УДК 004

А.А. Кроль[1], О.С. Кроль[1]

[1]*Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля*

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ В СРЕДЕ SIGNAL PROCESSING

В статье рассмотрены вопросы исследования полигармонических сигналов колебательных систем.

**Ключевые слова:** сигнал, гармоника, колебание, цифровая обработка сигналов.

При решении задач динамики колебательных систем одним из распространенных законов изменения входной характеристики x(t) является полигармонический закон, описывающий процесс, представляющий сумму постоянной составляющей и определенного числа гармоник. Как известно, наличие периодических составляющих в случайном процессе проявляется в виде дельта-функций в его спектральной плотности (острые пики). Эти пики, особенно при небольших амплитудах, можно ошибочно приписать узкополосному случайному шуму. Но в оценке спектральной плотности вычисленной при высоком разрешении по частоте, периодические составляющие даже небольшой амплитуды проявляются в виде острых максимумов, которые будут расти пропорционально уменьшению полосы пропускания.

Рассмотрим входной сигнал F(t) как полигармонический сигнал с амплитудами $F_1$ и $F_2$: $F_i(t)=F_1\sin2\pi f_1t+ F_2\sin2\pi f_2t$, который смешивается с процессом на выходе генератора случайного шума (сигнал типа “белый шум”). Изменение входного сигнала во времени на входе системы имеет сложный характер, моделируемый шумовым сигналом. С помощью программной среды “Signal processing” процедура воспроизведения сложного сигнала и выделение периодичности осуществляется следующим образом:1) задать интервал и дискретность временной оси: t=0:0,001:0,6; 2) ввести выражение для сигнала $F_i(t)$; 3) смоделировать случайную составляющую типа “белый шум” с помощью команды “rand(‘normal’)” с нулевым средним и единичной дисперсией; 4) объединить сигнал путем наложения случайной составляющей на гармоническую: $Z_i(t)=F_i(t)+2rand(t)$ ; 5) вычислить спектральную плотность $S_F(i\omega)$: $S_F(i\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{\overline{Z}_i(i\omega)\cdot\overline{Z}_i^{\,*}(i\omega)}{2T}$ , где $\overline{Z}_i(i\omega)=\overline{Z}_i^{*}(-i\omega)$ — комплексно-сопряженные функции, представляющие преобразование Фурье для функции $Z_i(t)$.

Для реализации последнего этапа расчета и последующей графической интерпретации случайной функции воспользуемся дискретным преобразованием Фурье. При числе отсчетов N=256 (256- точечное быстрое преобразование Фурье (БПФ)) реализовать БПФ выходного сигнала системы $y_i(t)$ можно с помощью Matlab - команды “fft” : $\overline{Z}_i(i\omega)=\mathrm{fft}\,(y_i(t),256)$.

Для первых 128 точек (другие 128 точек симметричны) спектра $S_F(i\omega)$ графическое представление осуществляется с помощью команд: f=1000·(0:127)/256; plot (f,

$S_F(i\omega)(1:128)$). На графике синтезированного сигнала $Z_i(t)$ и графике спектральной плотности фиксируется выделение двух гармоник, что было достигнуто за счет сокращения шага дискретизации и фильтрации шумовых высокочастотных составляющих. Как известно, в случае, если область интегрирования не ограничена, то преобразование Фурье $\bar{y}_i(j\omega)$ не существует для стационарного случайного процесса, выражаемого ансамблем реализаций $\xi(t)$. На практике параметр $\xi(t)$ задается на интервале конечной длины T, так что $\bar{y}(j\omega)$ оценивается по финитному (дискретному) преобразованию Фурье: $\bar{y}_T(j\omega) = A(j\omega, T) = \int_0^T \xi(t)e^{-j\omega t}dt$. В результате конечного преобразования Фурье получается текущий спектр $A(j\omega,T)$ сигнала $y_i(j\omega)$. Ограничение интервала наблюдения сопровождается искажением спектра, которое моделируется прямоугольной весовой функцией (прямоугольным окном) $u(t)=\{1\le t\ge T;\ 0$, в остальных случаях$\}$ .

Пусть сигнал $\xi(t)$ определен на интервале $t\in(-\infty, \infty)$ и характеризуется преобразованием Фурье $A(j\omega)$. Если время наблюдения ограничено промежутком $t\in[-T/2, T/2]$, то фактически наблюдается сигнал $\xi_1(t)= \xi(t)\cdot u(t)$ с частотой $\omega_1$. Интегральное преобразование Фурье $F|\xi_1(t)|$ (спектр) этого сигнала представляется в виде:

$$F|\xi_1(t)| = A_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\xi(t)\,w(t)e^{-j\omega t}dt = T\int_{-\infty}^{\infty} A[j(\omega-\omega_1)]\frac{\sin(\omega_1 T/2)}{\omega_1 T/2}d\omega_1.$$

Переход к конечному интервалу T приводит к свертке преобразования Фурье исходного сигнала $\xi(t)$ бесконечной длины с функцией вида $\mathrm{sinc}(x)=(\sin x)/x$, где $x=\omega T/2$, вследствие чего вычисленный спектр сигнала $\xi(t)$ оказывается искаженным (растекание спектра). Для гармонического выходного сигнала $\xi(t)$, двухсторонний спектр состоит из двух компонент $A(j\omega) = \frac{\xi_0^2}{4}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$, представленных в виде двух дельта - функций, локализованных в точках $\omega=-\omega_0$ и $\omega=\omega_0$. Анализ этого сигнала на ограниченном интервале дает текущий спектр $A_1(j\omega)$:

$$A_1(j\omega) = \frac{\xi_0^2}{4}\left[\frac{\sin[T(\omega+\omega_0)/2}{T(\omega+\omega_0)/2} + \frac{\sin[T(\omega-\omega_0)/2}{T(\omega-\omega_0)/2}\right].$$

Этот спектр является непрерывным и рассредоточен на оси частот. Его форма определяется суммой двух функций $\mathrm{sinc}(\omega T/2)$, имеющих колебательный характер с затухающими боковыми лепестками. Основные лепестки функций $\mathrm{sinc}(\omega T/2)$ имеют уровни, равные $\xi_0^2 T/2$, а их центры совпадают с частотами $\omega = \pm\,\omega_0$. С увеличением интервала T происходит сжатие спектра, который концентрируется вблизи частот $\omega = \pm\,\omega_0$.

Для улучшения качества исследуемых спектров сигналов проведем сравнительный анализ спектральных окон. Анализ спектрального прямоугольного (rectangular window) окна показывает, что оно имеет лепестковую форму — главный и боковые лепестки. Наличие боковых лепестков приводит к просачиванию составляющих, частоты которых далеки от главного максимума спектрального окна, и к сильному искажению спектральной оценки. Величина уровня К (дБ): $K = 20 \log A(0)/A_1$ , где $A_1$ - максимальное значение модуля наибольшего из боковых лепестков спектрального окна. Для рассматриваемого случая прямоугольного окна максимальный уровень боковых лепестков составляет 0,217 (или -13,27 дБ в логарифмическом масштабе), а скорость спадания боковых максимумов равна 18 дБ на октаву ($\omega_2/\omega_1=2$). Максимумы боковых лепестков медленно понижаются до уровня 0,004 (или до -48 дБ) на частоте, равной половине частоты дискретизации. Использование прямоугольной весовой функции во временной области ведет к утечке энергии из основного в боковые лепестки функции соответствующего спектрального окна. Поскольку половины боковых лепестков спектрального окна имеют отрицательные значения, то возникает возможность получения ошибочных (отрицательных по знаку) статистических оценок спектральных характеристик (выборочных спектров). Это обстоятельство обусловлено величиной экстремальных значений первых двух лепестков, которые составляют в сумме около 20% максимума главного лепестка. Чтобы избавиться от утечки энергии в боковые лепестки, необходимо использовать более сложные весовые функции.

Ширина главного лепестка частотной характеристики окна Хэмминга в два раза больше, чем для прямоугольного окна. Вместе с тем максимальный уровень боковых лепестков значительно ниже, чем у характеристики прямоугольного окна и составляют 0,0074 (или -42,7 дБ), а огибающая максимумов боковых лепестков падает до уровня около 0,000059 (или - 65 дБ) на частоте, равной половине частоты дискретизации. Таким образом, для окна Хэмминга 99,96% общей энергии спектра содержится в главном лепестке.

Окно Кайзера характеризуется еще более интенсивным спаданием боковых максимумов, однако ширина главного лепестка (соответствует расширению переходной полосы фильтра) в 1,5 раза превышает соответствующий параметр окна Хэмминга. Для окна Кайзера уровень наибольшего бокового лепестка составляет 0,00133 (или -57 дБ), а огибающая максимумов боковых лепестков падает до уровня около 0,00002 (или -94 дБ).

Использование спектральных окон Хэмминга и Хэннинга позволяет снизить дисперсию спектральной оценки и повысить эффективность оценок в задачах динамики колебательных систем.

**Литература:**


1. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – Киев: Вища школа, 1983. – 455 с.
2. Каганов В.И. Радиотехника+компьютер+Mathcad. – М.: Горячая линия - Телеком, 2001. – 416 с.
3. Иванов В.А. и др. Математические основы теории автоматического регулирования. Учеб. пособие для вузов. / Под ред. Чемоданова Б.К. – М.: Высшая школа, 1971. – 808 с.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.



*Надійшла до редколегії 25.03.2013 р.*

***Рецензент:*** д.т.н., проф. Петров О.С.



**А.О. Кроль, О.С. Кроль**


**ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЛІГАРМОНІЧЕСКІХ СИГНАЛІВ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ В СЕРЕДОВИЩІ SIGNAL PROCESSING**


У статті розглянуті питання дослідження полігармонічних сигналів коливальних систем.



**Ключевые слова:** сигнал, гармоніка, коливання, цифрова обробка сигналів.



**A.A. Krol, O.S. Krol**


**RESEARCHING OF POLYHARMONIC VIBRATION SIGNALS IN SIGNAL PROCESSING SOFTWARE**


The questions of the study field of harmonic signals oscillatory systems.



**Keywords**: signal, harmonic oscillation, digital signal processing.