Ейлера-Кромера формули (1) і (2) представлені наступним чином:

$$y_{n+1} = y_n + f_{n+1} \cdot \Delta x \quad (3)$$

$$f_{n+1} = f_n + g_n \cdot \Delta x \quad (4)$$

Таким чином, використання алгоритму передбачає виконання наступних кроків:

1. Задати початкові умови, тобто задати значення  $f_0$ ,  $y_0$  та розрахувати або задати значення функції  $g_0$  на нульовому кроці.
2. Задати крок зміни параметрів  $\Delta x$ , що розраховуються у відповідності з рівняннями (3) і (4).
3. Розрахувати значення функції  $f$  на першому кроці ( $f_1$ ).
4. Розрахувати значення функції  $y$  на першому кроці ( $y_1$ ).
5. Розрахувати значення функції  $g$  на першому кроці ( $g_1$ ).
6. Повторити пункти 3, 4, 5 для наступних кроків.

Розглянемо приклад використання алгоритму Ейлера-Кромера для дослідження руху тіла, кинутого під кутом до горизонту з поверхні землі з урахуванням опору повітря. Графік траєкторії руху у даному випадку та розподіл проекцій сил, що діють на тіло під час польоту представлений на рисунку (2). Будемо вважати, що сила опору повітря пропорційна другій ступені швидкості тіла. У відповідності з другим законом Ньютона проекції прискорення тіла на відповідні вісі на  $n$ -му кроці дорівнюють:

$$a_{xn} = -\frac{1}{m} (k \cdot v_{xn}^2) \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_{yn} = \frac{1}{m} (mg + kv_{yn}^2), v_{yn} > 0; \\ a_{yn} = \frac{1}{m} (mg - kv_{yn}^2), v_{yn} < 0 \end{cases} \quad (7)$$

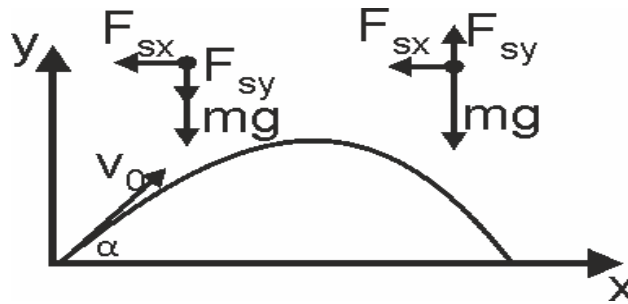


Рис. 2. Траєкторія руху тіла у однорідному полі тяжіння

Тоді у відповідності з алгоритмом Ейлера-Кромера проєкції швидкості та відповідні координати на визначаються за формулами:

$$\begin{cases} v_{x(n+1)} = v_{xn} + a_{xn} \Delta t, \\ v_{y(n+1)} = v_{yn} + a_{yn} \Delta t \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + v_{x(n+1)} \Delta t, \\ y_{n+1} = y_n + v_{y(n+1)} \Delta t \end{cases} \quad (9)$$

Крок зміни часу руху тіла визначимо з умови збереження повної механічної енергії при відсутності опору повітря. Швидкість тіла у будь який момент часу визначається за теоремою Піфагора:

$$v_n = \sqrt{v_{xn}^2 + v_{yn}^2} \quad (10)$$

Тоді за умовою, що нульовий рівень підрахунку потенційної енергії обрати у точці борсання, повна механічна енергія на n-му кроці дорівнює:

$$W_n = \frac{mv_n^2}{2} + mgy_n \quad (11)$$

і відносну зміну повної механічної енергії у залежності від кроку можна знайти за формулою:

$$\left(\frac{\Delta W}{W}\right)_n = \frac{W_{n+1} - W_n}{W_n} \cdot 100\% \quad (12)$$

Вочевидь, що у ідеальному випадку повна механічна енергія повинна зберігатися, але при розрахунку параметрів за допомогою алгоритму Ейлера-Кромера виникає похибка розрахунку, яка визначається кроком зміни часу  $\Delta t$ . Чим менший крок ми обираємо, тим точніше будуть розраховані відповідні параметри, але час роботи алгоритму буде зростати. Тому крок зміни часу у кожному випадку вибирається емпіричним шляхом у залежності від вимогам до точності розрахунків у відповідності до формули (12).

Задамо сталі параметри та початкові умови нашої моделі. Нехай маса тіла  $m = 1 \text{ кг}$ , Початкова швидкість тіла  $v_0 = 40 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  і спрямована під кутом  $\alpha = 50^\circ$  до горизонту. Графіки відносної зміни повної механічної енергії при русі тіла протягом 10 с з кроками зміни часу 0,1с, 0,05с, 0,01с та 0,005с представлені на рисунку 3.

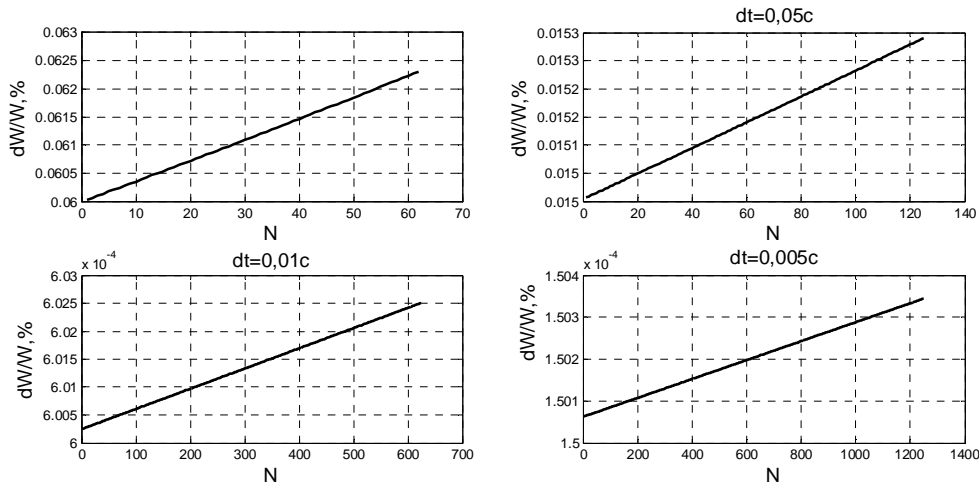


Рис.3. Графіки залежності відносної зміни повної механічної енергії від кроку при різних значеннях кроку часу

Аналіз графіків дозволяє обрати крок зміни часу для знаходження оптимального співвідношення точності і часу розрахунків. Графіки залежності проекцій швидкості на відповідні вісі, модуля швидкості та траекторія руху тіла при відсутності опору повітря представлені на рисунку 4.

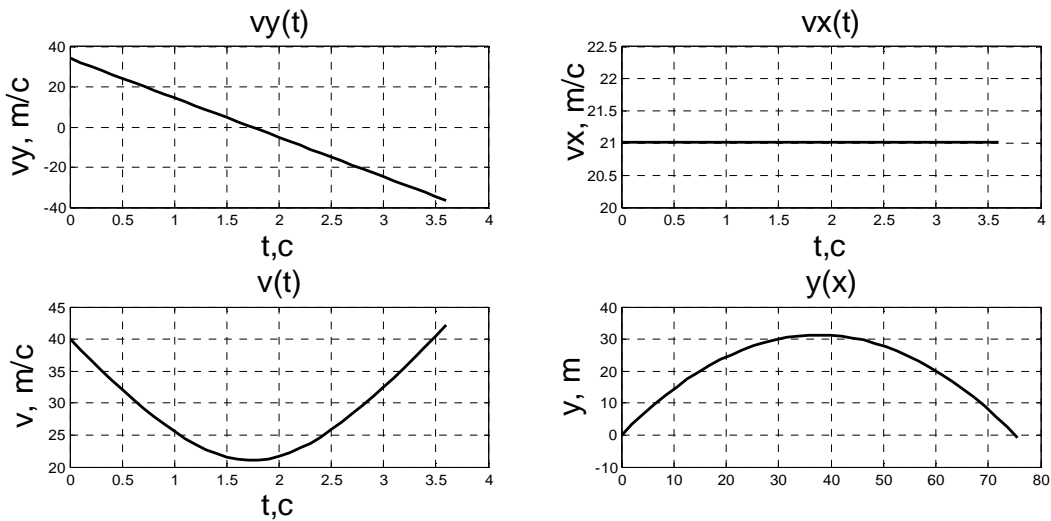


Рис. 4. Графіки залежності проекцій швидкості, модуля швидкості від часу графік траекторії при відсутності опору повітря

Аналогічні графіки при коефіцієнтах опору 0,01, 0,05 та 0,1 представлені на рисунках 5,6 та 7. На рисунку 8 представлені графіки залежності максимальної дальності польоту від кута кидання.

Аналіз графіків дозволяє дослідити характер зміни кінематичних характеристик при різних зовнішніх умовах руху тіла та визначити оптимальні початкові умови, при яких рух тіла буде відповідати бажаному. У даному випадку аналіз графіків, представлених на рисунку 8 дозволяє зробити висновок, що зі зростанням коефіцієнта опору повітря кут кидання, при якому дальність польоту досягає максимального значення, зменшується, що аналітично показати досить складно.

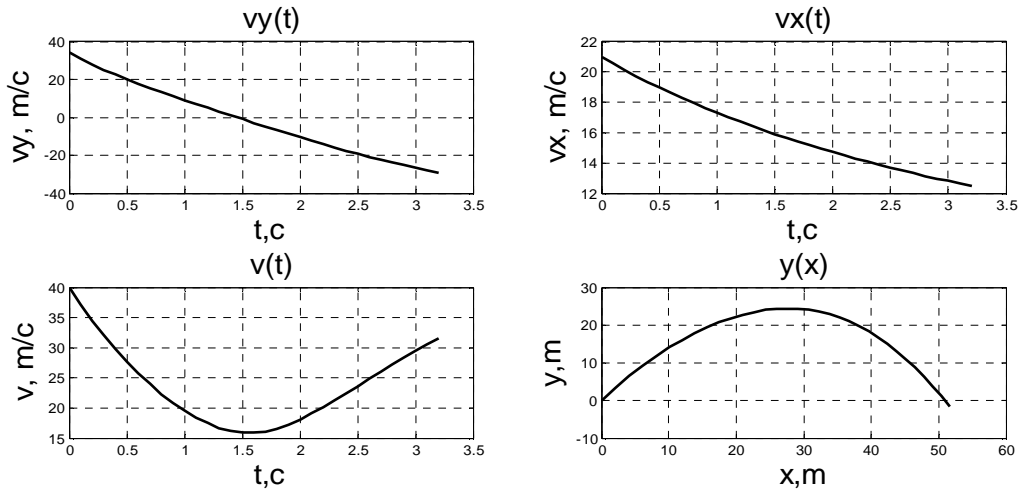


Рис. 5. Графіки залежності проекцій швидкості, модуля швидкості від часу графік траєкторії при коефіцієнті опору повітря 0,01

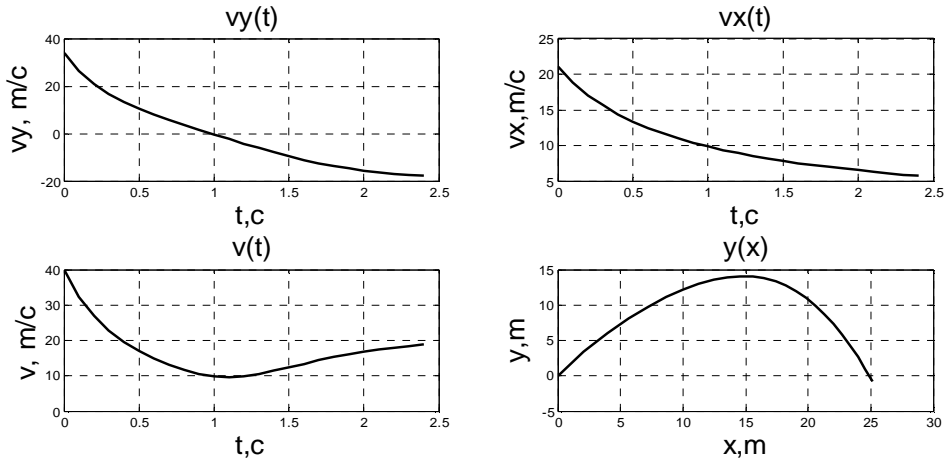


Рис. 6. Графіки залежності проекцій швидкості, модуля швидкості від часу графік траєкторії при коефіцієнті опору повітря 0,05

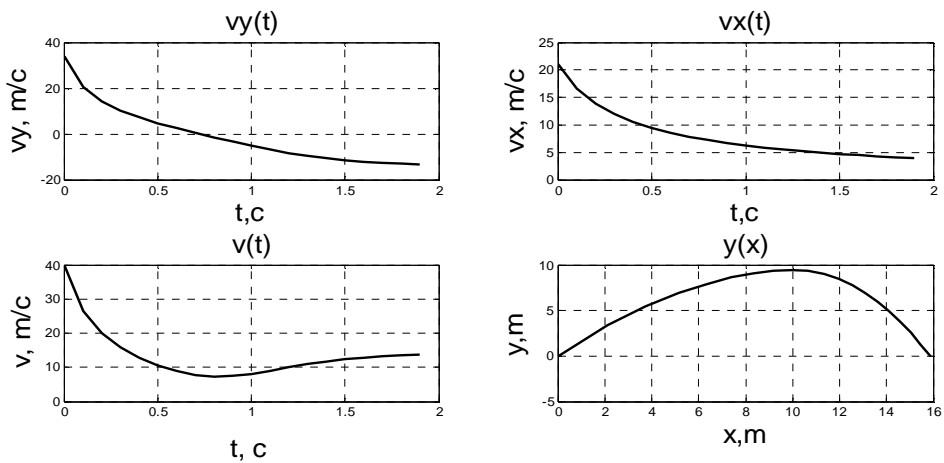


Рис. 7. Графіки залежності проекцій швидкості, модуля швидкості від часу графік траєкторії при коефіцієнті опору повітря 0,1

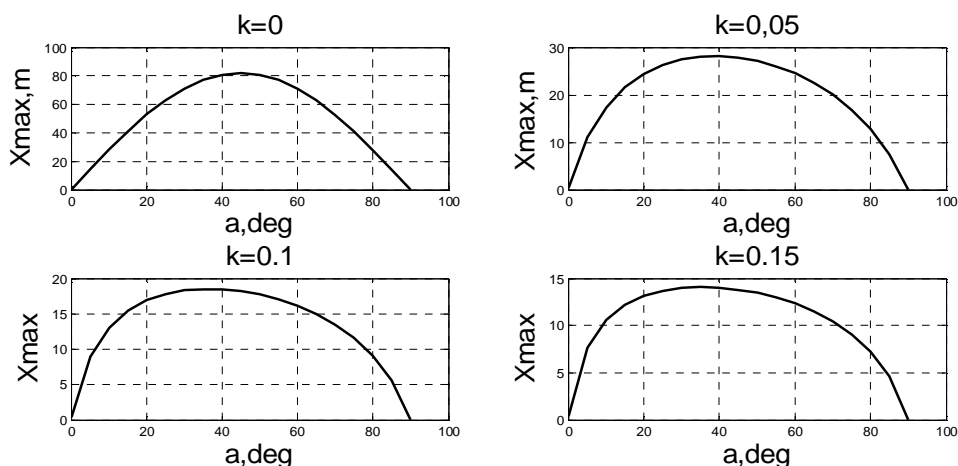


Рис.8. Графіки залежності максимальної дальності польоту від кута кидання при різних коефіцієнтах опору повітря

### 3. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Питанням математичного моделювання фізичних процесів різноманітної природи у сучасний час приділяється досить велика увага. У освітній галузі, в умовах обмеженого фінансування, математичне моделювання досліджуваних процесів сприяє глибокому розумінню характеру протікання цих процесів та причин, що обумовлюють ті або інші зміни. У статті представлено математична модель руху тіла у однорідному полі тяжіння, параметри якої розраховувалися за допомогою алгоритму Ейлера-Кромера. Для обрання кроку зміни часу запропоновано використовувати критерій відносної зміни повної механічної енергії, апріорне завдання якого дозволяє знайти оптимальне співвідношення точності визначення параметрів і часу їх розрахунку. У процесі моделювання побудовано графіки залежності кінематичних величин від часу при різних значеннях коефіцієнту опору середовища, також побудовано графіки траєкторії руху тіла та графіки залежності максимальної дальності льоту тіла від кута кидання. Аналіз побудованих залежностей сприяє глибокому розумінню фізичних процесів, що пов'язані з особливостями руху тіла у полі тяжіння при різних зовнішніх умовах. Перспективами подальших досліджень автора є створення математичних моделей динамічних фізичних процесів у інших галузях фізики та впровадження цих моделей у сучасний освітній процес.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Поршнев С.В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием MATLAB. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 592с.
2. Коробейников А.Г. Разработка и анализ математических моделей с использованием MATLAB и MAPLE: Учебное пособие / Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики. СПб, 2010. – 144с.
3. Зарубин В.С. Компьютерное моделирование в технике. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003. – 496с.
4. Гулд Х., Тобачник Я. Компьютерное моделирование в физике. – М.: Мир, 2000. – т. 1. – 321 с.
5. Гулд Х., Тобачник Я. Компьютерное моделирование в физике. – М.: Мир, 2000. – т. 2. – 390 с.
6. Бабенко М.І. Методи комп'ютерного моделювання при розв'язуванні фізичних задач в курсі фізики вищої та середньої школи // Збірник наукових праць «Інформаційні технології в освіті» // м. Херсон. – №17. – С.77-81

Матеріал поступил в редакцию 07.01.2014 г.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА ЭЙЛЕРА-КРОМЕРА ДЛЯ АНАЛИЗА ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

**Бабенко Николай Иванович**

кандидат технических наук, заслуженный учитель Украины, директор физико-технического лицея, Херсонский национальный технический университет, г. Херсон, Украина

**Анотация.** Особенно актуальными ныне являются процессы внедрения в систему преподавания физики новейших компьютерных и информационных технологий, способствующих созданию условий для визуализации и анализа сложных физических процессов. В статье рассматриваются вопросы применения алгоритма Эйлера-Кромера для моделирования физических процессов различной природы. В качестве примера представлены исследования движения тела в однородном поле тяжести с учетом силы сопротивления воздуха, построены графики зависимости исследуемых величин от времени при различных значениях коэффициента сопротивления воздуха. Анализ построенных зависимостей способствует глубокому пониманию физических процессов, связанных с особенностями движения тела в поле тяжести при различных внешних условиях.

**Ключевые слова:** алгоритм Эйлера-Кромера; моделирование физических процессов; движение тела.

## USING THE EULER-CROMER ALGORITHM FOR ANALYSIS OF PHYSICAL PROCESSES

**Mykola I. Babenko**

PhD (technical sciences), Honored Teacher of Ukraine, Director of Physical and Technical Lyceum Kherson National Technical University, Kherson, Ukraine

**Abstract.** Particularly topical today there are the processes of implementing the latest computer and information technologies into the teaching of physics, promoting the creation of conditions for the visualization and analysis of complex physical processes. In the article the questions of application of the Euler-Cromer algorithm for modeling of physical processes of different nature are examined. As an example, studies of the motion of the body in the gravitational field with air resistance are presented, dependency diagrams of the studied values on time for different values of the coefficient air resistance are constructed. Analysis of the constructed dependency contributes to understanding the physical processes associated with the peculiarities of the body motion in the gravitational field at different ambient conditions.

**Keywords:** Euler-Cromer algorithm; modeling of physical processes; the movement of the body.

## REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Porshnev S.V. Computer simulation of physical processes with using MATLAB. – M.: Gorjachaja linija – Telekom, 2003. – 592s. (in Russian)
2. Korobejnikov A.G. Development and analysis of mathematical models using MATLAB and MAPLE: Uchebnoe posobie / Sankt-Peterburgskij gosudarstvennyj universitet informacionnyx texnologij, mexaniki i optiki. SPb, 2010. – 144s. (in Russian)
3. Zarubin V.S. Computer modeling in engineering. – M.: Izd-vo MGTU im. N.E.Baumana, 2003. – 496s. (in Russian)
4. Guld X., Tobachnik Ja. Computer modeling in physics. – M.: Mir, 2000. – t. 1. – 321 s. (in Russian)
5. Guld X., Tobachnik Ja. Computer modeling in physics. – M.: Mir, 2000. – t. 2. – 390 s. (in Russian)
6. Babenko M.I. Methods of computer modeling in solving physical problems in the physics course of height and middle school // Zbirnik naukovix prac' «Informacijni texnologiji v osviti» // m. Kherson.– №17. – S.77 - 81(in Ukrainian)