

А.В. Кийко¹

¹*Восточноукраинский национальный университет имени Владимира Даля,
г. Луганск*

СИНТЕЗ УЗКОПОЛОСНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ АНАЛИЗА РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ

В статье разработана методика синтеза узкополосных нерекурсивных цифровых фильтров, удовлетворяющих предложенному критерию оптимальности. Доказано, что нули дискретной передаточной функции таких фильтров располагаются в комплексной z -плоскости на окружности единичного радиуса. Приведены рекомендации для практического использования полученных результатов.

Ключевые слова: нерекурсивный цифровой фильтр, дискретная передаточная функция, оптимизация.

Анализ последних исследований и публикаций

Цифровая фильтрация сигналов широко используется в системах автоматического управления и научных исследованиях как для выделения информативных компонент, так и для подавления шумов и помех. В цифровых фильтрах (ЦФ) можно легко изменять коэффициенты, а следовательно, и частотные характеристики фильтра, не меняя его структуры. Это дает возможность синтезировать перестраиваемые, адаптивные и многофункциональные фильтры. Поэтому разработка методов синтеза цифровых фильтров является важной и актуальной задачей.

Большая часть публикаций в открытой печати посвящена методам синтеза рекурсивных ЦФ. Полюсы передаточной функции рекурсивного фильтра могут располагаться произвольно внутри единичной окружности z -плоскости. Следствием такой свободы является высокая избирательность рекурсивного фильтра, которую можно получить при использовании передаточной функции низкого порядка. При одинаковых требованиях к избирательности порядок передаточной функции для нерекурсивного ЦФ с полюсами, фиксированными в начале координат, может быть в 5-10 раз выше, чем для рекурсивного. Тем не менее нерекурсивные ЦФ обладают рядом достоинств. Например, они всегда абсолютно устойчивы (при фильтрации с помощью таких фильтров не происходит накопление ошибок). А каждый вновь синтезированный рекурсивный ЦФ должен подвергаться специальному исследованию на устойчивость. Кроме того, легко создать нерекурсивный ЦФ со строго линейной фазовой характеристикой, которая требуется для учета дисперсионных искажений при обработке речи и передаче данных. Поэтому на практике во многих случаях нерекурсивные фильтры являются более предпочтительными.

Целью статьи является разработка методики расчета узкополосных нерекурсивных цифровых фильтров посредством вычисления нулей дискретной передаточной функции, при которых достигается максимум некоторого критерия узкополосности.

Постановка проблемы

Известны [1-8] три класса методов расчета нерекурсивных фильтров с линейной фазой: методы взвешивания с помощью "окна", методы частотной выборки, а также методы расчета оптимальных фильтров на основе алгоритма Ремеза. Перечисленные мето-

ды широко используются для синтеза ЦФ, имеющих одну или несколько полос пропускания. На практике часто возникает необходимость выделения из сигнала компоненты с заданной частотой, для чего необходимо использовать ЦФ с чрезвычайно малой шириной полосы пропускания. В связи с изложенным актуальна задача синтеза оптимальных узкополосных нерекурсивных ЦФ, обладающих при фиксированном порядке минимальной шириной полосы пропускания. При этом достаточно синтезировать оптимальные узкополосные нерекурсивные ЦФ для центральной частоты $\omega_f = 0$, т.е. оптимальные инфранизкочастотные нерекурсивные цифровые фильтры (ИНЦФ), так как их можно легко перестроить на любую заданную частоту ω_f . Обычно на практике желательно иметь узкополосный ЦФ, модуль амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) которого симметричен относительно центра ω_f его полосы пропускания (для ИНЦФ это условие сводится к симметрии модуля его АЧХ относительно оси ординат).

Физически реализуемый инфранизкочастотный фильтр можно рассматривать как некоторую аппроксимацию идеального фильтра нулевой частоты (т.е. постоянной составляющей сигнала), АЧХ которого представляет собой дискретную δ -функцию. Рассмотрим следующий критерий близости АЧХ ИНЦФ к дискретной δ -функции:

$$K_y(\Omega_c; \rho, \varphi) = \frac{\int_0^{\Omega_c} A_{2m}^2(\Omega'; \rho, \varphi) d\Omega'}{\int_0^{\pi} A_{2m}^2(\Omega; \rho, \varphi) d\Omega} \leq 1, \quad (1)$$

где $A_{2m}(\Omega; \rho, \varphi)$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) ИНЦФ;

$K_y(\Omega_c; \rho, \varphi)$ – коэффициент, характеризующий “узкополосность” АЧХ ИНЦФ (т.е. меру

ее сосредоточенности в окрестности нулевой частоты $\Omega = 0$);

Ω – нормированная частота: $\Omega = 2\pi \frac{\omega}{\omega_d}$, $0 \leq \Omega \leq \pi$;

ω_d – частота дискретизации фильтруемого сигнала;

Ω_c – правая граница “полосы пропускания” фильтра (интервала на оси Ω , для которого вычисляется величина K_y); левой границей всегда является начало координат;

$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ – m -мерные векторы, компонентами которых являются соответственно модули ρ_j и аргументы φ_j нулей z_j дискретной передаточной функции $W_{2m}(z)$ цифрового фильтра.

Величина $K_y(\Omega_c; \rho, \varphi)$ характеризует близость $A_{2m}(\Omega; \rho, \varphi)$ к финитной функции с носителем $[0, \Omega_c]$. Точка Ω_c разбивает интервал $[0, \pi]$ оси нормированных частот на две части: “полосу пропускания” $[0, \Omega_c]$ и “полосу подавления” $[\Omega_c, \pi]$. Чем ближе величина K_y к единице (при фиксированном достаточно малом значении Ω_c), тем ближе $A_{2m}(\Omega; \rho, \varphi)$ к дискретной δ -функции. Поэтому критерий оптимальности ИНЦФ конечно-го порядка $2m$ имеет вид:

$$\max_{\rho_j \in (0, \infty), \varphi_j \in [0, \pi], j=1, m} K_y(\Omega_c; \rho, \varphi) = K_{y, \text{opt}}(\Omega_c) \leq 1.$$

Очевидно, что $K_{y, \text{opt}}$ является неубывающей функцией от Ω_c , причем $K_{y, \text{opt}}(0) = 0$ и $K_{y, \text{opt}}(\pi) = 1$.

Таким образом, задача синтеза оптимального ИНЦФ, АЧХ которого удовлетворяет критерию максимальности K_y , сводится к поиску максимума сложной нелинейной функции, зависящей от $2m$ переменных.

Основная часть

Дискретная передаточная функция ИНЦФ порядка $2m$ с симметричной АЧХ, реализуемого в последовательной (каскадной) форме, имеет вид:

$$W_{2m}(z) = \prod_{j=1}^m (1 - z_j z^{-1})(1 - \bar{z}_j z^{-1}),$$

где z_j и \bar{z}_j – комплексно-сопряженные нули дискретной передаточной функции $W_{2m}(z)$:

$$z_j = \rho_j e^{i\varphi_j}, \quad \bar{z}_j = \rho_j e^{-i\varphi_j};$$

m – число каскадов второго порядка в цифровом фильтре.

Частотная характеристика этого фильтра:

$$\begin{aligned} H_{2m}(\Omega; \rho, \varphi) &= W_{2m}(e^{i\Omega}) = \prod_{j=1}^m (1 - \rho_j e^{i\varphi_j} e^{-i\Omega})(1 - \rho_j e^{-i\varphi_j} e^{-i\Omega}) = \\ &= \prod_{j=1}^m [1 - \rho_j \cos(\Omega - \varphi_j) + i\rho_j \sin(\Omega - \varphi_j)] \cdot [1 - \rho_j \cos(\Omega + \varphi_j) + i\rho_j \sin(\Omega + \varphi_j)], \end{aligned}$$

Амплитудно-частотная характеристика этого фильтра имеет вид:

$$\begin{aligned} A_{2m}(\Omega; \rho, \varphi) &= |H_{2m}(\Omega; \rho, \varphi)| = \prod_{j=1}^m \sqrt{1 + \rho_j^2 - 2\rho_j \cos(\Omega - \varphi_j)} \cdot \sqrt{1 + \rho_j^2 - 2\rho_j \cos(\Omega + \varphi_j)} = \\ &= \prod_{j=1}^m \sqrt{[2\rho_j \cos \Omega - (1 + \rho_j^2) \cos \varphi_j]^2 + (1 - \rho_j^2)^2 \sin^2 \varphi_j} \geq 0, \quad 0 \leq \Omega \leq \pi. \end{aligned} \quad (2)$$

$$A_{2m}(\Omega; \rho, \varphi) = 0 \text{ в точках } \Omega = \varphi_j \text{ при } \rho_j = 1, j = 1, 2, \dots, m..$$

Подставив в (1) выражение (2) для $A_{2m}(\Omega; \rho, \varphi)$, получим :

$$K_y(\Omega_c; \rho, \varphi) = \frac{\int_0^{\Omega_c} \prod_{j=1}^m [1 + \rho_j^2 - 2\rho_j \cos(\Omega' - \varphi_j)] \cdot [1 + \rho_j^2 - 2\rho_j \cos(\Omega' + \varphi_j)] d\Omega'}{\int_0^{\pi} \prod_{j=1}^m [1 + \rho_j^2 - 2\rho_j \cos(\Omega - \varphi_j)] \cdot [1 + \rho_j^2 - 2\rho_j \cos(\Omega + \varphi_j)] d\Omega} \quad (3)$$

Разделив в (3) числитель и знаменатель на $\prod_{j=1}^m \rho_j^2$ и обозначив $\rho_j + \frac{1}{\rho_j} = 2r_j$, получим:

$$\begin{aligned} K_y(\Omega_c; \rho, \varphi) &= \frac{\int_0^{\Omega_c} \prod_{j=1}^m [r_j - \cos(\Omega' - \varphi_j)] \cdot [r_j - \cos(\Omega' + \varphi_j)] d\Omega'}{\int_0^{\pi} \prod_{j=1}^m [r_j - \cos(\Omega - \varphi_j)] \cdot [r_j - \cos(\Omega + \varphi_j)] d\Omega} = \\ &= \frac{\int_0^{\Omega_c} \prod_{j=1}^m (r_j^2 - 2r_j \cos \Omega' \cos \varphi_j + \cos^2 \Omega' - \sin^2 \varphi_j) d\Omega'}{\int_0^{\pi} \prod_{j=1}^m (r_j^2 - 2r_j \cos \Omega \cos \varphi_j + \cos^2 \Omega - \sin^2 \varphi_j) d\Omega} \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначив:

$$\begin{aligned} F(\Omega; r, \varphi) &= \prod_{j=1}^m (r_j^2 - 2r_j \cos \Omega \cos \varphi_j + \cos^2 \Omega - \sin^2 \varphi_j) = \\ &= \prod_{j=1}^m [(\cos \Omega - r_j \cos \varphi_j)^2 + (r_j^2 - 1) \sin^2 \varphi_j] \geq 0, \end{aligned}$$

получим:

$$K_y(\Omega_c; r, \varphi) = \frac{\int_0^{\Omega_c} F(\Omega'; r, \varphi) d\Omega'}{\int_0^{\pi} F(\Omega; r, \varphi) d\Omega},$$

где $r = (r_1, \dots, r_m)$;

$$r_j = \frac{1}{2} \left(\rho_j + \frac{1}{\rho_j} \right) \geq 1.$$

Необходимые условия экстремума $K_y(\Omega_c; \rho, \varphi)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial K_y(\Omega_c; \rho, \varphi)}{\partial \rho_k} = \frac{\partial K_y(\Omega_c; r, \varphi)}{\partial r_k} \cdot \frac{dr_k}{d\rho_k} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho_k^2} \right) \cdot \frac{\partial K_y(\Omega_c; r, \varphi)}{\partial r_k} = 0, \\ \frac{\partial K_y(\Omega_c; r, \varphi)}{\partial \varphi_k} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Находим частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_y(\Omega_c; r, \varphi)}{\partial r_k} &= \frac{\int_0^{\Omega_c} d\Omega' \int_0^\pi \left[F(\Omega; r, \varphi) \frac{\partial F(\Omega'; r, \varphi)}{\partial r_k} - F(\Omega'; r, \varphi) \frac{\partial F(\Omega; r, \varphi)}{\partial r_k} \right] d\Omega}{\left[\int_0^\pi F(\Omega; r, \varphi) d\Omega \right]^2} = \\ &= \frac{2 \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) (r_k - \cos \Omega' \cos \varphi_k) d\Omega' \int_0^\pi F_k(\Omega; r, \varphi) (r_k^2 - 2r_k \cos \Omega \cos \varphi_k + \cos^2 \Omega - \sin^2 \varphi_k) d\Omega}{\left[\int_0^\pi F(\Omega; r, \varphi) d\Omega \right]^2} - \\ &= \frac{2 \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) (r_k^2 - 2r_k \cos \Omega' \cos \varphi_k + \cos^2 \Omega' - \sin^2 \varphi_k) d\Omega' \int_0^\pi F_k(\Omega; r, \varphi) (r_k - \cos \Omega \cos \varphi_k) d\Omega}{\left[\int_0^\pi F(\Omega; r, \varphi) d\Omega \right]^2} = \\ &= \frac{2 \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_0^\pi F_k(\Omega; r, \varphi) U_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) (\cos \Omega' - \cos \Omega) d\Omega}{\left[\int_0^\pi F(\Omega; r, \varphi) d\Omega \right]^2}, \\ \frac{\partial K_y(\Omega_c; r, \varphi)}{\partial \varphi_k} &= \frac{\int_0^{\Omega_c} d\Omega' \int_0^\pi \left[F(\Omega; r, \varphi) \frac{\partial F(\Omega'; r, \varphi)}{\partial \varphi_k} - F(\Omega'; r, \varphi) \frac{\partial F(\Omega; r, \varphi)}{\partial \varphi_k} \right] d\Omega}{\left[\int_0^\pi F(\Omega; r, \varphi) d\Omega \right]^2} = \\ &= \frac{2 \sin \varphi_k \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) (r_k \cos \Omega' - \cos \varphi_k) d\Omega' \int_0^\pi F_k(\Omega; r, \varphi) (r_k^2 - 2r_k \cos \Omega \cos \varphi_k + \cos^2 \Omega - \sin^2 \varphi_k) d\Omega}{\left[\int_0^\pi F(\Omega; r, \varphi) d\Omega \right]^2} - \\ &= \frac{2 \sin \varphi_k \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) (r_k^2 - 2r_k \cos \Omega' \cos \varphi_k + \cos^2 \Omega' - \sin^2 \varphi_k) d\Omega' \int_0^\pi F_k(\Omega; r, \varphi) (r_k \cos \Omega - \cos \varphi_k) d\Omega}{\left[\int_0^\pi F(\Omega; r, \varphi) d\Omega \right]^2} = \\ &= \frac{2 \sin \varphi_k \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_0^\pi F_k(\Omega; r, \varphi) V_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) (\cos \Omega' - \cos \Omega) d\Omega}{\left[\int_0^\pi F(\Omega; r, \varphi) d\Omega \right]^2}, \end{aligned}$$

$$\text{где } F_k(\Omega; r, \varphi) = \frac{F(\Omega; r, \varphi)}{r_k^2 - 2r_k \cos \Omega \cos \varphi_k + \cos^2 \Omega - \sin^2 \varphi_k};$$

$$U_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) = (r_k^2 + \sin^2 \varphi_k + \cos \Omega' \cos \Omega) \cos \varphi_k - r_k (\cos \Omega' + \cos \Omega);$$

$$V_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) = \cos \varphi_k (\cos \Omega' + \cos \Omega) - r_k \cos \Omega' \cos \Omega + r_k (r_k^2 - 1 - \cos^2 \varphi_k).$$

В точках области интегрирования, симметричных относительно прямой $\Omega' = \Omega$, подынтегральные функции в числителях выражений для частных производных принимают значения, одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку, поэтому:

$$\int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega; r, \varphi) U_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) (\cos \Omega' - \cos \Omega) d\Omega = 0,$$

$$\int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega; r, \varphi) V_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) (\cos \Omega' - \cos \Omega) d\Omega = 0. \quad (6)$$

Подставляя в условия (5) выражения для частных производных и учитывая (6), получаем четыре варианта систем нелинейных уравнений для определения параметров оптимального ИНЦФ:

при условиях $r_k > 1$ и $\sin \varphi_k > 0$:

$$\begin{cases} \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) U_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) (\cos \Omega' - \cos \Omega) d\Omega = 0, \\ \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) V_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) (\cos \Omega' - \cos \Omega) d\Omega = 0, \quad k = \overline{1, m} \end{cases} \quad (7)$$

при условии $r_k > 1$:

$$\begin{cases} \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) U_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) (\cos \Omega' - \cos \Omega) d\Omega = 0, \\ \sin \varphi_k = 0, \quad k = \overline{1, m} \end{cases} \quad (8)$$

при условии $\sin \varphi_k > 0$:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{\rho_k^2} = 0, \\ \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) V_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) (\cos \Omega' - \cos \Omega) d\Omega = 0, \quad k = \overline{1, m} \end{cases} \quad (9)$$

тривиальный вариант:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{\rho_k^2} = 0, \\ \sin \varphi_k = 0, \quad k = \overline{1, m} \end{cases} \quad (10)$$

Область интегрирования изображена на рис. 1.

Исследуем систему уравнений (7) на совместность. Рассмотрим сначала частный случай $m = 1$. В этом случае $F_1(\Omega; r, \varphi) = F_1(\Omega'; r, \varphi) = 1$ и система уравнений (7) принимает вид:

$$\begin{cases} \int_0^{\Omega_c} d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} (\cos \Omega' - \cos \Omega) \left[(r_1^2 + \sin^2 \varphi_1 + \cos \Omega' \cos \Omega) \cos \varphi_1 - r_1 (\cos \Omega' + \cos \Omega) \right] d\Omega = 0, \\ \int_0^{\Omega_c} d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} (\cos \Omega' - \cos \Omega) \left[\cos \varphi_1 (\cos \Omega' + \cos \Omega) - r_1 \cos \Omega' \cos \Omega + r_1 (r_1^2 - 1 - \cos^2 \varphi_1) \right] d\Omega = 0. \end{cases}$$

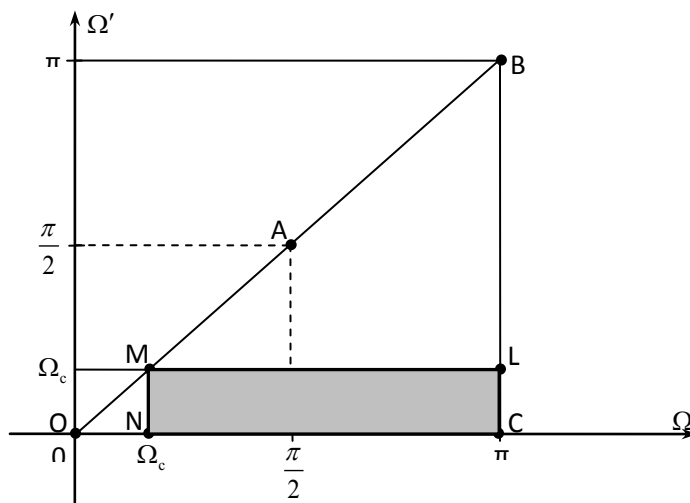


Рис. 1. Область интегрирования

После вычисления двойных интегралов эта система уравнений преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \pi \sin \Omega_c \left(r_1^2 \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \cos \varphi_1 - \cos^3 \varphi_1 - \frac{1}{2} r_1 \cos \Omega_c \right) = 0, \\ \pi \sin \Omega_c \left(r_1^3 - \frac{1}{2} r_1 - r_1 \cos^2 \varphi_1 + \frac{1}{2} \cos \varphi_1 \cos \Omega_c \right) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Складывая и вычитая уравнения в системе (11), после несложных преобразований имеем:

$$\begin{cases} (r_1 + \cos \varphi_1)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos \Omega_c), \\ (r_1 - \cos \varphi_1)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega_c). \end{cases} \quad (12)$$

Повторно сложив уравнения в системе (12), получим:

$$r_1^2 + \cos^2 \varphi_1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{откуда } r_1^2 = \frac{1}{2} - \cos^2 \varphi_1 \leq \frac{1}{2}.$$

Поскольку должно быть $r_1^2 \geq 1$, то полученное неравенство означает, что система уравнений (7) при $m = 1$ не имеет решения, т.е. несовместна.

Рассмотрим теперь общий случай. Складывая и вычитая уравнения системы (7), получим:

$$\begin{cases} \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) (\cos \Omega' - \cos \Omega) [U_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) + V_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k)] d\Omega = 0, \\ \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) (\cos \Omega' - \cos \Omega) [V_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) - U_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k)] d\Omega = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где $k = \overline{1, m}$;

$$\begin{aligned} U_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) + V_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) &= (r_k - \cos \varphi_k) \left[(r_k + \cos \varphi_k)^2 - (1 + \cos \Omega' + \cos \Omega + \cos \Omega' \cos \Omega) \right]; \\ V_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) - U_k(\Omega, \Omega'; r_k, \varphi_k) &= (r_k + \cos \varphi_k) \left[(r_k - \cos \varphi_k)^2 + \cos \Omega' + \cos \Omega - \cos \Omega' \cos \Omega - 1 \right]. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$u = \cos \Omega + \cos \Omega', \quad (14)$$

$$v = \cos \Omega \cdot \cos \Omega', \quad (15)$$

Формулы (14), (15) задают преобразование прямоугольной области CLMN в плоскости с прямоугольными осями Ω и Ω' (рис. 1) в треугольную область $C'L'M'N'$ на плоскости с прямоугольными осями u и v , изображенную на рис. 2. Ниже будет показано, что точка M' лежит на прямой $C'N'$.

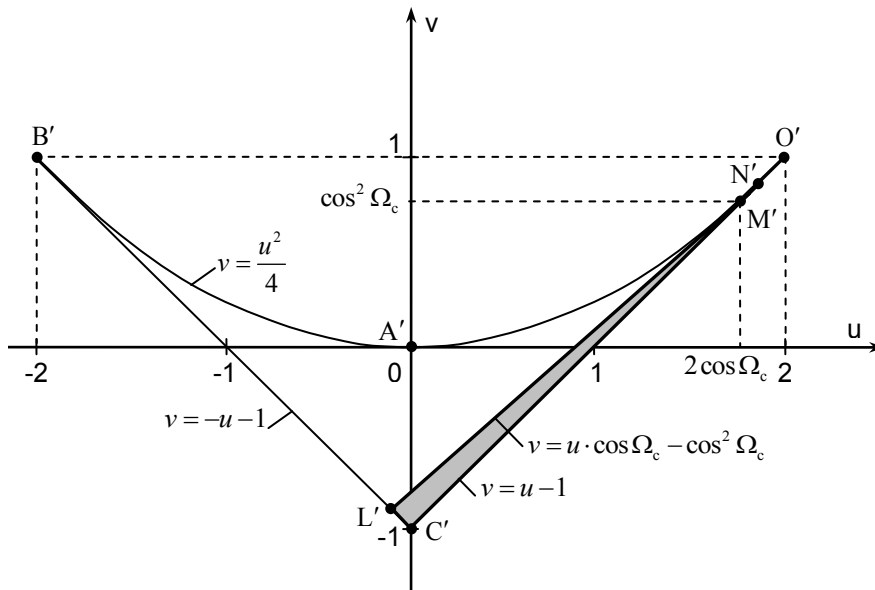


Рис. 2. Область на плоскости uv , соответствующая области $OABC$ на плоскости $\Omega\Omega'$

В табл. 1 приведены координаты характерных точек области $OABC$ на плоскости $\Omega\Omega'$ и соответствующих им точек области $O'A'B'C'$ на плоскости uv .

Таблица 1

Характерные точки областей $OABC$ и $O'A'B'C'$

Координатная плоскость $\Omega\Omega'$			Координатная плоскость uv		
Точка	Координаты		Точка	Координаты	
	Ω	Ω'		u	v
O	0	0	O'	2	1
A	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	A'	0	0
B	π	π	B'	-2	1
C	π	0	C'	0	-1
L	π	Ω_c	L'	$\cos \Omega_c - 1$	$-\cos \Omega_c$
M	Ω_c	Ω_c	M'	$2 \cos \Omega_c$	$\cos^2 \Omega_c$
N	Ω_c	0	N'	$\cos \Omega_c + 1$	$\cos \Omega_c$

Присоединяя поочередно к уравнениям (14), (15) уравнение каждой границы области $OABC$ и исключая переменные Ω и Ω' из полученных систем трех уравнений,

получаем уравнения соответствующих границ области $O'A'B'C'$. Например, для границы OAB имеем:

$$\begin{cases} u = \cos \Omega + \cos \Omega', \\ v = \cos \Omega \cdot \cos \Omega', \\ \Omega' = \Omega, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u = 2 \cos \Omega, \\ v = \cos^2 \Omega, \end{cases}$$

откуда получаем уравнение параболы $v = \frac{u^2}{4}$.

Уравнения границ области $OABC$ и соответствующих им границ области $O'A'B'C'$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

Уравнения границ областей $OABC$ и $O'A'B'C'$

Координатная плоскость $\Omega\Omega'$		Координатная плоскость uv	
Граница	Уравнение	Граница	Уравнение
OAB	$\Omega' = \Omega$	$O'A'B'$	$v = \frac{u^2}{4}$
BC	$\Omega = \pi$	$B'C'$	$v = -u - 1$
OC	$\Omega' = 0$	$O'C'$	$v = u - 1$
LM	$\Omega' = \Omega_c$	$L'M'N'$	$v = u \cdot \cos \Omega_c - \cos^2 \Omega_c$
MN	$\Omega = \Omega_c$		

В точке M' $\left. \frac{dv}{du} \right|_{u=2\cos\Omega_c} = \cos\Omega_c$, следовательно, прямая $L'M'N'$ в этой точке касается параболы $O'A'B'$.

С учетом выражений (14), (15) система уравнений (13) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} (r_k - \cos \varphi_k) \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) (\cos \Omega' - \cos \Omega) [(r_k + \cos \varphi_k)^2 - u - v - 1] d\Omega = 0, \\ (r_k + \cos \varphi_k) \int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) (\cos \Omega' - \cos \Omega) [(r_k - \cos \varphi_k)^2 + u - v - 1] d\Omega = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Исследуем области знакопостоянства подынтегральных функций в уравнениях (16). Поскольку $F_k(\Omega; r, \varphi) \geq 0$, $F_k(\Omega'; r, \varphi) \geq 0$, $r_k \pm \cos \varphi_k \geq 0$ и $\cos \Omega' - \cos \Omega \geq 0$ (так как в области $CLMN$ $\Omega' \leq \Omega$), то знаки подынтегральных функций в уравнениях (16) определяются соответственно знаками выражений:

$$(r_k + \cos \varphi_k)^2 - u - v - 1 \quad (17)$$

И

$$(r_k - \cos \varphi_k)^2 + u - v - 1 \quad (18)$$

Приравняв нулю выражение (17), получим уравнение границы, разделяющей области знакопостоянства подынтегральной функции в первом уравнении системы (16), представляющую собой прямую линию на плоскости uv , параллельную прямой $B'C'$:

$$v = -u + (r_k + \cos \varphi_k)^2 - 1. \quad (19)$$

Аналогично находим уравнение границы областей знакопостоянства для подынтегральной функции во втором уравнении системы (16):

$$v = u + (r_k - \cos \varphi_k)^2 - 1. \quad (20)$$

Это уравнение прямой линии на плоскости uv , параллельной прямой $O'C'$.

Для того, чтобы система уравнений (16) не имела решения, необходимо, чтобы хотя бы одна из подынтегральных функций в (16) сохраняла свой знак в пределах области $C'L'M'N'$. А для этого достаточно, чтобы прямые (19) и (20) не пересекали одновременно эту область.

Предельные положения прямых (19), (20), при которых они имеют с областью $C'L'M'N'$ соответственно одну общую точку N' , L' :

$$v = -u + 2 \cos \Omega_c + 1, \quad (21)$$

$$v = u - 2 \cos \Omega_c + 1. \quad (22)$$

Сравнивая уравнения (21) и (22) соответственно с уравнениями (19) и (20), получаем условия, при которых прямые (19) и (20) не пересекают область $C'L'M'N'$:

$$(r_k + \cos \varphi_k)^2 - 1 > 1 + 2 \cos \Omega_c,$$

$$(r_k - \cos \varphi_k)^2 - 1 > 1 - 2 \cos \Omega_c,$$

или

$$r_k + \cos \varphi_k > 2 \cos \frac{\Omega_c}{2}, \quad (23)$$

$$r_k - \cos \varphi_k > 2 \sin \frac{\Omega_c}{2}. \quad (24)$$

При этом должны выполняться дополнительные условия:

$$r_k > 1 \text{ и } -1 < \cos \varphi_k < 1, \quad k = \overline{1, m}. \quad (25)$$

На рис. 3 в координатной плоскости с прямоугольными осями $\cos \varphi_k$, r_k изображены границы областей решений для каждого из неравенств (23) – (25). Штриховкой обозначены те полуплоскости, точки которых удовлетворяют соответствующим неравенствам (23) – (25).

Находим координаты точки D, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} r_k + \cos \varphi_k = 2 \cos \frac{\Omega_c}{2}, \\ r_k - \cos \varphi_k = 2 \sin \frac{\Omega_c}{2}. \end{cases} \quad (26)$$

Складывая и вычитая уравнения системы (26), получаем:

$$\begin{cases} \cos \varphi_k = \cos \frac{\Omega_c}{2} - \sin \frac{\Omega_c}{2}, \\ r_k = \cos \frac{\Omega_c}{2} + \sin \frac{\Omega_c}{2}. \end{cases} \quad (27)$$

Возведя в квадрат обе части каждого уравнения системы (27) и сложив их, получим:

$$r_k^2 + \cos^2 \varphi_k = 2. \quad (28)$$

Следовательно, точка D лежит на дуге окружности с центром в начале координат и радиусом, равным $\sqrt{2}$.

Анализируя рис. 3, приходим к следующему заключению. В точках $(\cos \varphi_k, r_k)$, лежащих внутри четырехугольника ABCD, выполняется только условие (24), т.е. только прямая (20) не пересекает область $C'L'M'N'$. Следовательно, подынтегральная функция только во втором уравнении системы (16) сохраняет в области интегрирования свой знак при любых значениях $\cos \varphi_k, r_k$ из области ABCD.

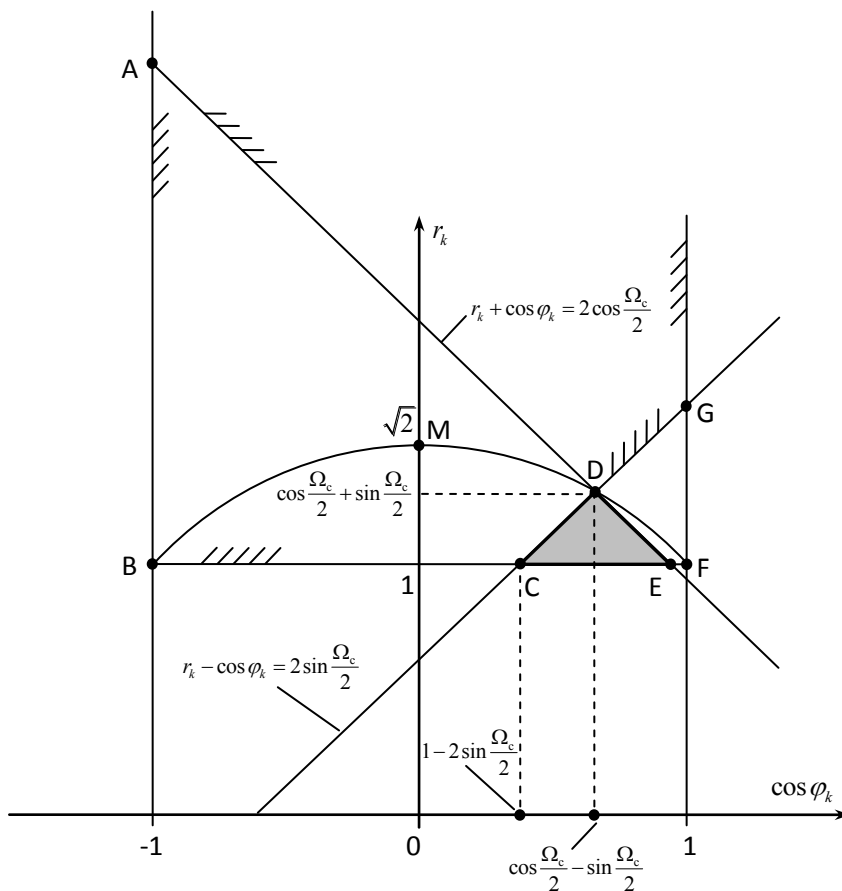


Рис. 3. Графическое решение системы неравенств (23) – (25)

Аналогично для точек внутри DEFG выполняется только условие (23), т.е. только прямая (19) проходит вне области $C'L'M'N'$ и свой знак в области интегрирования сохраняет только подынтегральная функция в первом уравнении системы (16). Для точек $(\cos \varphi_k, r_k)$ неограниченной области ADG выполняются оба условия (23), (24), т.е. обе прямые (19), (20) проходят вне области $C'L'M'N'$ и подынтегральные функции в обоих уравнениях системы (16) сохраняют свои знаки в области интегрирования.

Таким образом, установлена несовместность системы уравнений (16), а, значит, и системы уравнений (7) для значений $\cos \varphi_k, r_k$ в областях ABCD, DEFG и ADG. При

$r_k > \cos \frac{\Omega_c}{2} + \sin \frac{\Omega_c}{2}$ система уравнений (7) несовместна при любых $\cos \varphi_k$, а при

$\cos \varphi_k < 1 - 2 \sin \frac{\Omega_c}{2}$ система уравнений (7) несовместна при любых $r_k > 1$. Что касается значений $\cos \varphi_k, r_k$, принадлежащих треугольной области CDE, то для них вопрос о со-

вместности системы уравнений (16) остается открытым и требует дополнительного исследования, поскольку в этом случае подынтегральные функции в уравнениях системы (16) не сохраняют свои знаки в области интегрирования. Однако ввиду незначительных размеров области CDE при малых значениях Ω_c и установленной несовместности системы уравнений (16) в частном случае при $m=1$, с большой вероятностью можно предположить, что и в этой области система уравнений (16) несовместна.

Исследуем теперь на совместность систему уравнений (8). В этом случае $\sin \varphi_k = 0$, $\cos \varphi_k = \pm 1$ и первое уравнение системы (8) имеет вид:

$$\int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) U_k(\Omega, \Omega'; r_k) (\cos \Omega' - \cos \Omega) d\Omega = 0, \quad k = \overline{1, m} \quad (29)$$

$$\text{где } F_k(\Omega; r, \varphi) = \frac{F(\Omega; r, \varphi)}{r_k^2 \mp \dots} = \frac{F(\Omega; r, \varphi)}{(r_k \mp \dots)},$$

$$U_k(\Omega, \Omega'; r_k) = \pm(r_k^2 + \cos \Omega' \cos \Omega) - r_k(\cos \Omega' + \cos \Omega).$$

С учетом выражений (14), (15) уравнение (29) принимает следующий вид:

$$\int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) (\cos \Omega' - \cos \Omega) [\pm(r_k^2 + v) - r_k u] d\Omega = 0, \quad k = \overline{1, m} \quad (30)$$

Исследуем области знакопостоянства подынтегральной функции в уравнении (30). Поскольку $F_k(\Omega; r, \varphi) \geq 0$, $F_k(\Omega'; r, \varphi) \geq 0$ и $\cos \Omega' - \cos \Omega \geq 0$, то знак подынтегральной функции в уравнении (30) определяется знаком выражения:

$$\pm(r_k^2 + v) - r_k u. \quad (31)$$

Приравняв нулю выражение (31), получаем уравнение границы, разделяющей области знакопостоянства подынтегральной функции в уравнении (30), представляющую собой прямую линию на плоскости uv :

$$\pm(r_k^2 + v) - r_k u = 0,$$

$$\text{Или} \quad v = \pm r_k u - r_k^2. \quad (32)$$

При $\cos \varphi_k = 1$ уравнение (32) принимает вид:

$$v = r_k u - r_k^2. \quad (33)$$

Определяем координаты точки пересечения прямой $L'M'N'$ с прямой (33):

$$\begin{cases} v = u \cdot \cos \Omega_c - \cos^2 \Omega_c, \\ v = r_k u - r_k^2, \end{cases}$$

откуда находим:

$$\begin{cases} u = r_k + \cos \Omega_c > 1 + \cos \Omega_c, \\ v = r_k \cos \Omega_c > \cos \Omega_c. \end{cases}$$

Следовательно, при любом значении $r_k > 1$ точка пересечения прямых $L'M'N'$ и (33) лежит выше точки N' , т.е. вне области $C'L'M'N'$.

При $\cos \varphi_k = -1$ уравнение (32) принимает вид:

$$v = -r_k u - r_k^2. \quad (34)$$

Координаты точки пересечения прямых $L'M'N'$ и (34) в этом случае равны:

$$\begin{cases} u = \cos \Omega_c - r_k < \cos \Omega_c - 1, \\ v = -r_k \cos \Omega_c < -\cos \Omega_c. \end{cases}$$

Следовательно, при любом значении $r_k > 1$ точка пересечения прямых $L'M'N'$ и (34) лежит ниже точки L' , т.е. вне области $C'L'M'N'$.

Таким образом, при любом $r_k > 1$ подынтегральное выражение в уравнении (29) в пределах области интегрирования сохраняет свой знак, т.е. система уравнений (8) несовместна.

Далее рассмотрим систему уравнений (9). Из первого уравнения этой системы получаем:

$$\frac{1}{\rho_k^2} = 1, \text{ т.е. } \rho_k = 1, \quad k = \overline{1, m}.$$

Тогда $r_k = \frac{1}{2} \left(\rho_k + \frac{1}{\rho_k} \right) = 1, \quad k = \overline{1, m}$. В этом случае второе уравнение системы (9)

принимает следующий вид:

$$\int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) V_k(\Omega, \Omega'; \varphi_k) (\cos \Omega' - \cos \Omega) d\Omega = 0, \quad k = \overline{1, m} \quad (35)$$

$$\text{где } F_k(\Omega; r, \varphi) = \frac{F(\Omega; r, \varphi)}{1 - 2 \cos \Omega \cos \varphi_k + \cos^2 \Omega - \sin^2 \varphi_k};$$

$$V_k(\Omega, \Omega'; \varphi_k) = \cos \varphi_k (\cos \Omega' + \cos \Omega) - \cos \Omega' \cos \Omega - \cos^2 \varphi_k.$$

С учетом выражений (14), (15) уравнение (35) принимает следующий вид:

$$\int_0^{\Omega_c} F_k(\Omega'; r, \varphi) d\Omega' \int_{\Omega_c}^{\pi} F_k(\Omega; r, \varphi) (\cos \Omega' - \cos \Omega) (u \cos \varphi_k - v - \cos^2 \varphi_k) d\Omega = 0. \quad (36)$$

Исследуем подынтегральную функцию в уравнении (36) на предмет ее знакопостоянства в области интегрирования. Знак подынтегральной функции в уравнении (36) определяется знаком выражения:

$$u \cos \varphi_k - v - \cos^2 \varphi_k. \quad (37)$$

Приравняв выражение (37) нулю, получаем уравнение граничной прямой, разделяющей области, где подынтегральная функция принимает значения противоположных знаков:

$$v = u \cos \varphi_k - \cos^2 \varphi_k. \quad (38)$$

Определяем координаты точки пересечения прямой $L'M'N'$ с прямой (38):

$$\begin{cases} v = u \cdot \cos \Omega_c - \cos^2 \Omega_c, \\ v = u \cos \varphi_k - \cos^2 \varphi_k, \end{cases}$$

откуда находим:

$$\begin{cases} u = \cos \Omega_c + \cos \varphi_k, \\ v = \cos \Omega_c \cos \varphi_k. \end{cases}$$

Поскольку $\cos \Omega_c - 1 < \cos \Omega_c + \cos \varphi_k < \cos \Omega_c + 1$ и $-\cos \Omega_c < \cos \Omega_c \cos \varphi_k < \cos \Omega_c$, то точка пересечения прямых $L'M'N'$ и (38) всегда находится между точками L' и N' , т.е. прямая (38) всегда пересекает область $S'L'M'N'$. Поэтому нельзя отрицать существование решения системы уравнений (9).

Таким образом получен следующий важный результат: нули дискретной передаточной функции инфранизкочастотного нерекурсивного цифрового фильтра порядка $2m$ с симметричной АЧХ, максимизирующие величину критерия (3), лежат в комплексной z -плоскости на единичной окружности, т.е. все $\rho_j = 1, j = \overline{1, m}$.

С учетом этого факта вдвое уменьшается размерность задачи нелинейной оптимизации (необходимо найти только $\varphi_j, j = \overline{1, m}$), а также существенно упрощается выражение (3) для коэффициента узкополосности K_δ :

$$K_y(\Omega_c; \varphi) = \frac{\int_0^{\Omega_c} \prod_{j=1}^m [1 - \cos(\Omega' - \varphi_j)] \cdot [1 - \cos(\Omega' + \varphi_j)] d\Omega'}{\int_0^{\pi} \prod_{j=1}^m [1 - \cos(\Omega - \varphi_j)] \cdot [1 - \cos(\Omega + \varphi_j)] d\Omega} = \frac{\int_0^{\Omega_c} \prod_{j=1}^m (\cos \Omega' - \cos \varphi_j)^2 d\Omega'}{\int_0^{\pi} \prod_{j=1}^m (\cos \Omega - \cos \varphi_j)^2 d\Omega}. \quad (39)$$

В этом случае дискретная передаточная функция инфранизкочастотного цифрового фильтра порядка $2m$ с симметричной АЧХ, реализуемого в последовательной (каскадной) форме, имеет вид:

$$W_{2m}(z^{-1}) = \prod_{j=1}^m (1 - z_j z^{-1})(1 - \bar{z}_j z^{-1}) = \prod_{j=1}^m (1 - 2 \cos \varphi_j z^{-1} + z^{-2}) = \sum_{k=0}^{2m} a_k z^{-k},$$

где z_j и \bar{z}_j – комплексно-сопряженные нули дискретной передаточной функции $W_{2m}(z^{-1})$:

$$z_j = e^{i\varphi_j}, \quad \bar{z}_j = e^{-i\varphi_j}.$$

Коэффициенты $a_k, k = \overline{0, 2m}$ вычисляются по следующему итерационному алгоритму:

$$\begin{aligned} a_0^{(n+1)} &= a_0^{(n)}, \\ a_1^{(n+1)} &= a_1^{(n)} + a_0^{(n)} p_{n+1}, \\ &\dots \\ a_i^{(n+1)} &= a_i^{(n)} + a_{i-1}^{(n)} p_{n+1} + a_{i-2}^{(n)}, \quad i = \overline{2, 2n}, \\ &\dots \\ a_{2n+1}^{(n+1)} &= a_{2n}^{(n)} p_{n+1} + a_{2n-1}^{(n)}, \\ a_{2n+2}^{(n+1)} &= a_{2n}^{(n)}, \\ n &= 1, 2, \dots, m-1, \end{aligned}$$

где $p_n = -2 \cos \varphi_n$.

Начальные значения коэффициентов равны:

$$a_0^{(1)} = a_2^{(1)} = 1; \quad a_1^{(1)} = p_1.$$

Для выделения из речевого сигнала компонент с частотами $\pm \Omega_f$ необходимо использовать два включенных параллельно узкополосных цифровых фильтра, настроенных на частоты $+\Omega_f$ и $-\Omega_f$ соответственно. Эти фильтры получаются из инфранизко-частотного фильтра путем поворота на комплексной z-плоскости всех его нулей соответственно на углы $+\Omega_f$ и $-\Omega_f$. Их общая дискретная передаточная функция имеет следующий вид:

$$W_{2m}(z^{-1}) = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^m (1 - z_j e^{i\Omega_f} z^{-1}) (1 - \bar{z}_j e^{i\Omega_f} z^{-1}) + \frac{1}{2} \prod_{j=1}^m (1 - z_j e^{-i\Omega_f} z^{-1}) (1 - \bar{z}_j e^{-i\Omega_f} z^{-1}) = \\ = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^m (1 - 2 \cos \varphi_j e^{i\Omega_f} z^{-1} + e^{i2\Omega_f} z^{-2}) + \frac{1}{2} \prod_{j=1}^m (1 - 2 \cos \varphi_j e^{-i\Omega_f} z^{-1} + e^{-i2\Omega_f} z^{-2}).$$

Обозначив $u = e^{i\Omega_f} z^{-1}$, $v = e^{-i\Omega_f} z^{-1}$, получим:

$$W_{2m}(z^{-1}) = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^m (1 - p_j u + u^2) + \frac{1}{2} \prod_{j=1}^m (1 - p_j v + v^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m} a_k u^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m} a_k v^k = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m} a_k (u^k + v^k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m} a_k (e^{ik\Omega_f} + e^{-ik\Omega_f}) z^{-k} = \sum_{k=0}^{2m} a_k \cos k\Omega_f z^{-k}.$$

Таким образом, для получения коэффициентов узкополосного цифрового фильтра, настроенного на частоты $\pm \Omega_f$, достаточно умножить коэффициенты a_k инфранизко-частотного фильтра на $\cos k\Omega_f$.

Практическое применение

Исходя из модельных представлений, характеризующих передачу и обработку информации в слуховой системе человека [9], можно построить аналогичное техническое устройство. Входная часть такого устройства представляет собой набор большого числа узкополосных нерекурсивных цифровых фильтров с линейными фазочастотными характеристиками и перекрывающимися полосами пропускания. Каждый такой фильтр моделирует одновременно работу базилярной мембраны и механизм синфазного суммирования, т.е. фактически имеет место моделирование функций спиронейронов. Фильтры располагаются в порядке возрастания резонансных частот, изменяющихся в интервале до 1000 Гц по линейному, а свыше 1000 Гц – по логарифмическому закону, и осуществляют, как и базилярная мембрана, преобразование частота – место. Сигналы на выходах фильтров образуют широкий фронт возбуждения. Ширина фронта Δx определяется шириной полосы пропускания входных фильтров $\Delta \Omega$. Максимум фронта находится в месте расположения фильтра с резонансной частотой, ближайшей к частоте пришедшего однотонового сигнала.

Вывод

Узкополосные нерекурсивные цифровые фильтры, синтезированные с помощью предлагаемой методики, могут использоваться для анализа речевых сигналов с целью верификации и идентификации дикторов. Кроме того, они могут найти применение в системах диагностики и непрерывного контроля за техническим состоянием деталей и узлов машин, а также использоваться для анализа био-электрических сигналов.

Литература

1. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. Практический подход. – М.: "Вильямс", 2004. – 992 с.
2. Антонию А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с., ил.
3. Белодедов М.В. Методы проектирования цифровых фильтров: Учебное пособие. – Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета, 2004. – 60 с.
4. Гадзиковский В.И. Методы проектирования цифровых фильтров. – М. : Горячая линия-Телеком, 2007. - 413 с.
5. Каппелини В., Константинодис А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение: Пер. с англ.— М.: Энергоатомиздат, 1983.— 360 с., ил.
6. Кийко А.В. Синтез оптимального узкополосного нерекурсивного цифрового фильтра // Вестник Восточноукр. нац. ун-та им. В. Даля – Луганск, 2004. – № 11. – с. 205-209.
7. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 607 с.
8. Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьева Е.Б. Основы цифровой обработки сигналов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 733 с.
9. Цвикер Э., Фельдкеллер Р. Ухо как приемник информации. Перевод с немецкого под редакцией Б. Г. Белкина. – М.: Связь, 1971. – 255 с.

Надійшла до редколегії 05.02.2013 р.

Рецензент: д.т.н., проф. Петров А.С.

О.В. Кійко

СИНТЕЗ ВУЗЬКОСМУГОВИХ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ ДЛЯ АНАЛІЗУ МОВНИХ СИГНАЛІВ

У статті розроблено методику синтезу вузькосмугових нерекурсивних цифрових фільтрів, що задовольняють запропонованому критерію оптимальності. Доведено, що нулі дискретної передавальної функції таких фільтрів розташовуються в комплексній z-площині на колі одиничного радіуса. Наведено рекомендації для практичного використання одержаних результатів. Рис. 3, табл. 2, дж. 9.

Ключові слова: нерекурсивний цифровий фільтр, дискретна передавальна функція, оптимізація.

A.V. Kijko

SYNTHESIS OF NARROW-BAND DIGITAL FILTERS FOR THE ANALYSIS OF VOCAL SIGNALS

The paper developed a method of synthesis of narrow-band non-recursive digital filters that meet the proposed criteria of optimality. It is proved that the zeros of the discrete transfer function of such filters are arranged in a complex z-plane on the circumference of single radius. The recommendations for the practical use of the results. Fig. 3, table 2, ref. 9.

Keywords: non-recursive digital filter, the discrete transfer function, optimization.