УДК 004.4

Біляй Іванна Михайлівна
викладач кафедри інформаційних технологій і програмування
Інститут інформатики НПУ імені М. П. Драгоманова, м. Київ, Україна
bilivam100@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ GRAN1 У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ДЕЯКИХ ПОНЯТЬ СТОХАСТИКИ

Анотація. У статті наведено використання педагогічного програмного засобу GRAN1 під час вивчення деяких понять стохастики, зокрема випадкової величини, розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини і прообразу функції кількох випадкових аргументів. Матеріал може бути використаний в школі або в педагогічному університеті, зокрема під час підготовки до факультативів, для написання робіт в Малій академії наук, під час вивчення теми «Випадкові величини» тощо. Використання інформаційно-комунікаційних технологій під час навчання стохастики лише сприяє кращому засвоєнню і візуалізації матеріалу.

Ключові слова: стохастика; випадкова величина; прообраз; GRAN1.

1. ВСТУП

Уже багато років однією з тем шкільного курсу математики є «Початки теорії ймовірностей». Пропоновані підходи до вивчення теми дуже різноманітні: від того, що навчальний процес повинен відповідати принципу історизму до того, що шкільний курс теорії ймовірностей повинен бути побудованим на сучасному баченні цієї теорії. До того ж навчальний матеріал, пропонований у наявних підручниках і посібниках часто не відповідає принципу науковості.

Слід зауважити, що нині розроблено чимало педагогічних програмних засобів для комп’ютерної підтримки навчання багатьох предметів. Але тільки окремі з них систематично застосовуються в навчально-виховному процесі.

Постановка проблеми. З’являється потреба у підготовці вчителів до використання сучасних комп’ютерно-орієнтованих методичних систем навчання різних предметів, зокрема математики. Сучасний учитель повинен уміти аналізувати відповідні програмні засоби навчального, спеціального, професійного призначення, можливості їх педагогічно виваженого використання в навчальному процесі, доцільність використання, його педагогічну ефективність і т. п., аналізувати уроки на різні теми з використанням таких програмних засобів, відповідно планувати педагогічну практику.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Зрозуміло, що для того щоб розробити комп’ютерно-орієнтоване науково-методичне забезпечення навчального процесу, потрібен час, відповідні ресурси, кваліфіковані фахівці, які були б здатні і мали бажання підняти цей пласт робіт. Разом з тим за використанням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій повинен зберігатись принцип науковості під час подання матеріалу.

Порівняльний аналіз шкільних і вузівських програм з математики щодо відповідної змістової лінії дає підстави стверджувати, що, перш за все, потребує змін зміст навчального матеріалу в шкільних підручниках і програмах, а для реалізації нового змісту в школах – підготовка вчителів, які володіють високим рівнем знань зі стохастики.

Питанням удосконалення змісту навчального матеріалу займалося багато математиків минулого століття [1], [2]. В. Феллер на основі поняття простору елементарних подій, сформульованим ще Мізесом, будував строгу математичну теорію ймовірностей на основі теорії міри. Такий підхід розвивався поступово протягом 20-х років, але розглядалися лише прості випадки дискретних ймовірностей.

У багатьох сучасних навчальних посібниках і підручниках некоректно вводяться навіть такі поняття, як "випадкова подія" і "ймовірність випадкової події". Наприклад,«Випадковою подією називають подію, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування... Під випробуванням розуміють ті умови, у результаті яких відбувається подія» або «Множина подій утворює повну групу подій, якщо внаслідок кожного випробування хоч одна з цих подій напевне виконується». Виникають запитання: Чим відрізняється первісне поняття «подія» від означуваного поняття «випадкова подія? Чи може якась подія повної групи подій ніколи не виконуватися або виконуватися в результаті кожного випробування? Перелік запитань, що виникають під час читання багатьох навчальних посібників, можна продовжувати досить довго. Головним недоліком наведених означень випадкових подій і відношень між ними є те, що всі ці означення важко назвати математичними моделями реальних випадкових подій, оскільки всі вони не є сукупностями відомих учням математичних понять і тверджень, що характеризують відповідні реальні випадкові події.

Разом з тим, враховуючи сучасні підходи до побудови теорії ймовірностей, можна легко, навіть у рамках шкільного курсу математики будувати *математичні моделі* реальних випадкових подій, які називають *ймовірнісними моделями*[3].

Нині написано посібники зі стохастики, у яких йдеться про те, як конкретно будувати такі моделі. Попри це, уточнено окремі теоретичні положення стосовно поточкових і поінтервальних розподілів ймовірностей і залежності функції розподілу від структури подій. Такий матеріал можна використовувати в навчальному процесі як у школі [4], так і в університеті [5] під час підготовки майбутніх учителів математики.

Мета статті. Дослідити розв'язання задач зі стохастики з теми «Функції кількох випадкових аргументів» як засоби навчання для формування понять випадкова величина, прообраз відображення тощо. Показати доцільність застосування ІКТ, зокрема GRAN1, під час вивчення теми.

2. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Серед методів дослідження були використані теоретичні (аналіз, порівняння й узагальнення наукових положень, моделювання) й емпіричні (узагальнення навчального матеріалу і його систематизація, цілеспрямоване педагогічне спостереження за суб'єктами навчання).

3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ефективність здійснення навчального процесу в педагогічному університеті за умов широкого впровадження засобів сучасних ІКТ значною мірою залежить від розуміння викладачем шляхів і методів педагогічно виваженого, методично вмотивованого і доцільного застосування програмних засобів.

Нині є чимало засобів загального, спеціального, навчального призначення, які можна використовувати у процесі навчання стохастики, серед них GRAN1. Цей педагогічний програмний засіб (GRaphic ANalysis) призначений для графічного аналізу функцій. Використання ППЗ GRAN1 дозволяє знаходити обернені функції і їх графіки, графічно розв’язувати рівняння, нерівності та їх системи, обчислювати значення виразів, знаходити найбільші і найменші значення функцій на заданій множині точок, обчислювати визначені інтеграли, площі довільних фігур, довжини кривих, об’єми та площі поверхонь тіл обертання, опрацьовувати статистичні дані, будувати функції розподілу статистичних ймовірностей, перевіряти гіпотези про розподіл ймовірностей за критерієм Пірсона.

Використання ІКТ, зокрема Gran1, у навчанні математики дозволяє зробити доступнішими для сприйняття абстрактні математичні об'єкти і методи, здійснювати індивідуальний підхід у навчанні, посилює мотивацію навчально-пізнавальної діяльності, завдяки чому підвищується ефективність процесу навчання математики; створюються умови для розвитку творчого мислення й уяви, інтелектуального потенціалу студентів.

Розглянемо деякі приклади завдань з теми «Функції кількох випадкових аргументів», коли потрібно знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z=\psi(X,Y)$, якщо розподіл ймовірностей на множині значень двовимірної випадкової величини (X,Y) рівномірний на множині *G*.

$$f_{(X,\,Y)}(x,\;y)=\begin{cases}const, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{m(G)}, & \text{коли } (x,y)\in G;\\ 0, & \text{коли } (x,y)\notin G.\end{cases}$$

Для розв’язування такого типу задач потрібно побудувати прообраз $\psi^{-1}((-\infty;z))$ множини $(-\infty;z)$ значень випадкової величини $Z=\psi(X,Y)$. Значення функції розподілу ймовірностей на множині значень $Z=\psi(X,Y)$ будемо знаходити так: $F_Z(z)=P_Z((-\infty,\;z))=P_{(X,Y)}(\psi^{-1}((-\infty,z)))=\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\,z))}f_{(X,Y)}(x,y)dxdy$.

Для полегшення аналізу графіка прообразу скористаємось програмними засобом Gran1. Для цього потрібно побудувати відповідну систему обмежень і графік неявно заданої функції, яка обмежує множину *G*.

Розглянемо застосування програмного засобу Gran1 для конкретних прикладів.

Приклад 1. Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z=\psi(X,Y)=X^2+Y^2$, якщо розподіл ймовірностей на множині значень двовимірної випадкової величини (X,Y) рівномірний на множині $G=\{(x,y):x^2+y^2\le 9\}$.

Тоді розподіл ймовірностей описується через щільність:

$$f_{(X,\,Y)}(x,\;y)=\begin{cases}\dfrac{1}{9\pi}, & \text{коли } x^2+y^2\le 9;\\ 0, & \text{коли } x^2+y^2>9.\end{cases}$$

Для того щоб зобразити прообраз $\psi^{-1}((-\infty;z))$, побудуємо відповідну систему обмежень і лінії різних рівнів неявнозаданої функції, яка обмежує множину *G*.

У головному вікні програмного засобу Gran1 додаємо до списку об’єктів неявно задану функцію `X*X+Y*Y-9`, яка відповідає контуру множини *G*.

Для демонстрації зміни прообразу до списку об’єктів додаємо неявно задану функцію з параметром *p1*, яка відповідає функції випадкової величини *Z* – `X*X+Y*Y-p1`. Параметр *p1* дорівнює значенню *z*. Оскільки потрібно знаходити прообрази множин $(-\infty,\,z)$, то необхідно розв’язати нерівність `X*X+Y*Y-p1<0`. Для цього слід скористатись пунктом меню «Операції/Нерівності/Система нерівностей/G<0». Змінюючи параметр р1, отримуємо прообрази множини $(-\infty,\ z)$ на множині значень двовимірної випадкової величини (X, Y).

Аналізуючи отримані зображення прообразів для різних значень параметра *p1*, визначимо, що $P_Z((-\infty,\ z)) = 0$, коли $z \le 0$, оскільки прообрази множин $(-\infty,\ z)$ за відображення $Z = x^2 + y^2$ порожні, коли $z \le 0$.

Коли $0 < z$, але $z \le R^2$, то прообразом множини $(-\infty,\ z)$ за відображення $z = x^2 + y^2$ є круг радіуса $\sqrt{z}$ з центром у початку координат (див. Рис. 1). Ймовірність того, що пари координат двовимірної випадкової величини (X,Y) належатимуть такому прообразу, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = \frac{1}{\pi R^2}\pi z$$

як об’єм під поверхнею щільності розподілу ймовірностей над прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$, тобто над кругом радіуса $\sqrt{z}$ з центром у початку координат.

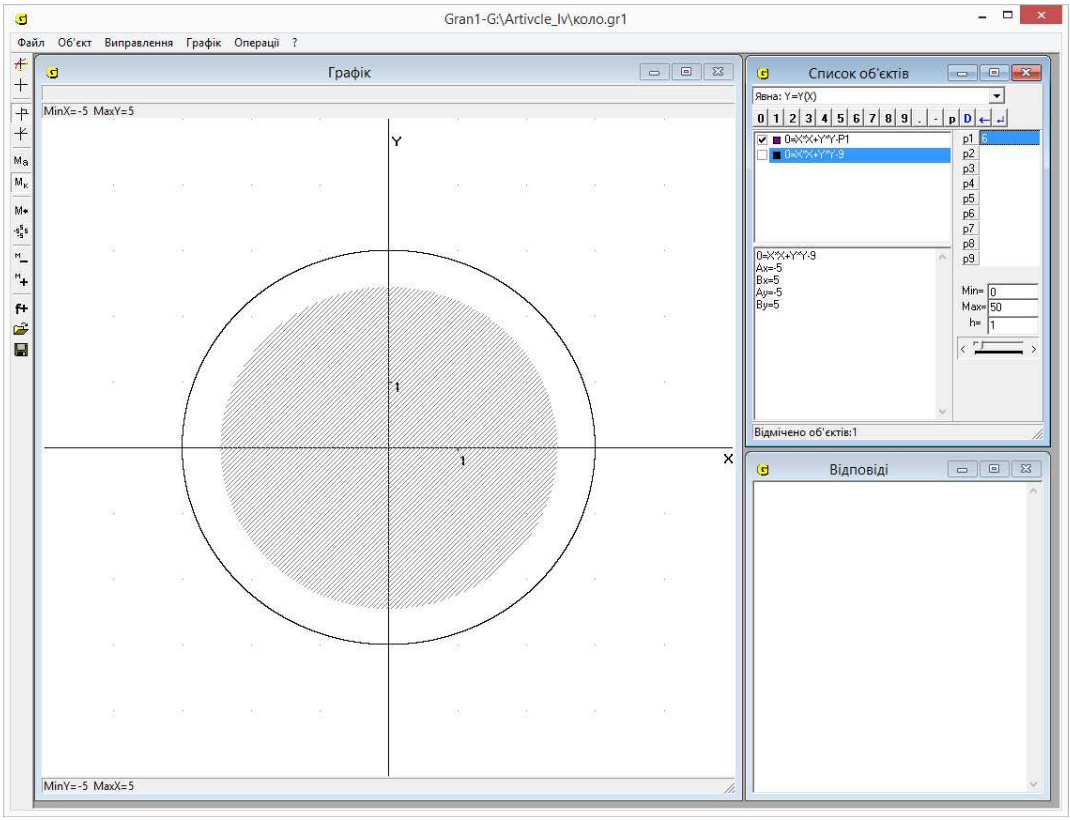

Рис. 1

Коли $z > R^2$, прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$ множини $(-\infty,\ z)$ є також кругом радіуса $\sqrt{z}$, але оскільки поза кругом радіуса R функція $f_{(X,Y)}(x,\ y) = 0$ (Рис. 2), то коли $z > R^2$, імовірність того, що пари координат випадкової величини (X,Y) належатимуть прообразу $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = 1\,.$$

Отже,

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & \text{коли} \quad z\le 0;\\ \dfrac{z}{R^2}, & \text{коли} \quad 0\le z\le R^2;\\ 1, & \text{коли} \quad R^2\le z.\end{cases}$$

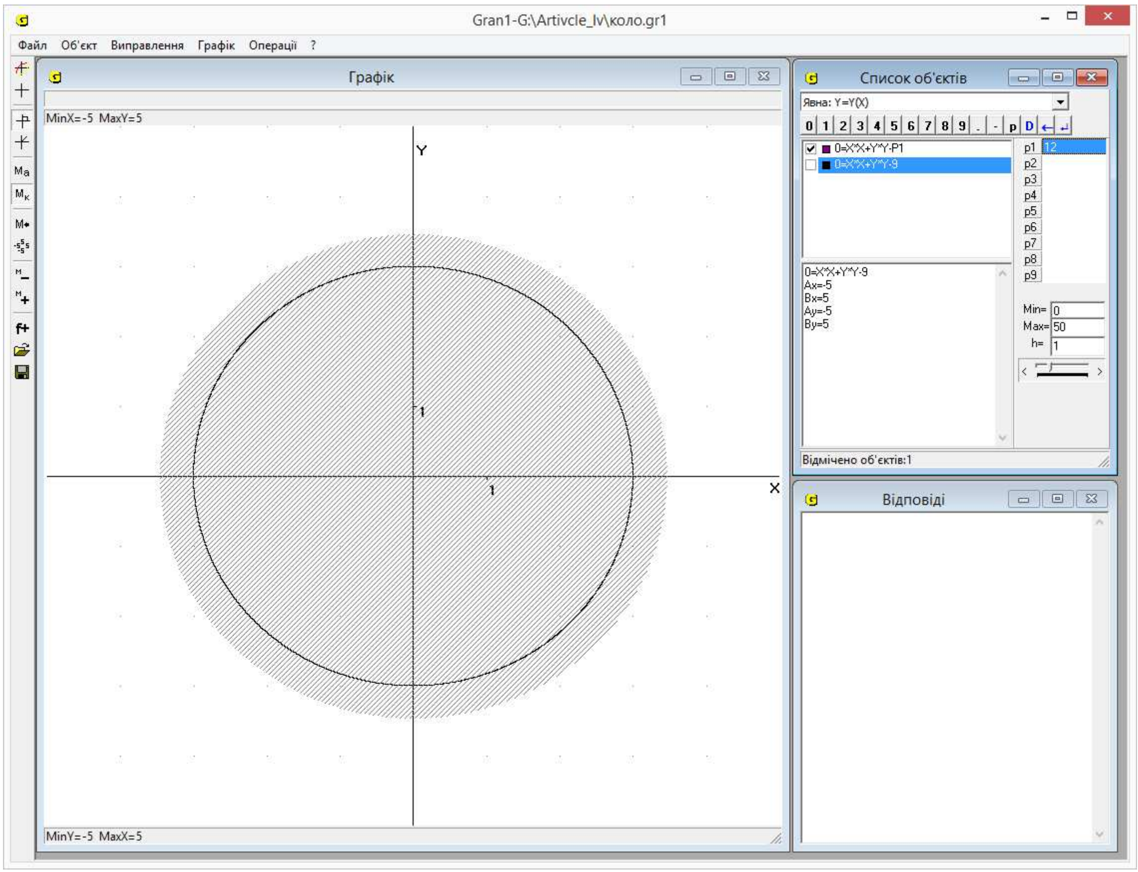

Рис. 2

Приклад 2. Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z=\psi(X,Y)$ – піраміда, ребра основи якої паралельні осям координат, якщо розподіл ймовірностей на множині значень двовимірної випадкової величини (X,Y) рівномірний на квадраті зі стороною 3, $G=\{(x,y):|x|\le 3,\ |y|\le 3\}$.

Тоді розподіл ймовірностей описується через щільність:

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}, & \text{коли } (x,y)\in G;\\ 0, & \text{коли } (x,y)\notin G.\end{cases}$$

Для того щоб зобразити прообраз $\psi^{-1}((-\infty;z))$, побудуємо відповідну систему обмежень і графік неявно заданої функції, лінія рівня якої обмежує множину G.

У головному вікні програмного засобу Gran1 додаємо до списку об'єктів ламану, яка відповідає контуру множини G.

Для демонстрації зміни прообразу до списку об’єктів додаємо неявні функції з параметром *p1*, які відповідають функціям *Z*:`X-p1=0`, `-X-p1=0`, `Y-p1`, `-Y-p1=0`. Параметр *p1* дорівнює значенню *z*. Оскільки потрібно знаходити прообрази множин $(-\infty,\ z)$, то необхідно розв’язати систему нерівностей

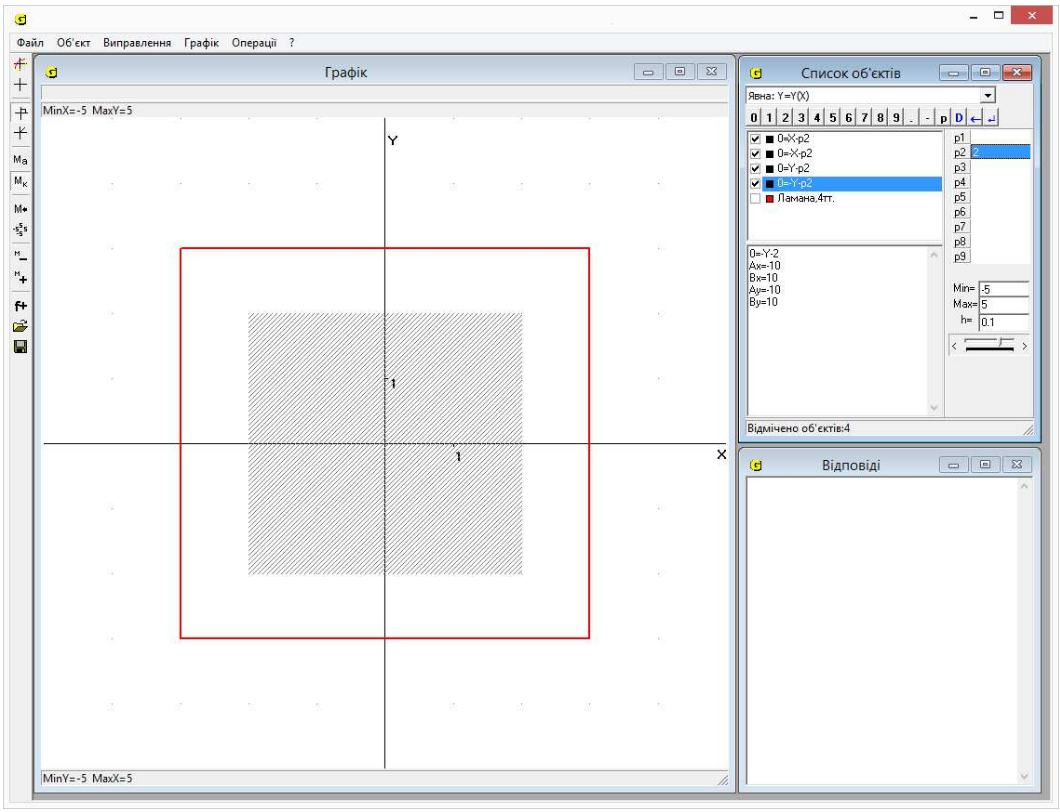

Рис. 3

$$\begin{cases} X - p1 < 0, \\ -X - p1 < 0, \\ Y - p1 < 0. \\ -Y - p1 < 0. \end{cases}$$

Для цього слід скористатись пунктом меню «Операції/Нерівності/Система нерівностей/*G*<0». Змінюючи параметр *p1*, отримуємо прообрази множини $(-\infty,\ z)$ на множину значень двовимірної випадкової величини *(X,Y).*

Аналізуючи отримані зображення прообразів для різних значень параметра *p1*, визначимо, що $P_Z((-\infty,\ z)) = 0$, коли $z \le 0$, оскільки прообрази множин $(-\infty,\ z)$ за відображенням $Z = \psi(X, Y)$ порожні, якщо $z \le 0$.

Якщо $0 < z$, але $z \le 3$, то прообразом множини $(-\infty,\ z)$ за відображенням є квадрат зі стороною *z* (див. Рис. 3). Ймовірність того, що пари координат двовимірної випадкової величини (X, Y) належатимуть такому прообразу, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = \frac{1}{9} z^2$$

як об’єм під поверхнею щільності розподілу ймовірностей над прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$, тобто над квадратом зі стороною *z*.

Коли $z > 3$, прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$ множини $(-\infty,\ z)$ є також квадрат зі стороною z, але оскільки поза квадратом функція $f_{(X,Y)}(x,\ y) = 0$ (Рис. 4), то коли $z > 3$, імовірність того, що пари координат випадкової величини (X, Y) належатимуть прообразу $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = 1.$$

Отже,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad z \le 0; \\ \dfrac{z^2}{9}, & \text{якщо} \quad 0 \le z \le 3; \\ 1, & \text{якщо} \quad 3 \le z. \end{cases}$$

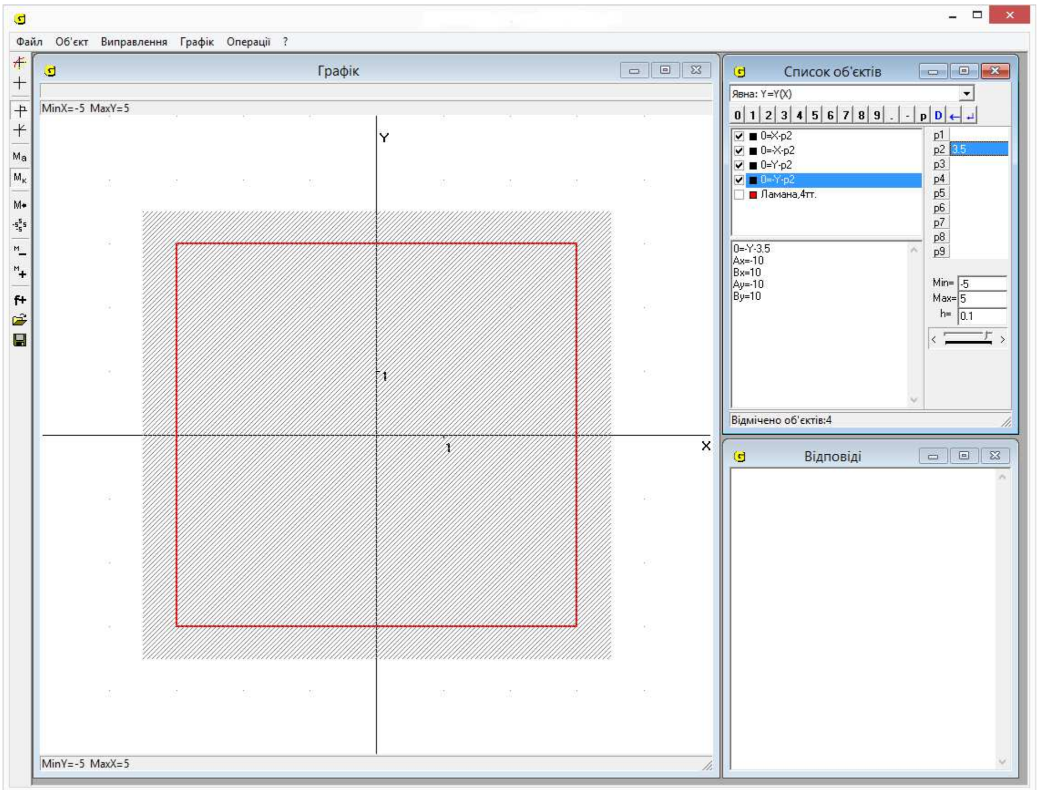

Рис. 4

Приклад 3. Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z = \psi(X, Y)$, у графічному поданні якої є піраміда, ребра основи якої паралельні сторонам трикутника, якщо розподіл ймовірностей на множині значень двовимірної випадкової величини (X, Y) рівномірний на даному трикутнику.

Тоді розподіл ймовірностей описується через щільність:

$$f_{(X,\,Y)}(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_\Delta}, & \text{коли } (x, y) \in G; \\ 0, & \text{коли } (x, y) \notin G. \end{cases}$$

Для того щоб зобразити прообраз $\psi^{-1}((-\infty; z))$, побудуємо відповідну систему обмежень і ламану, яка обмежує множину *G*.

У головному вікні програмного засобу Gran1 додаємо до списку об'єктів ламану, яка відповідає контуру множини *G*.

Для демонстрації зміни прообразу до списку об'єктів додаємо неявно задані функції з параметром *p1*, які відповідають виразу залежності випадкової величини *Z* від змінних *X*, *Y* (задають прямі, на яких лежать сторони трикутника). Параметр *p1* дорівнює значенню *z*. Оскільки потрібно знаходити прообрази множин $(-\infty, z)$, то необхідно розв'язати відповідну систему нерівностей. Для цього слід скористатись пунктом меню «Операції/Нерівності/Система нерівностей/*G*<0». Змінюючи параметр *p1*, отримуємо прообрази множини $(-\infty, z)$ на множині значень двовимірної випадкової величини *(X,Y)*.

Аналізуючи отримані зображення прообразів для різних значень параметра *p1*, визначимо, що $P_Z((-\infty, z)) = 0$, коли $z \le 0$, оскільки прообрази множин $(-\infty, z)$ за відображенням $Z = \psi(X, Y)$ порожні, якщо $z \le 0$.

Якщо $0 < z$, але $z \le 0{,}6$, то прообразом множини $(-\infty, z)$ за відображенням $Z = \psi(X, Y)$ є трикутник, подібний до заданого (див. Рис. 5). Ймовірність того, що пари координат двовимірної випадкової величини (X, Y) належатимуть такому прообразу, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\, z))} f_{(X,Y)}(x,\, y)\, dxdy = \frac{1}{S_\Delta} z^2$$

як об'єм під поверхнею щільності розподілу ймовірностей над прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\, z))$, тобто над квадратом зі стороною *z*.

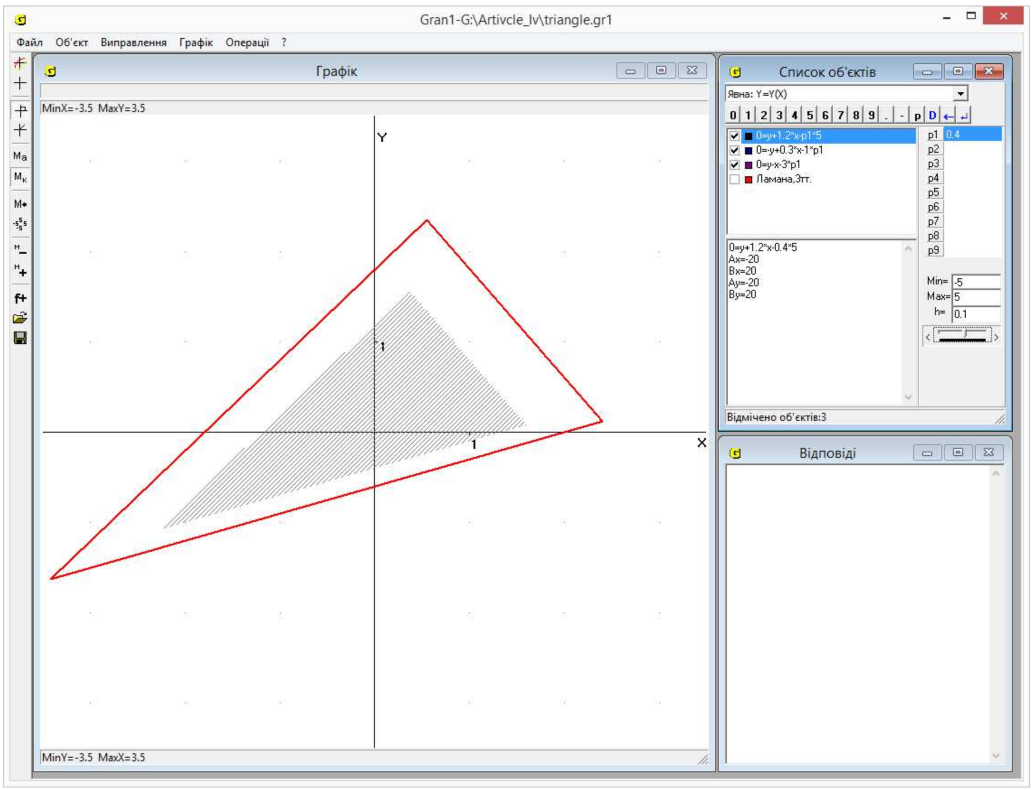

Рис. 5

Коли $z > 0.6$, прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$ множини $(-\infty,\ z)$ є також трикутник, подібний до заданого, але оскільки поза трикутником $f_{(X,Y)}(x,\ y) = 0$ (Рис. 6), то коли $z > 0{,}6$, імовірність того, що пари координат випадкової величини (X, Y) належатимуть прообразу $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = 1.$$

Отже,

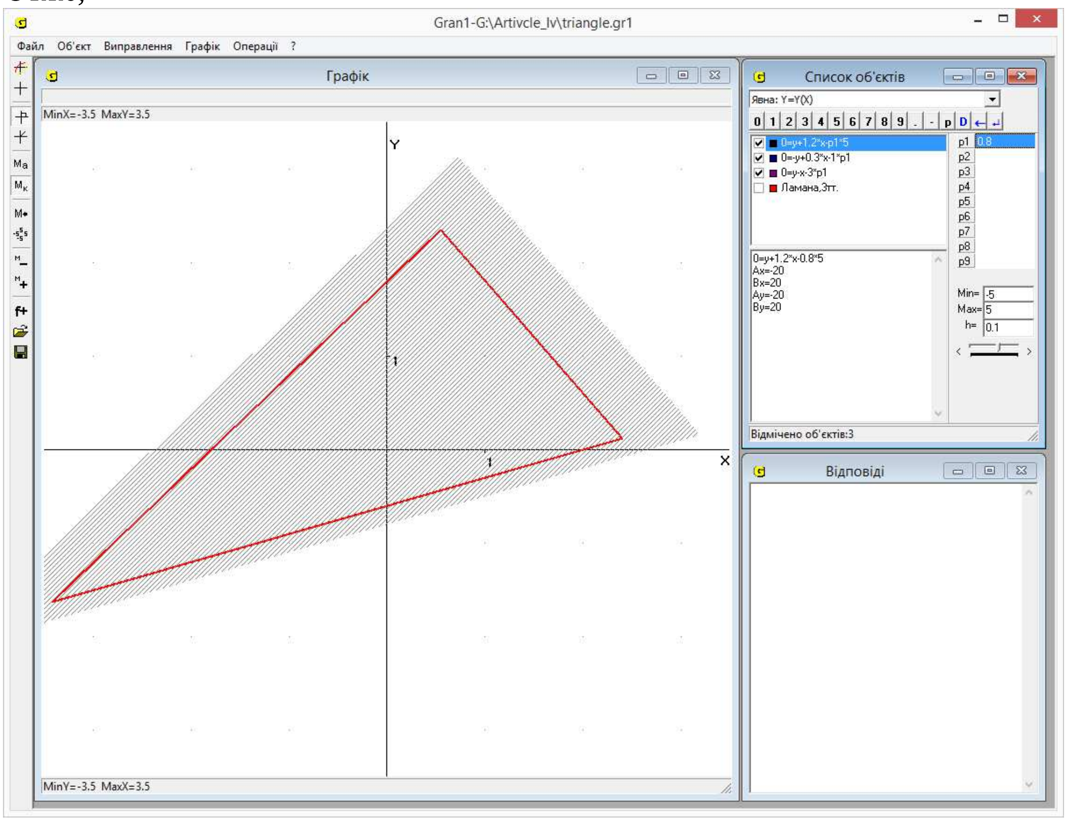

Рис. 6

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad z \le 0; \\ \dfrac{z^2}{S_\Delta}, & \text{якщо} \quad 0 \le z \le 0{,}6; \\ 1, & \text{якщо} \quad 0.6 \le z. \end{cases}$$

Приклад 4. Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z = \psi(X, Y) = X^2 + Y^2$, якщо розподіл ймовірностей на множині значень двовимірної випадкової величини (X, Y) рівномірний на множині $G = \{(x, y) : |x| + |y| \le 1\}$.

У такому разі розподіл ймовірностей описується через щільність:

$$f_{(X,Y)}(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{коли } |x| + |y| \le 1; \\ 0, & \text{коли } |x| + |y| > 1. \end{cases}$$

Для того щоб зобразити прообраз $\psi^{-1}((-\infty; z))$, побудуємо відповідну систему обмежень і графік ламаної, яка обмежує множину *G*.

Для демонстрації зміни прообразу до списку об'єктів додаємо неявно задану функцію з параметром *p1*, через яку визначається випадкова величина*Z* – `X*X+Y*Y-p1`. Значення параметра*p1* дорівнює значенню *z*. Оскільки потрібно знаходити прообрази множин $(-\infty, z)$, то необхідно розв'язати систему нерівностей `X*X+Y*Y-p1<0.` Для цього слід скористатись пунктом меню «Операції/Нерівності/Система нерівностей/*G*<0». Змінюючи параметр *p1* отримуємо прообрази множини (–∞, *z*) на множину значень двохвимірної випадкової величини *(X,Y)*.

Аналізуючи отримані зображення прообразів для різних значень параметра *p1*, визначимо, що $P_Z((-\infty,\ z)) = 0$, коли $z \le 0$, оскільки прообрази множин (–∞, *z*) за відображення $Z = x^2 + y^2$ порожні, якщо $z \le 0$.

Коли $0 < z$, але $z \le \dfrac{1}{2}$, то прообразом множини (–∞, *z*) за відображенням $z = x^2 + y^2$ є круг радіуса $\sqrt{z}$ з центром у початку координат (див. Рис. 7). Ймовірність того, що пари координат двовимірної випадкової величини (X, Y) належатимуть такому прообразу, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = \frac{1}{2}\pi z$$

як об'єм під поверхнею щільності ймовірності над прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$, тобто над кругом радіуса $\sqrt{z}$ з центром у початку координат.

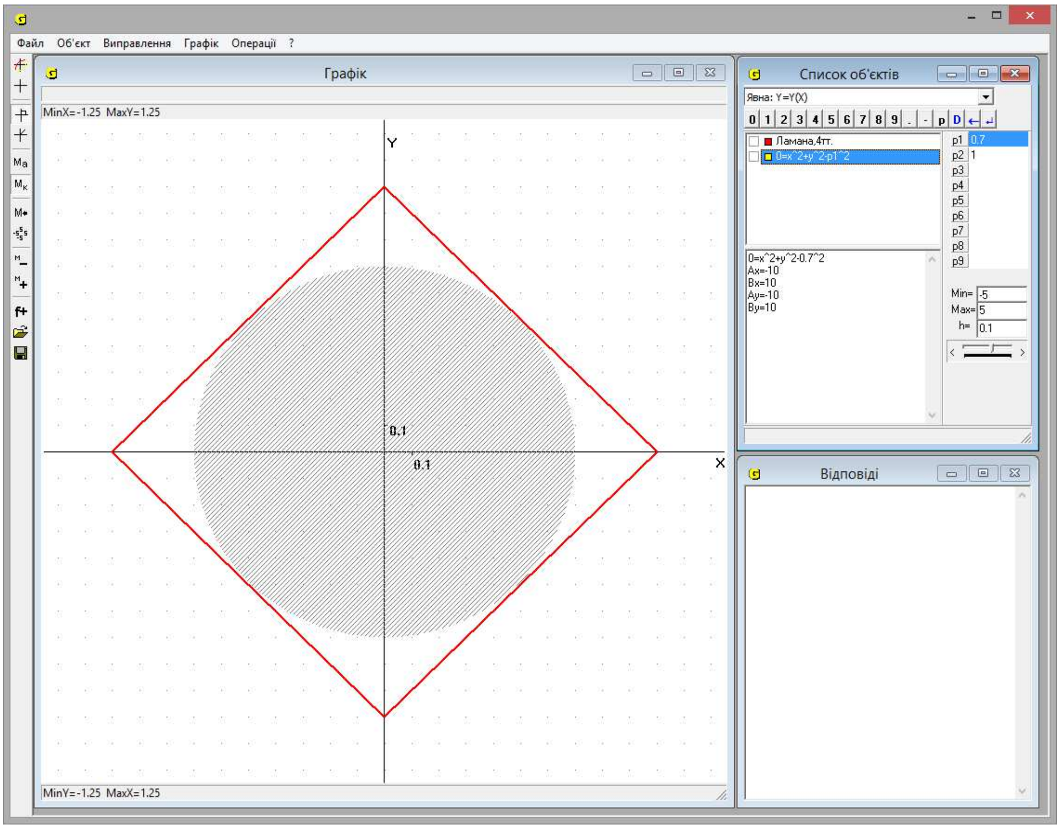

Рис. 7

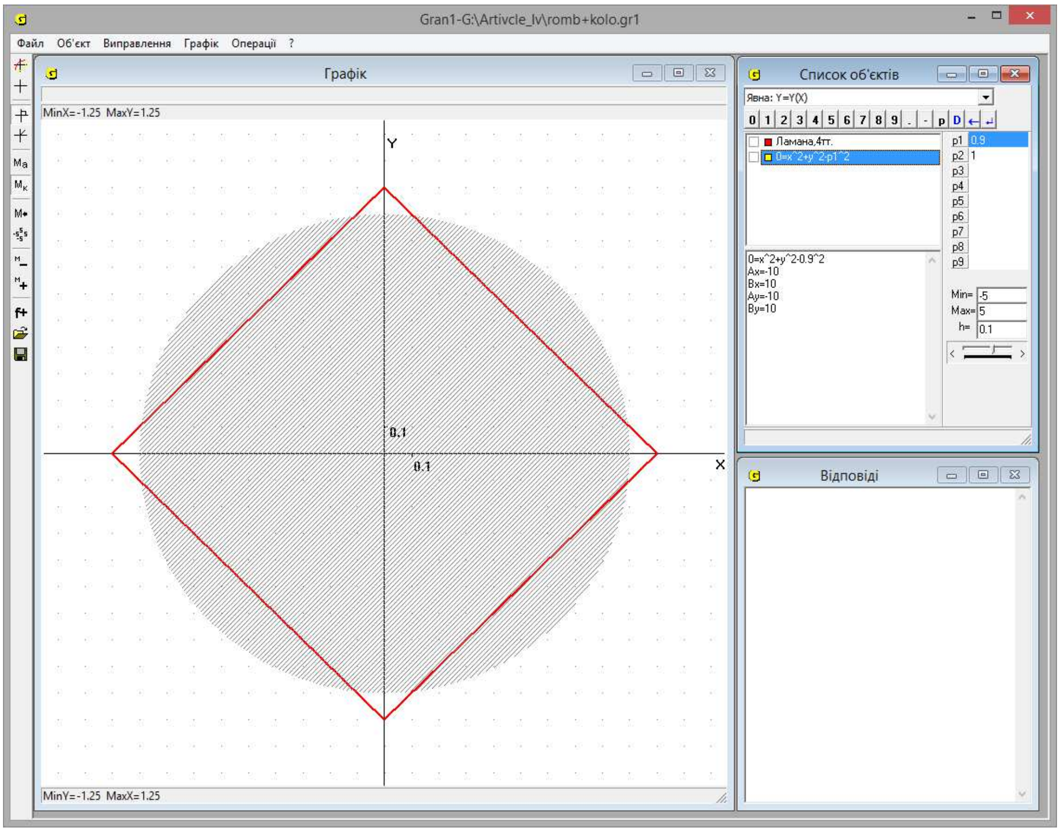
Gran1-G:\Artivcle_Iv\romb+kolo.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-1.25 MaxY=1.25
Y
X
0.1
0.1
MinY=-1.25 MaxX=1.25
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
Ламана,4тт.
0=x^2+y^2-p1^2
p1 0.9
p2 1
0=x^2+y^2-0.9^2
Ax=-10
Bx=10
Ay=-10
By=10
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Відповіді

Рис. 8

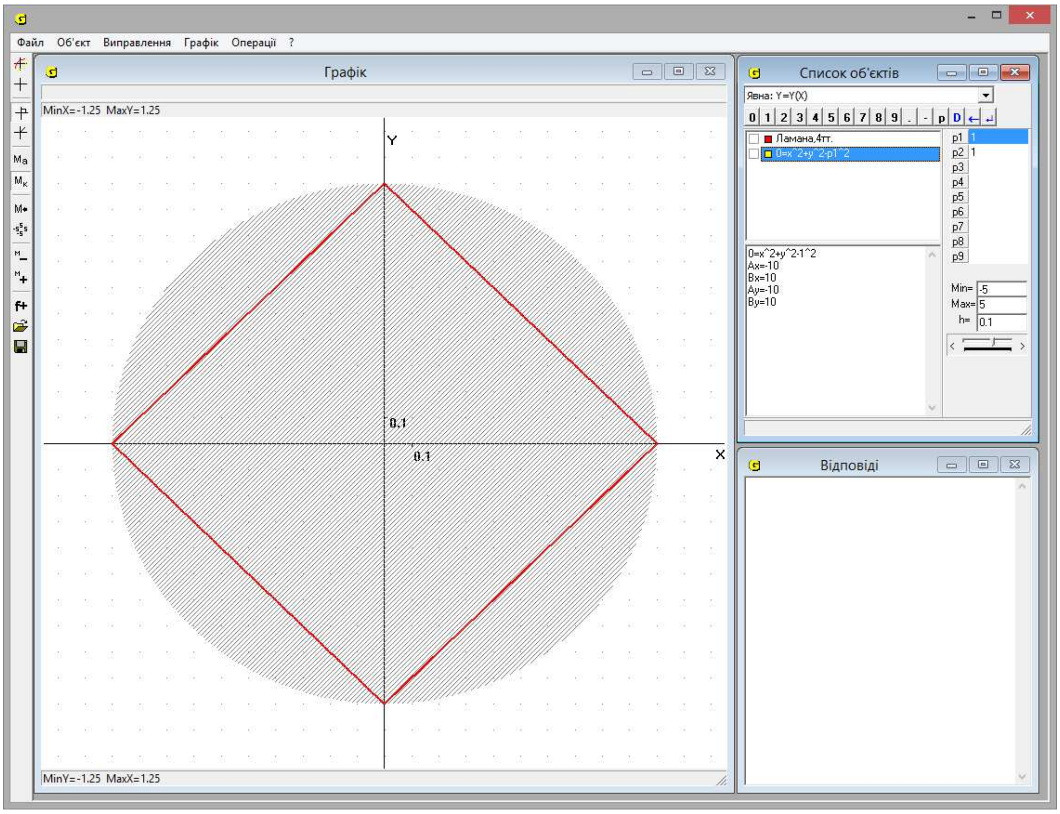
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-1.25 MaxY=1.25
Y
X
0.1
0.1
MinY=-1.25 MaxX=1.25
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
Ламана,4тт.
0=x^2+y^2-p1^2
p1 1
p2 1
0=x^2+y^2-1^2
Ax=-10
Bx=10
Ay=-10
By=10
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Відповіді

Рис. 9

Якщо $z > \frac{1}{2}$, але $z \le 1$, то прообразом множини $(-\infty, z)$ за відображенням $z = x^2 + y^2$ теж є круг радіуса $\sqrt{z}$ з центром у початку координат (див. Рис. 7, Рис. 8). Ймовірність того, що пари координат двовимірної випадкової величини (X,Y) належатимуть такому прообразу, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = \frac{\pi z - 4(z\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2z}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{z-\frac{1}{2}})}{2}.$$

Коли $z > 1$ прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$ множини $(-\infty,\ z)$ є також круг радіуса $\sqrt{z}$, але оскільки поза кругом радіуса R функція $f_{(X,Y)}(x,\ y) = 0$ (рис. 9), то при $z > 1$ імовірність того, що пари координат двовимірної випадкової величини (X,Y) належатимуть прообразу $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = 1.$$

Отже,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{коли } z \le 0; \\ \frac{\pi z}{2}, & \text{коли } 0 \le z \le \frac{1}{2}; \\ \frac{\pi z - 4(z\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2z}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{z-\frac{1}{2}})}{2}, & \text{коли } \frac{1}{2} \le z \le 1; \\ 1, & \text{коли } 1 \le z. \end{cases}$$

Приклад 5. Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z = \psi(X,Y) = |X| + |Y|$, якщо розподіл ймовірностей на множині значень двовимірної випадкової величини (X,Y) рівномірний на множині $G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.

У такому разі розподіл ймовірностей описується через щільність:

$$f_{(X,\,Y)}(x,\ y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{коли } x^2 + y^2 \le 1; \\ 0, & \text{коли } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Для того щоб зобразити прообраз $\psi^{-1}((-\infty; z))$, побудуємо відповідну систему обмежень і графік ламаної, яка обмежує множину *G*.

Для демонстрації зміни прообразу до списку об’єктів додаємо систему неявно заданих функцій з параметром *p1*, через яку визначається випадкова величина*Z* – `abs(X)+abs(Y)-1`. Значення параметра *p1* дорівнює значенню *z*. Оскільки потрібно знаходити прообрази множин $(-\infty,\ z)$, то необхідно розв’язати систему нерівностей

$$\begin{cases} Y - X - p1 < 0, \\ -Y + X - p1 < 0, \\ Y + X - p1 < 0. \\ -Y - X - p1 < 0. \end{cases}$$

Для цього слід скористатись пунктом меню «Операції/Нерівності/Система нерівностей/*G*<0». Змінюючи параметр *p1* отримуємо прообрази множини $(-\infty,\ z)$ на множину значень двовимірної випадкової величини *(X,Y).*

Аналізуючи отримані зображення прообразів для різних значень параметра *p1*, визначимо, що $P_Z((-\infty,\ z)) = 0$, коли $z \le 0$, оскільки прообрази множин $(-\infty,\ z)$ за відображення $Z = \psi(X, Y)$ порожні, якщо $z \le 0$.

Коли $0 < z$, але $z \le 1$, то прообразом множини $(-\infty,\ z)$ за відображенням $Z = \psi(X, Y)$ є ромб (див. Рис. 10, Рис. 7). Ймовірність того, що пари координат двовимірної випадкової величини (X, Y) належатимуть такому прообразу, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = \frac{2z}{\pi}$$

як об'єм під поверхнею щільності ймовірності над прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$.

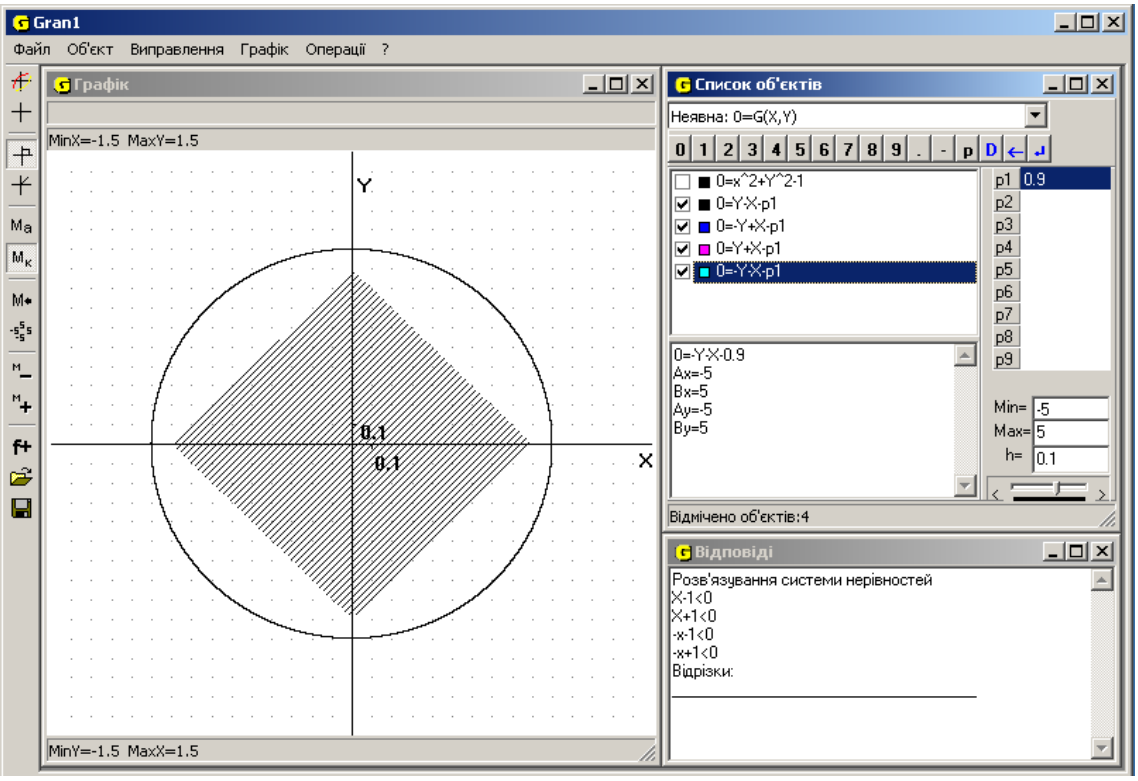

Рис. 10

Якщо $z > 1$, але $z \le \sqrt{2}$, то прообразом множини $(-\infty,\ z)$ за відображенням $Z = \psi(X, Y)$ теж є ромб (див. рис. 11). Ймовірність того, що пари координат двовимірної випадкової величини (X, Y) належатимуть такому прообразу, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = \frac{\pi - 4(\arccos(\frac{z\sqrt{2}}{2}) - \frac{z\sqrt{2 - z^2}}{2})}{\pi}.$$

Коли $z > \sqrt{2}$ прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$ множини $(-\infty,\ z)$ є також ромб, але оскільки поза ромбом функція $f_{(X,Y)}(x,\ y) = 0$ (рис. 12), то при $z > \sqrt{2}$ імовірність того, що пари координат двовимірної випадкової величини (X, Y) належатимуть прообразу $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = 1.$$

Отже,

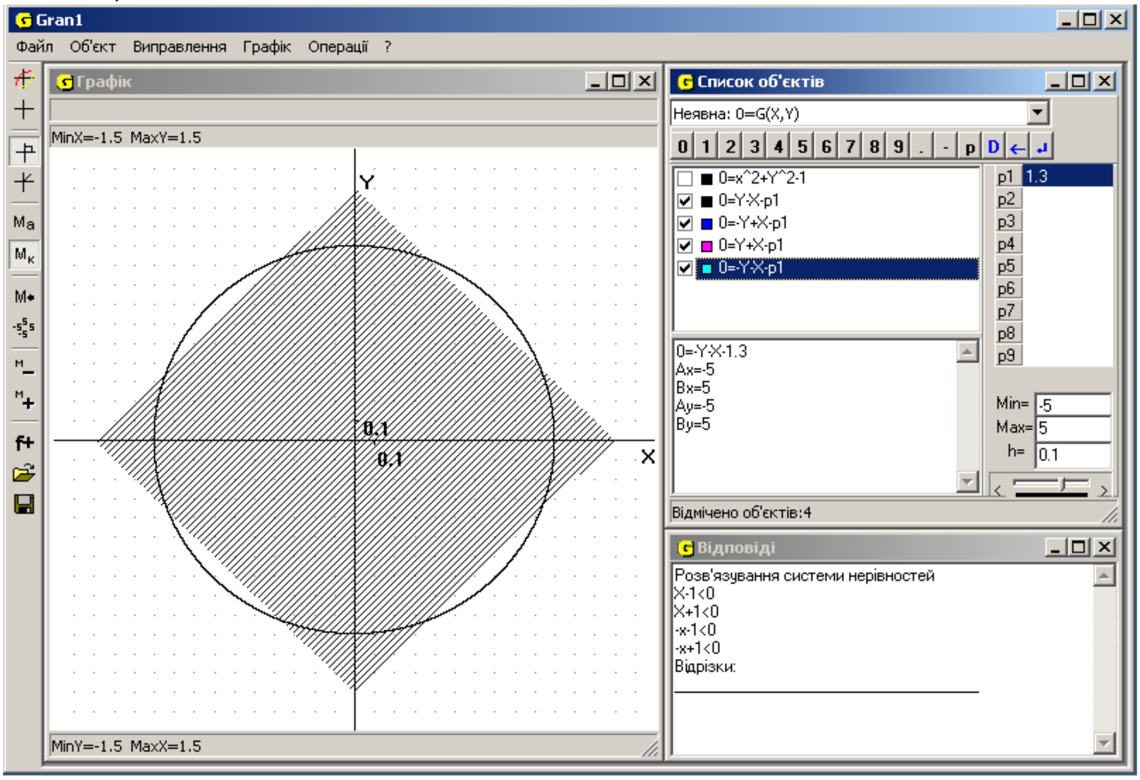

Рис. 11

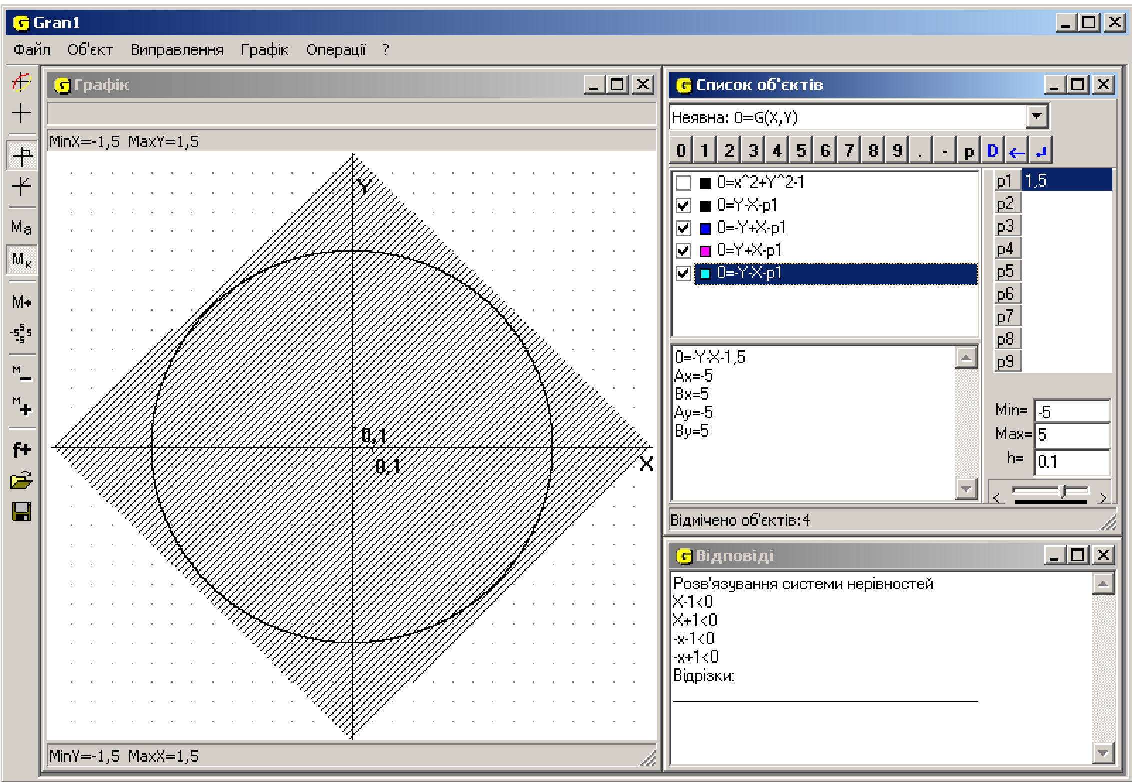

Рис. 12

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{коли } z \le 0; \\ \dfrac{2z}{\pi}, & \text{коли } 0 \le z \le 1; \\ \pi - 4(\arccos(\dfrac{z\sqrt{2}}{2}) - \dfrac{z}{2}), & \text{коли } 1 \le z \le \sqrt{2}; \\ 1, & \text{коли } 1 \le z. \end{cases}$$

Приклад 6. Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z = \psi(X,Y)$=|1.5-|X||, якщо розподіл ймовірностей на множині значень двовимірної випадкової величини (X,Y) рівномірний на квадраті зі стороною 3, $G = \{(x,y) : |x| \le 3,\ |y| \le 3\}$.

Тоді розподіл ймовірностей описується через щільність:

$$f_{(X,Y)}(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{1}{9}, & \text{якщо } (x,y) \in G; \\ 0, & \text{якщо } (x,y) \notin G. \end{cases}$$

Для того щоб зобразити прообраз $\psi^{-1}((-\infty; z))$ побудуємо відповідну систему обмежень і графік неявно заданої функції, яка обмежує множину *G*.

У головному вікні програмного засобу Gran1 додаємо до списку об'єктів ламану, яка відповідає контуру множини *G*.

Для демонстрації зміни прообразу до списку об'єктів додаємо неявно задані функції з параметром *p1*, які відповідають функції випадкової величини *Z*: `abs(1.5-abs(x))-p1`. Значення параметра *p1* дорівнює значенню *z*. Оскільки потрібно знаходити прообрази множин $(-\infty,\ z)$, то необхідно розв'язати систему нерівностей. Для цього слід скористатись пунктом меню «Операції/Нерівності/Система нерівностей/*G*<0». Змінюючи параметр *p1*, отримуємо прообрази множини $(-\infty,\ z)$ на множину значень двовимірної випадкової величини *(X,Y)* за заданого відображення.

Аналізуючи отримані зображення прообразів для різних значень параметра *p1*, визначимо, що $P_Z((-\infty,\ z)) = 0$, коли $z \le 0$, оскільки прообрази множин $(-\infty,\ z)$за відображення $Z = \psi(X,Y)$=|1.5-|X|| порожні, коли $z \le 0$.

Коли $0 < z$, але $z \le 1.5$, то прообразом множини $(-\infty,\ z)$ за відображенням є два прямокутники зі сторонами 3 і *z* (див. рис. 13).

Ймовірність того, що пари координат двовимірної випадкової величини (X,Y) належатимуть такому прообразу, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = \frac{1}{9}2(3z) = \frac{2z}{3}$$

як об'єм під поверхнею щільності розподілу ймовірностей над прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$.

Коли $z > 1.5$, прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$ множини $(-\infty,\ z)$ є прямокутник зі сторонами *z* та 3, але оскільки поза прямокутником функція $f_{(X,Y)}(x,\ y) = 0$, то коли $z > 1{,}5$, імовірність того, що пари координат двовимірної випадкової величини (X,Y) належатимуть прообразу $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = 1\,.$$

Отже,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad z \le 0; \\ \dfrac{2z}{3}, & \text{якщо} \quad 0 \le z \le 1{,}5; \\ 1, & \text{якщо} \quad 3 \le z. \end{cases}$$

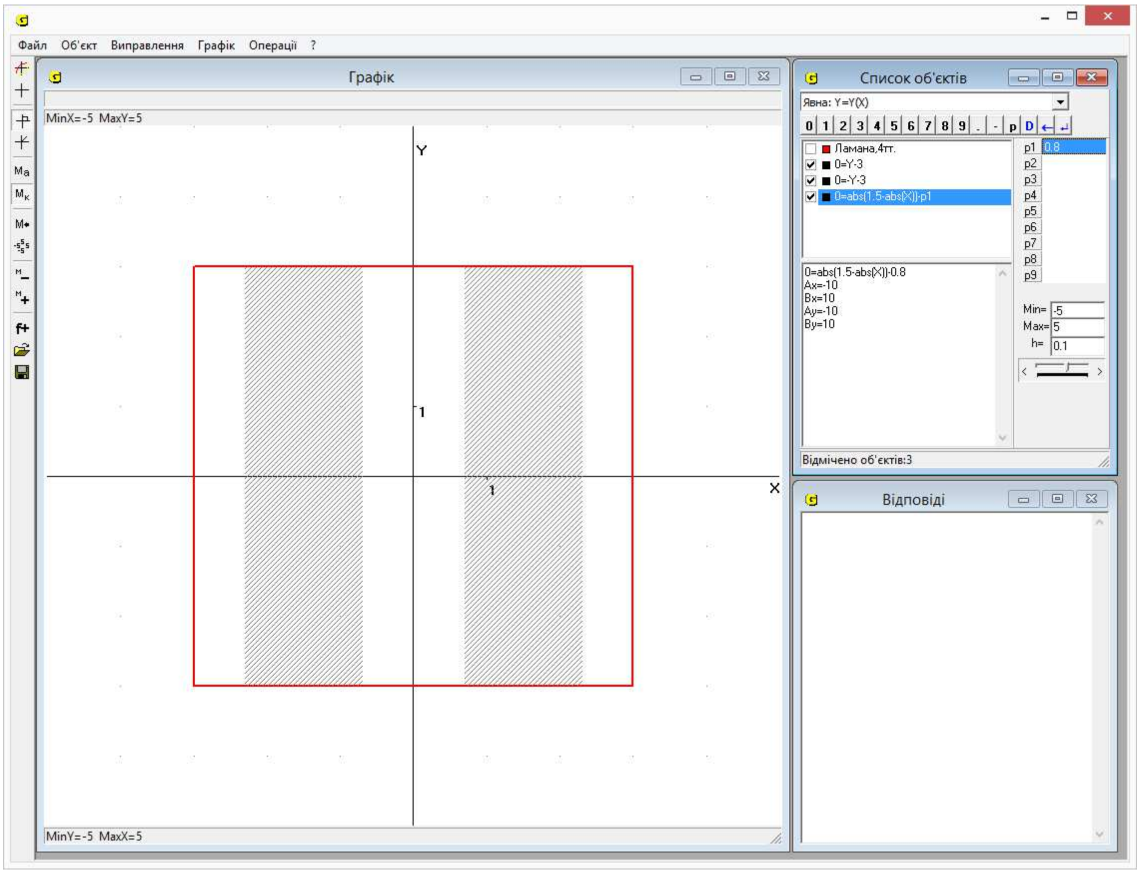

Рис. 13

4. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Впровадження інформаційно-комунікаційних технологій у процес навчання математики, зокрема стохастики, дозволяє оновити зміст і організаційні форми навчання, підвищити зацікавленість учнів до теми, сприяє розвитку розумових здібностей, просторової уяви, уваги, пам'яті, моторики, творчого нестандартного мислення.

У перспективі подальших досліджень є доцільною розробка й удосконалення системи задач і вправ, дистанційних курсів, компонентів методичної системи навчання стохастики, що дасть можливість забезпечити мотивацію пізнавальної діяльності студентів, диференціацію навчання, значно активізувати навчально-пізнавальну діяльність студентів, інтенсифікувати навчальний процес, що сприятиме формуванню системи загальнокультурних і професійних компетентностей майбутніх учителів на достатньо високих рівнях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К. : Вища школа, 1988. – 440 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Т. I, 3 изд. – 1968; 1 изд. – 1950, 2 изд. – 1957.
3. Жалдак М. І., Михалін Г. О. Про коректність введення понять «випадкова подія», «ймовірність» та «випадкова величина» у шкільному курсі математики // Математика в школі. – 2008. – № 11/12. – С. 3–12.
4. Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Михалін Г. О. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник для студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей педагогічних університетів. Видання третє, перероблене і доповнене. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015 – 705 с.
5. Жалдак М. І., Біляй І. М. Стохастика : посібник для вчителів. – К. НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. – 302 с.

Матеріал надійшов до редакції 30.09.2015 р.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА GRAN1 В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЙ СТОХАСТИКИ

Биляй Иванна Михайловна
преподаватель кафедры информационных технологий и программирования
Институт информатики НПУ имени М. П. Драгоманова, г. Киев, Украина
bilivam100@gmail.com

Аннотация. В статье охарактеризованы возможности использования педагогического программного средства GRAN1 при изучении некоторых понятий стохастики, в частности случайной величины, распределения вероятностей на множестве значений случайной величины и прообраза некоторого множества $(-\infty, z) \in R^1$ при отображении $Z = \psi(X, Y)$: $R^2 \rightarrow R^1$. Материал может быть использован в школе или в педагогическом университете, в частности при подготовке к факультативам, для написания работ учащимися Малой академии наук, при изучении темы «Случайные величины» и т. п.. Использование информационно-коммуникационных технологий в процессе обучения стохастике способствует лучшему усвоению материала.

Ключевые слова: стохастика; случайная величина; прообраз; GRAN1.

USING PEDAGOGICAL SOFTWARE GRAN1 IN THE STUDY OF SOME CONCEPTS OF STOCHASTIC

Ivanna M. Biliai
Lecturer of Institute of Computer Science
Institute of Computer Science of National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine
bilivam100@gmail.com

Abstract. The present article deals with the use of educational software GRAN1 for learning some concepts of Stochastic, in particular, random variable, probability distribution on the set of values of random variable and the preimage of function of some random arguments. The material can be used at school or at pedagogical university, particularly in preparation for elective courses, for writing works of Junior Academy of Science, while studying the theme "Random variables" and so on. Using information and communication technologies in teaching stochastics only promotes better learning and visualization of material.

Keywords: stochastic; random variable; prototype; GRAN1.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Ghykhman Y. Y., Skorokhod A. V., Jadrenko M. Y. Probability theory and mathematical statistics. – К. : Vyshchashkola, 1988. – 440 p. (in Russian).
2. William Feller. An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume I, 3rd edition. – 1968; 1st edn. – 1950, 2nd edn. – 1957. (in Russian).
3. Zhaldak M. I., Kuzmina N. M., Mykhalin H. O. On entering the correctness of the concepts of "random event", "probability" and "random variable" in the school course of mathematics // Mathematics in school. – 2008. – № 11/12. – P. 3–12 (in Ukrainian).
4. Zhaldak M. I., Kuzmina N. M., Mykhalin H. O. ProbabilityTheory and Mathematical Statistics: Textbook for students of physical and mathematical and pedagogical universities informatical specialties. Third Edition, revised and enlarged. – Kyiv . NPUof M. P. Dragomanova, 2015 – 705 p. (in Ukrainian).
5. Zhaldak M. I., Biliai I. M. Stochastics. Theteacher's textbook. – Kyiv .NPUof M. P. Dragomanova, 2013. – 302 p. (in Ukrainian).