

**В. К. Чибіряков**, *д-р техн. наук, професор,*  
*завідувач кафедри вищої математики,*  
**А. М. Станкевич**, *канд. техн. наук, професор,*  
*завідувач кафедри опору матеріалів,*  
**В. С. Староверов**, *канд. техн. наук,*  
*професор кафедри інженерної геодезії,*  
**Г. С. Акчуріна**, *асп. кафедри інженерної геодезії,*  
**О. А. Шорін**, *асп. кафедри опору матеріалів*  
*Київський національний університет будівництва і архітектури*

## **ПРО ОДНУ РОЗРАХУНКОВУ МОДЕЛЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ДАМБ І ГРЕБЕЛЬ ТА ОБГРУНТУВАННЯ ТОЧНОСТІ ГЕОДЕЗИЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ**

*Відомо, що дамби і греблі під дією змінних навантажень можуть зазнавати деформацій, які призводять до порушення стійкості споруд, що негативно впливає на їх безаварійну роботу.*

*Розв'язати задачі з визначення деформацій можна геодезичними методами, шляхом геодезичного моніторингу конструкцій у реальному часі. Точність дослідження забезпечується вибором точності спостережень та оптимальним розміщенням марок.*

*Як відомо, переміщення споруди можна прогнозувати за допомогою методів будівельної механіки, в основу яких покладено проектні значення величин, що описують її напружено-деформований стан (НДС).*

**Ключові слова:** *геодезичний моніторинг, деформації, напружено-деформований стан, фізична та математична моделі, плоска деформація.*

**Вступ.** Дамби і греблі є одними з найвідповідальніших несучих конструкцій будівельної галузі. Дослідження їх механічної поведінки в період експлуатації потребує геодезичного моніторингу цих конструкцій у реальному часі. За допомогою геодезичних методів досліджують переміщення певних точок споруди, що дає змогу визначити деформації, отже, і напруження, тобто дослідити питання несучої здатності об'єкта. Адекватність геодезичного моніторингу залежить від точності вимірів та способу розміщення маркерів по об'єму конструкції.

Сучасний стан та можливості геодезичної апаратури і приладів дають можливість виконувати виміри з досить високою точністю. Але підвищення точності призводить до необгрунтованого збільшення трудомісткості робіт і не завжди є доцільним, а нераціональне розміщення марок не гарантує адекватності досліджень. Як відомо, вибір оптимальних параметрів геодезичного моніторингу можливий за умови незалежного прогнозування хоча б порядку досліджуваних величин, (тобто переміщень) за допомогою інших методів. Адекватне прогнозування величини переміщень забезпечується оптимальним вибором точності досліджень, отже, оптимальним розміщенням марок.

**Постановка завдання.** Прогнозування переміщень досліджуваної споруди можна виконати за допомогою теоретичних методів, найчастіше методів будівельної механіки. В основі цих методів під час проектування споруди знаходились проектні значення величин, які описують її напружено-деформований стан (НДС). На основі отриманих даних була перевірена несуча здатність споруди. У наш час для дослідження НДС складних конструкцій розроблено потужні обчислювальні програмні комплекси, які використовують під час проектування споруд. Такі комплекси потребують високого рівня знань з будівельної механіки і не можуть бути використані фахівцями з геодезії.

**Основна частина.** Історія розвитку будівельної механіки як науки свідчить, що, крім універсальних обчислювальних методів, паралельно для певних класів конструкцій розробляють альтернативні методи дослідження НДС. Ці методи є значно простішими за універсальні та поєднують у собі підвищену точність разом із простотою і доступністю. Потрібно зазначити, що дамби і греблі належать до певного класу конструкцій, так само як і конструкції набережних, а також стінки, які втримують маси ґрунту від сповзання. Усі ці споруди вважають конструкціями одного класу, який називають підпірними стінками.

У будівельній механіці для дослідження НДС будь-яких несучих конструкцій використовують так звані розрахункові моделі – ідеалізовані об'єкти, характеристики НДС яких із достатньою точністю наближаються до характеристик НДС реального об'єкта. Як відомо, побудова розрахункової моделі складається з двох етапів. На першому етапі обирають фізичну модель, для якої ідеалізують геометричні параметри об'єкта, його фізичні властивості, а далі обирають характеристики, якими будуть описувати НДС створюваної моделі. Визначають фізичні закони, яким ці характеристики мають задовольняти, ідеалізують зовнішні впливи та закони взаємодії з навколишнім середовищем. На другому етапі фізичну модель описують за допомогою методів математики, таким чином утворюється математична модель, яка дає можливість застосовувати теоретичні методи для прогнозування характеристик НДС. Найчастіше математичну модель формують у вигляді граничної задачі для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Найпростішою математичною моделлю є гранична задача для системи звичайних диференціальних рівнянь. Саме такі математичні моделі розроблено фахівцями з будівельної механіки під час перших наукових досліджень. Були побудовані такі ефективні моделі, як рівняння розтягу-стиску стержня, рівняння згину балки, рівняння згину балки на пружній основі та інші. Пізніше були складені рівняння, які описують НДС тонкостінних стержнів. Усі математичні моделі розв'язували, застосовуючи аналітичні методи. Для побудови моделей вводили певні гіпотези, які ґрунтувалися на фізичних експериментах.

Клас підпірних стінок не задовольняє умовам, за яких використовують згадані гіпотези, тому застосувати одновимірні розрахункові моделі, які можна описати граничними задачами для систем звичайних диференціальних рівнянь, безпосередньо неможливо. Отже, математичною моделлю для підпірних стінок є гранична задача для рівнянь просторової задачі теорії пружності, залежної від

трьох координат. Виняток становить один варіант підпірних стінок – гнучкі підпірні стінки, щодо яких можливим є застосування одновимірної математичної моделі.

Характерною особливістю дамб і гребель є їх значна протяжність і незмінність характеру поперечного перерізу та зовнішніх впливів. Незмінність у напрямку поздовжньої координати дає змогу скористатися дещо спрощеною моделлю, яка у теорії пружності називається плоскою деформацією. Рівняння задачі плоскої деформації залежать від двох просторових координат у поперечному перерізі.

Вважатимемо, що поперечний переріз дамби та греблі належить до декартової системи координат (рис. 1 а, б).

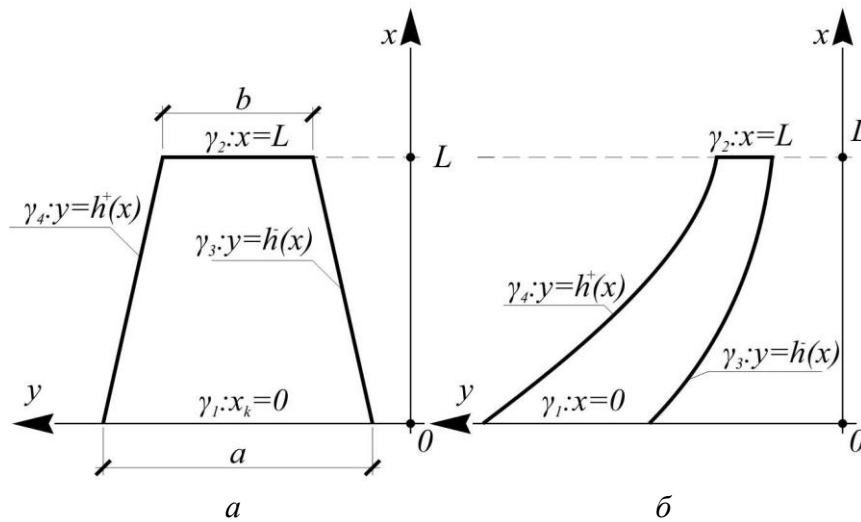


Рис. 1. Поперечний переріз: а – дамби; б – греблі

Гранична поверхня складається з чотирьох поверхонь  $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ . Рівняння плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація) [1] запишемо у вигляді системи диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \sigma_y &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Тут  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $u, v$  – компоненти вектора переміщень;  $\lambda, \mu$  – фізичні константи Ляме. Із традиційної системи рівнянь плоскої задачі теорії пружності за допомогою рівнянь узагальненого закону Гука вилучено компоненти тензора деформацій.

Невідомі функції залежать від двох просторових координат і повинні задовольняти певним граничним умовам, які разом із рівняннями (1) та (2) складають граничну задачу. Ця задача є математичною моделлю для визначення досліджуваного напружено-деформованого стану.

Граничні умови бажано записати у найбільш широкому вигляді. Для цього введемо фіктивні пружні в'язі, які зумовлюють кінематичний зв'язок з навколишнім середовищем (рис. 2).

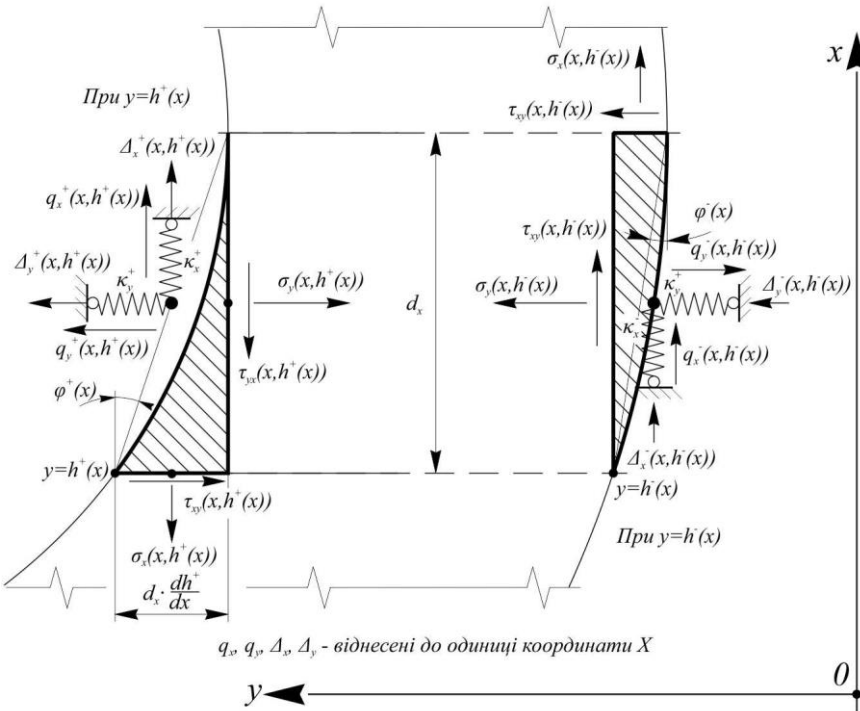


Рис. 2. Фіктивні пружні в'язі

Варіювання значеннями жорсткості  $k$  цих в'язей, як доведено в статті [2], дає можливість враховувати усі стандартні граничні умови на торцевій площині  $\gamma_1: x = 0$ :

$$\begin{aligned} k_{xx}^0 u(0, y) - \sigma_x(0, y) &= k_{xx}^0 \Delta_{xx}^0(y) + q_{xx}^0(y); \\ k_{xy}^0 v(0, y) - \tau_{xy}^0(0, y) &= k_{xy}^0 \Delta_{xy}^0(y) + q_{xy}^0(y); \end{aligned} \quad (3)$$

на торцевій площині  $\gamma_2: x = L$ :

$$\begin{aligned} k_{xx}^L u(L, y) - \sigma_x(L, y) &= k_{xx}^L \Delta_{xx}^L(y) + q_{xx}^L(y); \\ k_{xy}^L v(L, y) - \tau_{xy}^L(L, y) &= k_{xy}^L \Delta_{xy}^L(y) + q_{xy}^L(y); \end{aligned} \quad (4)$$

на боковій поверхні  $\gamma_3: y = h^-(x)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, h^-(x)) \frac{dh^-(x)}{dx} + \tau_{xy}(x, h^-(x)) &= k_x^- u(x, h^-(x)) - k_x^- \Delta_x^- - q_x^-(x); \\ \sigma_y(x, h^-(x)) + \tau_{xy}(x, h^-(x)) \frac{dh^-(x)}{dx} &= k_y^- v(x, h^-(x)) - k_y^- \Delta_y^- - q_y^-(x); \end{aligned} \quad (5)$$

на боковій поверхні  $\gamma_4: y = h^+(x)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, h^+(x)) \frac{dh^+(x)}{dx} + \tau_{xy}(x, h^+(x)) &= k_x^+ u(x, h^+(x)) - k_x^+ \Delta_x^+ - q_x^+(x); \\ \sigma_y(x, h^+(x)) + \tau_{xy}(x, h^+(x)) \frac{dh^+(x)}{dx} &= k_y^+ v(x, h^+(x)) - k_y^+ \Delta_y^+ - q_y^+(x). \end{aligned} \quad (6)$$

У двох останніх випадках  $\gamma_3, \gamma_4$  задані величини (наприклад, зовнішні навантаження  $q_x, q_y$ ) віднесені до вертикальної проекції площадки, на яку вони діють.

Через складний характер геометрії поперечного перерізу дамби чи греблі вихідні рівняння, які описують НДС у межах плоскої деформації, не можуть бути розв'язані аналітично. Фактично для цього і побудовано сучасні програмні комплекси.

Якби геометрія області, яку займає поперечний переріз дамби або греблі, була простою, наприклад прямокутною, можна було б застосувати розроблений математиками метод перетворення задачі плоскої деформації з двовимірної на одновимірну. У такому разі вихідні диференціальні рівняння в частинних похідних за допомогою математичних методів можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь. Метод такого зведення називається методом прямих. Авторами роботи [3] розроблено узагальнений варіант методу прямих, який після суттєвої модифікації можна застосувати і до складної геометрії поперечних перерізів дамб і гребель відповідно до особливостей геометрії їх поперечних перерізів.

Зауважимо, що у розгляданому випадку дві поверхні є площинами  $x=0$  та  $x=L$ , паралельними одна до одній (торцеві площини). Дві інші поверхні (бокові поверхні)  $y = h^-(x)$  та  $y = h^+(x)$  мають складну форму. Вважаємо, що така плоска фігура може бути побудована множиною горизонтальних відрізків для кожного значення  $X$ , причому певний відрізок, відповідний конкретному  $x_0$ , має довжину, залежну від  $X$ , а також окрему середину з координатами  $\frac{h^+ + h^-}{2}$ .

Оскільки в традиційному варіанті методу прямих поперечний переріз є прямокутним, то відрізки, перпендикулярні осі  $OX$ , мають однакову довжину і їх середини лежать на одній прямій, яка є віссю симетрії прямокутника. Це дає змогу в класичному варіанті методу на прямокутну область наносити декілька прямих, паралельних осі  $OX$ . Зазвичай ці прямі виконують з однаковим кроком, але можна накреслити прямі також із змінним по  $y$  кроком. При цьому кожний відрізок прямокутника, що відповідає певному значенню  $X$ , ділять однаково, а головне, на однакову кількість частин. Цей принцип можна перенести і на складні плоскі фігури, які описують геометрію поперечного перерізу дамби або греблі.

Кожний горизонтальний відрізок, що відповідає конкретному значенню  $x \in [0, h]$ , ділимо на  $m$  рівних частин завдовжки  $\frac{h^+(x) - h^-(x)}{m} = \Delta(x)$ . Отримана кількість частин  $(m+1)$  для кожного  $X$  утворять геометричні місця точок, що в загальному випадку є кривими лініями, рівняння яких має такий вигляд (рис. 3):

$$\varphi_i(x) = h^-(x) + \Delta(x) \cdot (i - 1). \quad (7)$$

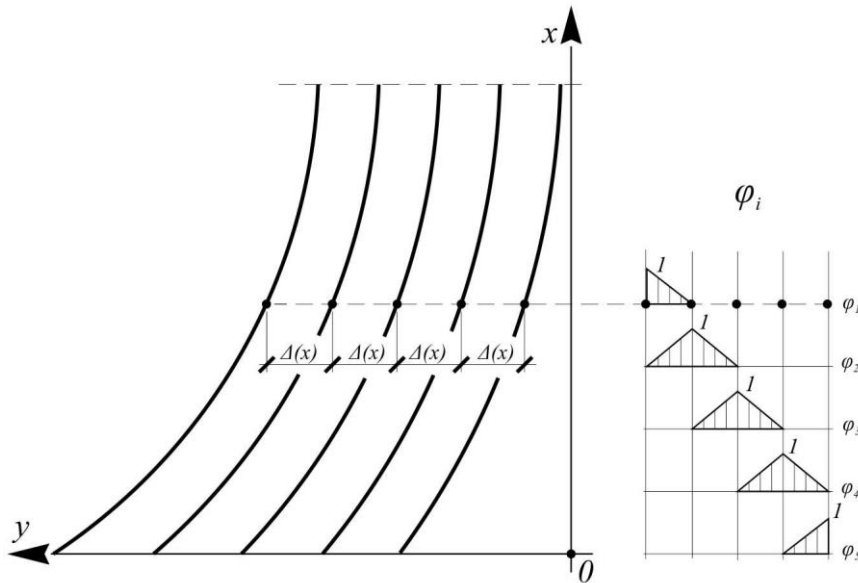


Рис. 3. Утворення геометричних місць точок

У деяких випадках, коли  $h^-(x)$  та  $h^+(x)$  – прямі, побудовані лінії також будуть прямими, але в загальному випадку це криві лінії. Незважаючи на це, назву методу – «метод прямих» – збережено і для такого важливого узагальнення (вживають назву в лапках).

Для перетворення вихідних рівнянь застосуємо проєкційний метод Бубнова – Гальоркіна – Петрова [4; 5]. Оскільки припускаємо зниження вимірності відносно змінної  $y$ , то за цією змінною обираємо систему базисних функцій. За такі функції беремо систему кусково-лінійних фінітних функцій (функції-кришки) (див. рис. 3):

$$\varphi_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } y = y_i; \\ 0, \text{ якщо } y \neq y_i. \end{cases}$$

Ці функції залежать від  $y$  та  $x$ , оскільки межі горизонтального відрізка  $[h^-(x), h^+(x)]$  залежать від  $x$ . Але при кожному фіксованому  $x$  ця система функцій утворює лінійно незалежну систему, тобто є базисом.

Кожну з розрахункових функцій вихідної системи рівнянь наближено шукаємо у вигляді розкладу по цьому базису:

$$f(x, y) = f^i(x) \cdot \varphi_i(x, y) \quad (i = 1, m + 1). \quad (8)$$

Після підстановки таких наближених виразів у вихідні рівняння, кожне з рівнянь матиме праворуч замість нуля нев'язку. Згідно з методом Бубнова – Гальоркіна – Петрова цю нев'язку необхідно зробити ортогональною до деякої іншої базисної системи. Поняття ортогональності пов'язане із введенням у розгляд скалярного добутку. Для функцій, які залежать від змінної  $y$  під скалярним добутком функції  $f(y)$  на  $g(y)$  розуміють інтеграл відносно змінної  $y$  в межах її області визначення від добутку цих двох функцій:

$$(f(y), g(y)) = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(y) \cdot g(y) dy. \quad (9)$$

Будь-яку залежність складової цих формул від змінної  $X$  розглядають як залежність від параметра.

Визначаючи скалярний добуток, потрібно враховувати певні зауваження. Визначаючи базис, слід мати на увазі, що елементи цього базису не повністю ортогональні між собою. Якщо області, на яких вони не є нульовими, не збігаються, то їх скалярний добуток дорівнює нулю. Але скалярний добуток двох сусідніх базисних функцій не дорівнює нулю. Для косокутних базисів у тензорному численні розроблено відповідну методику оперування [2].

Базис, обраний спочатку, називають основним і позначають нижнім індексом. Закон перетворення елементів цього базису під час переходу до іншого називають коваріантним законом. Разом з основним базисом обов'язково будують взаємний базис, елементи якого визначають за формулою:

$$\varphi^i(y) : (\varphi^i(y), \varphi_j(y)) = \delta_{:j}^i,$$

де  $\delta_{:j}^i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$  – символ Кронекера.

Понизимо вимірність вихідних рівнянь до системи звичайних диференціальних рівнянь, використовуючи проєкційний метод, запропонований Канторовичем [6]. За цим методом перетворені рівняння отримують в результаті множення згаданих рівнянь на базисні функції та інтегрування добутку відносно  $y$ . Оскільки з-поміж усіх наведених рівнянь найпростішими є граничні рівняння на торцевих площинах (вони є алгебраїчними), то розроблена нами методика також дає систему алгебраїчних рівнянь:

при  $x = 0$

$$\begin{aligned} k_{xx}^o u_i(0) - \sigma_{x,i}(0) &= k_{xx}^o \Delta_{xx,i}^o + q_{xx,i}^o, \\ k_{xy}^o v_i(0) - \tau_{xy,i}(0) &= k_{xy}^o \Delta_{xy,i}^o + q_{xy,i}^o; \end{aligned} \quad (10)$$

при  $x = L$

$$\begin{aligned} k_{xx}^L u_i(L) + \sigma_{x,i}(L) &= k_{xx}^L \Delta_{xx,i}^L + q_{xx,i}^L, \\ k_{xy}^L v_i(L) + \tau_{xy,i}(L) &= k_{xy}^L \Delta_{xy,i}^L + q_{xy,i}^L. \end{aligned} \quad (11)$$

Величини, які належать до редукованих (перетворених) граничних умов і позначені індексом « $i$ », є скалярними добутками («проєкціями») відповідних вихідних невідомих, що являють собою розв'язувальні функції вихідної математичної моделі, на базові функції  $\varphi_i(x, y)$ . Нижні індекси означають, що це коваріантні величини з погляду тензорного числення, або моменти відповідних величин відносно базисних функцій.

Складніші перетворення слід виконувати за пониження вимірності вихідних диференціальних рівнянь (1), (2). Розглянемо цю процедуру для першого рівняння системи (2). Помножуючи доданки цього рівняння на  $\varphi_i(x, y)$  та інтегруючи відносно змінної  $y$  у межах її визначення, тобто  $y \in [h^-(x), h^+(x)]$ , отримуємо:

$$\sigma_{x,i} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \lambda \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_i. \quad (12)$$

Тут індексом « $i$ » позначено момент величини відносно базису  $\varphi_i (i = \overline{1, m})$ , тобто  $i$ -й момент. Оскільки  $\sigma_x(x, y)$  до цього рівняння входить алгебраїчно, то в редуковане рівняння його  $i$ -й елемент входить безпосередньо,

інші дві величини  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i$  та  $\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_i$  слід шукати відносно відповідних моментів

$u_i(x)$  та  $v_i(x)$ .

Враховуючи, що  $\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_i = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial v}{\partial y} \varphi_i dy$ , для перетворення інтеграла

використовуємо розклад функції  $v(x, y)$  по базису:

$$v(x, y) \approx v^j(x) \cdot \varphi_j(x, y). \quad (13)$$

Потрібно зазначити, що при розкладі величини по неортонормованому базису коефіцієнтами цього розкладу є контраваріантні компоненти цієї величини. Після нескладних перетворень отримуємо шуканий вираз:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_i = b_{ij} v^j,$$

де

$$b_{ij} = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \varphi_i(x, y) \frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial y} dy. \quad (14)$$

Детальніше матрицю  $\{b_{ij}\}$  розглянуто в іншій роботі [2].

Для визначення величини  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i$  скористаємось співвідношенням:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} u(x, y) \cdot \varphi_i(x, y) dy =$$



$$= \frac{dh^+(x)}{dx} u(x, h^+(x)) \cdot \varphi_i(x, h^+(x)) - \frac{dh^-(x)}{dx} u(x, h^-(x)) \cdot \varphi_i(x, h^-(x)) +$$

$$+ \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \varphi_i(x, y) dy + \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} u(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} dy, \quad (15)$$

з якого випливає таке співвідношення:

$$\left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right)_i = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \varphi_i(x, y) dy =$$

$$= \frac{du_i}{dx} - \frac{dh^+(x)}{dx} \cdot u^m \delta_i^m + \frac{dh^-(x)}{dx} \cdot u^1 \delta_i^1 - \frac{d\Delta(x)}{dx} d_{ij} u^j. \quad (16)$$

Матрицю  $\{d_{ij}\}$  наведено в роботі [7].

Для отримання остаточного вигляду редукованих рівнянь треба записати їх відносно невідомих одного типу, наприклад у моментах. Для цього виконаємо процедуру опускання індексів у величин, якщо ті знаходяться вгорі. З формули (14) маємо:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_i = b_{ij} g^{j\alpha} v_\alpha, \quad (17)$$

З виразу (16) отримуємо:

$$\left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right)_i = \frac{du_i}{dx} - \frac{d\Delta(x)}{dx} d_{ij} g^{j\alpha} u_\alpha - \frac{dh^+(x)}{dx} g^{mj} u_j \delta_i^m +$$

$$+ \frac{dh^+(x)}{dx} g^{1j} u_j \delta_i^1 \quad (18)$$

Аналогічно для третього рівняння системи (2) маємо:

$$\tau_{xy,i} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_i + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_i,$$

де доданки, записані праворуч, визначаються за співвідношеннями (17) та (18).

Друге рівняння системи (2) у редукованому вигляді буде зведене до алгебраїчного рівняння. Дійсно, для другого рівняння отримуємо:

$$\sigma_{y,i} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_i. \quad (19)$$

З рівняння (12) знаходимо  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$ , після підстановки маємо:

$$\sigma_{y,i} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{x,i} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} v_\alpha. \quad (20)$$

При редукуванні рівнянь системи (1), які є рівняннями рівноваги, виникають певні особливості, відмінні від уже зазначених. Розглянемо процес пониження вимірності для першого рівняння, яке запишемо у такому вигляді:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X.$$

Після множення на базисні функції  $\varphi_i(x, y)$  та інтегрування отримуємо:

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right)_i = -\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right)_i - X_i. \quad (21)$$

Складову, яка стоїть ліворуч, визначають аналогічно виразу (18), а іншу складову з похідною по  $y$  знаходять так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right)_i &= \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot \varphi_i(x, y) dy = \\ &= \left(\tau_{xy}(x, y) \cdot \varphi_i(x, y)\right) \Big|_{h^-(x)}^{h^+(x)} - \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \tau_{xy}(x, y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} dy = \\ &= \tau_{xy}^+(x) \cdot \delta_i^m - \tau_{xy}^-(x) \cdot \delta_i^1 - b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy,\alpha}(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Тут застосовують правило інтегрування частинами для означеного інтеграла.

Аналогічно редукують друге рівняння системи (1):

$$\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right)_i = -\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)_i - Y_i. \quad (23)$$

Після виконання всіх перетворень потрібно вилучити  $\sigma_{y,i}$  з цих рівнянь, використовуючи співвідношення (20).

Остаточно всю систему редукованих рівнянь записують у вигляді системи  $4 \times m$  звичайних диференціальних рівнянь першого порядку відносно нових невідомих – моментів  $u_i(x), v_i(x), \sigma_{x,i}(x), \tau_{xy,i}(x)$ . При формуванні розрахункових рівнянь використовують вихідні граничні умови на бокових (верхній та нижній) поверхнях, тоді як редуковані граничні умови на торцевих площинах є граничними умовами редукованих рівнянь.

Систему розрахункових рівнянь записують у стандартній формі Коші:

$$\frac{d\vec{Y}}{dx} = A(x)\vec{Y} + \vec{F}, \quad (24)$$

$$\text{де } \vec{Y}(x) = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \sigma_{x,i} \\ \tau_{xy,i} \end{bmatrix} - N - \text{вимірний вектор невідомих,}$$

де  $N = 4 \times m$ , визначений на відрізку  $[0, L]$ ;  $A(x)$  – матриця коефіцієнтів, які залежать від поздовжньої координати;  $\vec{F}(x)$  – вектор правих частин.

Вектор невідомих повинен задовольняти граничним умовам:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 & \quad C_o(\vec{Y}(0) - \vec{\Phi}_o) = 0, \\ \text{при } x = L & \quad C_L(\vec{Y}(L) - \vec{\Phi}_L) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Граничну доточкову задачу розв'язують за ефективним чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [8].

**Висновок.** Обґрунтування точності виконання геодезичних спостережень за деформаціями конструкцій є можливим завдяки використанню методів будівельної механіки, тобто шляхом складання фізичної та математичної моделей та їх розв'язання.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – 5-е изд. – М.: Наука, 1966. – 709 с.
2. *Станкевич А.М.* До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих / А. М. Станкевич, В. К. Чибіряков., Л. Т. Шкельов // Містобудування та територіальне планування. – 2010. — Вип. 36. – С. 413-423.
3. *Чибіряков В.К.* Модифікований метод прямих в задачах статки та динаміки масивних конструкцій / В.К. Чибіряков, А.М. Станкевич, Д.В. Левківський, В.Ф.Мельничук // Вісник ОДАБА. - 2016. - Вип. 61. – С. 412 – 423.
4. *Михлин С.М.* Вариационные методы в математической физике / С.М. Михлин // Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры. – М.: Наука, 1957. – 476 с.
5. *Марчук Г.И.* Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков // М.: Наука. Главная редакция физико-математической лит-ры, 1981. – 416 с.
6. *Канторович Л.В.* Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Гостехиздат, 1949. – 709 с.
7. *Чибіряков В.К.* Зниження вимірності рівнянь статки товстої пластини змінної товщини узагальненим методом прямих. / В.К. Чибіряков, А.М. Станкевич, А.А. Сташук // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип. 85. – С. 58-67.

8. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – Т. 16. – 1961. – Вип.3. – С.171 – 174.

#### REFERENCES

1. Muskhelishvili N.I. (1966). *Nekotorye osnovnye zadachi teoryi uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity] (5 th ed. rev) Moscow [in Russian].

2. Stankevych A.M., Chibiriakov V.K., Shkelyov L.T. (2010). *Do znizhennya vymirnosti granichnyh zadach teoryi pruzhnosti za metodom priamyh* [To reduce the dimension of boundary problems of elasticity theory by method of lines]. *Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia – Urban construction and territory planning*, 36, 413-423 [in Ukrainian].

3. Chibiriakov V.K., Stankevych A.M., Levkivsky D.V. & Melnichuk V.F. (2016). *Modifikovany metod priamyh v zadachah statiki ta dinamiki masyvnyh konstruktsiy* [The modified method of lines in statics and dynamics problems of massive constructions] . *Visnyk ODABA*. 61, 412-423 [in Ukrainian].

4. Mihlin S.M. (1957). *Variyatsyonnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury. 476. Moscow [in Russian].

5. Marchuk G.I. & Agoshkov V.I. (1981). *Vvedeniye v proektsionno-setochnye metody* [Introduction to the projection-grid methods]. Glavnaia redaksiya fiziko-matematicheskoy literatury - Nauka. 416. Moscow [in Russian].

6. Kantarovich L.V. & Krylov V.I. (1949). *Priblizhonnye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Gostehizdat Moscow [in Russian].

7. Chibiriakov V.K., Stankevych A.M. & Stashuk A.A. (2012). *Znizhennia vymirnosti rivnian statyky товстой пластyny zminnoy товshyny uzagalnenym metodom priamyh* [Reduced dimension the statics equations thick plate of variable thickness generalized method of lines]. *Opir materialiv i teoryi sporud*. 85. 58-67. [in Ukrainian].

8. Godunov S.K. (1961). *O chislennom reshenni kraevykh zadach dlia lineynykh obyknovennykh differentsyalnykh uravneniy*. [On the numerical solution of boundary problems for systems of linear ordinary differential equations]. *Uspеhi matematicheskikh nauk* 16. 171-174. [in Russian].

**В.К. Чибиряков**  
**А.Н. Станкевич**  
**В.С. Староверов**  
**А.С. Акчурина**  
**А.А. Шорин**

**ПРО ОДНУ РАСЧЕТНУЮ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ  
ДЕФОРМАЦИЙ ДАМБ И ПЛОТИН И ОБОСНОВАНИЯ ТОЧНОСТИ  
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ**

*Известно, что дамбы и плотины под действием переменных нагрузок подвержены появлению деформаций, которые приводят к нарушению устойчивости сооружений, что негативно влияет на их безаварийную работу.*

*Решение задачи по определению деформации возможно геодезическими методами путем геодезического мониторинга этих конструкций в реальном времени. Определено, что точность исследования обеспечивается выбором точности наблюдений и оптимальным размещением марок.*

*Как известно, перемещение сооружения можно спрогнозировать с помощью методов строительной механики, в основе которых лежат проектные значения величин, описывающие ее напряженно-деформированное состояние (НДС).*

***Ключевые слова:** геодезический мониторинг, деформации, напряженно-деформированное состояние, физическая и математическая модели, плоская деформация.*

**V.K. Chibiriakov**  
**A.M. Stankevych**  
**V.S. Staroverov**  
**H.S. Akchurina**  
**A.A. Shorin**

**ABOUT ONE COMPUTATIONAL MODEL FOR RESEARCH STRAIN  
OF DAMS AND JUSTIFICATION ACCURACY OF GEODETIC  
OBSERVATIONS**

*It was determined, that the dams under the influence of variable loads are subject to the emergence of strains, that lead to the violation of their stability, which has a negative effect on their trouble-free operation.*

*It is known, that the solution of the problem to determine the possible deformation geodetic methods, by means of geodetic monitoring of these designs in real time. It was determined, that the accuracy of the study is provided by a choice of observational accuracy and optimal placement of brands.*

*As you know, moving structures can be predicted using the methods of structural mechanics, which are based on the design values of the quantities that describe its stress-strain state (SSS).*

*It is proposed for certain classes of structures using methods, that are simpler than universal, which are more complex. It is noted, that the dams belong to the one class, which is called the retaining walls.*

*It is known, that for research SSS using computational models which consist of physical and mathematical models. As a rule, the mathematical model is a boundary problem for a system of ordinary differential equations.*

*It is proposed for retaining walls use more simplified mathematical model, which is called plane strain in the theory of elasticity.*

*Created the common method of lines, which is used for complex geometry retaining walls of sections allowing for the geometry of their cross-sections.*

*The algorithm for this problem that is solved by the method of discrete orthogonalization S.K. Godunova.*

**Keywords:** *geodetic monitoring, deformation, stress-strain state, physical and mathematical models, plane strain.*

Надійшла до редакції

13.09.2016

УДК 528.48

**А.А. Великорусова**

*студентка факультету цивільного будівництва  
Університету Аристотеля в Салоніках*

### **РОЗРОБЛЕННЯ МЕТОДИКИ СТВОРЕННЯ ТРИВИМІРНОЇ МОДЕЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОТОТАХЕОМЕТРА TOPCON IS-301**

*У роботі запропоновано методику створення тривимірної моделі за даними наземного лазерного сканування за допомогою фототахеометра Topcon IS-301. Наведено розрахунок оптимальних параметрів сканування та приклад виконаних польових та камеральних робіт. Розглянуто методику обробки стереопар у додатковому модулі Image Master Trial. Визначено точність методу створення тривимірної моделі. Розроблену методику апробовано за матеріалами сканування історичної споруди в Києві.*

**Ключові слова:** *наземне лазерне сканування, фототахеометр, 3D-модель, обробка стереопар.*

**Вступ.** Тривимірне моделювання являє собою один із найбільш поширених методів побудови й дослідження спеціальних об'єктів (моделей). У ширшому розумінні моделювання – це наукова дисципліна, у якій вивчаються методи побудови й використання моделей для пізнання реального світу. Тривимірне моделювання потребує відповідних інструментів, методик і даних. Нині застосовують багато методів створення тривимірних моделей споруд. Основними з них є використання даних наземної фотограмметрії, даних наземного лазерного сканування (сканер), останнім часом набуває популярності метод створення