

**Н.В. Куліченко, аспірант***Київський національний університет будівництва і архітектури***ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ПРОСТОРОВИХ  
ОБОЛОНОК У ЗАДАЧІ СПОСТЕРЕЖЕННЯ ЗА ДЕФОРМАЦІЯМИ  
ЗА ДАНИМИ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНУВАННЯ ЗА НАЯВНОСТІ  
СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК**

*У статті розглянуто завдання з дослідження деформацій просторових оболонок інженерних споруд. Досліджено різні методи оброблення даних наземного лазерного сканування за наявності систематичних похибок. Дослідження виконано на прикладі результатів сканування просторових оболонок. Для цього класу інженерних споруд визначення деформацій за даними наземного лазерного сканування можна виконати шляхом побудови математичної моделі реальної поверхні і подальшого порівняння цієї моделі з проектною. Оцінювання параметрів реальної моделі поверхні оболонки запропоновано здійснювати за допомогою різних методів: найменших квадратів, найменших модулів, варіаційно-зважених наближень і середньої квадратичної колокації. Досліджено ефективність кожного з цих методів та з'ясовано, які з них доцільно застосовувати для оцінювання параметрів просторових оболонок.*

**Ключові слова:** наземне лазерне сканування, просторова оболонка, метод найменших квадратів, метод найменших модулів, метод варіаційно-зважених наближень, метод середньої квадратичної колокації.

**Вступ.** Спостереження за деформаціями та переміщеннями просторових оболонок інженерних споруд є одним із відповідальних етапів геодезичних спостережень. Виконуючи такі спостереження, а особливо обробляючи результати спостережень, увагу слід звертати на послаблення, а по змозі і виключення впливу систематичних похибок на остаточні результати. Загальновідомо, що вплив систематичних похибок можна зменшити або завдяки застосуванню відповідної методики вимірювань або на стадії оброблення, оцінивши їх величину та виключивши їх вплив. У спостереженнях за просторовими оболонками систематичні похибки можуть призвести до загального зміщення поверхні оболонки або до її викривлення, яке не відповідатиме фактичному положенню оболонки. Останнім часом велику популярність для спостереження за оболонками набули системи наземного лазерного сканування [1-3; 5]. За даними сканування можна оцінити параметри рівняння поверхні фактичної оболонки та порівняти їх із проектними значеннями.

У разі використання наземного лазерного сканування джерелом систематичних похибок можуть бути похибки у виміряних кутах та відстанях, при цьому ці похибки можуть виникати як через недосконалість вимірювального блока наземного лазерного сканера, так і через фізичний стан поверхні відбиття [12]. Після обчислень вплив систематичних похибок трансформується у спотворення координат точок поверхні. За таких умов виключити вплив

систематичних похибок, застосувавши специфічну методику вимірювань, практично неможливо. З другого боку, величезна надлишковість даних наземного лазерного сканування дає змогу, завдяки застосуванню відповідного математичного апарату, або оцінити вплив систематичних похибок, або використати математичні методи, стабільні до впливу систематичних похибок (робасті методи). Дослідження методів, несприйнятливих до впливу систематичних похибок, є важливим й актуальним завданням і потребує окремого вивчення.

**Аналіз досліджень та публікацій.** Ідея використання наземного лазерного сканування для спостереження за деформаціями не є зовсім новою. Нині відомо декілька підходів до визначення величини деформацій за даними сканування. Найбільш простим є підхід, згідно з яким після сканування будують TIN-модель поверхні і порівнюють її з аналогічною моделлю з попереднього циклу [6; 10]. Такий підхід є зручним у випадку, коли поверхня нерегулярна. З другого боку, якщо досліджувана модель описується строгим математичним рівнянням, є можливість оцінити параметри математичної моделі цієї поверхні та порівняти їх із проектними параметрами, як, наприклад, у роботі [3]. Саме такий підхід розглянуто у представленій статті. Як зазначено у вступній частині, завданням роботи є дослідження методів оцінювання параметрів, нечутливих до впливу систематичних похибок. Такими методами вважаємо метод найменших модулів, метод середньої квадратичної колокації, метод найменших модулів. Всі ці методи достатньо докладно висвітлено у роботах [7 - 9; 11]. Порівняльний аналіз цих методів щодо їх нечутливості до впливу систематичних похибок не проводився.

**Мета роботи.** Метою роботи є дослідження методів оцінювання параметрів просторових оболонок під час спостереження за деформаціями. Дослідження методів виконано за даними наземного лазерного сканування за наявності систематичних похибок.

**Основна частина.** Перш ніж викласти безпосередні результати досліджень, наведемо основні відомості та математичні залежності методів, що були нами використані. Одразу зауважимо, що в основу розглянутих методів покладено класичний метод найменших квадратів (МНК) і використано обчислювальний алгоритм цього методу.

#### *Метод варіаційно-зважених наближень (МВЗН)*

Цей метод наводимо згідно із алгоритмом, запропонованим професором Т.Т. Чмчяном. Якщо вимірювання мають залишкову систематичну похибку, то рекомендується виконувати ітераційний процес з послідовним уточненням вагової матриці  $\mathbf{P}_{(j)}$ . На початковому етапі виконують оцінювання за класичною схемою МНК, в якій матрицю ваг встановлюють одиничною. Після оцінювання матрицю ваг розраховують за виразом:

$$\mathbf{P}_j = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{(v_1^2)_{j-1}}{\mu_{j-1}^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{(v_2^2)_{j-1}}{\mu_{j-1}^2}\right) & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \exp\left(\frac{(v_n^2)_{j-1}}{\mu_{j-1}^2}\right) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де позначення є відповідними загальновідомим величинам у методі найменших квадратів.

Ітераційний процес виконують доти, доки відхилення між похибками одиниць ваги в сусідніх ітераціях не стануть меншими від наперед заданої величини.

*Метод середньої квадратичної колокації (МСКК)*

Метод дає можливість врахувати кореляційні зв'язки між спостереженнями.

Професор Г. Моріц ввів «вектор сигналу» для опису стохастичних параметрів, що не ввійшли в параметричну модель. Цей вектор сигналу описується в термінах коваріаційної матриці та математичного сподівання. Такий підхід дає можливість суттєво розширити можливості традиційного методу найменших квадратів. Розглянемо параметричну модель даних згідно з моделлю, наведеною у роботі [11]:

$$\mathbf{A}\Delta + \mathbf{\Omega}y + \mathbf{v} = \mathbf{l}. \quad (2)$$

Член  $\mathbf{\Omega}y$  представляє параметри, які є стохастичними. Якщо кількість стохастичних параметрів  $m$ , то

$$\mathbf{A}\Delta + \mathbf{\Omega}y + \mathbf{v} = \mathbf{A}x + \sum_{i=1}^m \mathbf{\Omega}_i y_i + \mathbf{v} = \mathbf{A}\Delta + (\mathbf{\Omega}_1 \quad \mathbf{\Omega}_2 \quad \dots \quad \mathbf{\Omega}_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} + \mathbf{v} = \mathbf{l}.$$

Після складних перетворень отримують вирази для оцінювання постійних і стохастичних параметрів:

$$\Delta = \left[ \mathbf{A}^T (\mathbf{Q}_w + \mathbf{\Omega} \mathbf{Q}_y \mathbf{\Omega}^T)^{-1} \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{Q}_w + \mathbf{\Omega} \mathbf{Q}_y \mathbf{\Omega}^T)^{-1} \mathbf{l} \quad (3)$$

$$\hat{y} = \mathbf{Q}_y \mathbf{\Omega}^T (\mathbf{\Omega} \mathbf{Q}_y \mathbf{\Omega}^T + \mathbf{Q}_w)^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\Delta)$$

Вирази для оцінювання за МНК та МСКК збігаються за своєю структурою. МСКК може бути інтерпретований як узагальнений МНК з повною матрицею апріорних коваріаційних похибок спостережень.

*Метод найменших модулів (МНМ)*

Серед так званих робастих методів, стійких до грубих помилок, найбільш популярним є метод найменших модулів, ідея якого була запропонована ще П. Лапласом. Наводимо схему ітераційного процесу, запропоновану професором С.Г. Могильним. Застосовуючи варіаційний принцип методу найменших модулів, будують ітераційний процес за такими формулами:

$$\mathbf{K}_{(j)} = \left( \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_{(j-1)}^{-1} \mathbf{A}^T \right)^{-1} \left( \tilde{\Delta}_{(j-1)} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{y} \right);$$

$$\mathbf{V}_x^{(j)} = \tilde{\mathbf{P}}_{(j-1)}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_{(j)}; \tag{4}$$

$$\tilde{\Delta}_{(j)} = \frac{\mathbf{I}^T \left( \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{(j-1)}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{I}^T \left( \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{(j-1)}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{I}}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{(j)} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\sigma_1 |v_1^{(j-1)}|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\sigma_1 |v_1^{(j-1)}|} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\sigma_1 |v_1^{(j-1)}|} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Формули (4-5) реалізують строге рішення задачі МНМ, але такий алгоритм виявляє грубі помилки у вихідних вимірюваннях, а не у векторі  $\mathbf{y}$ , який потрібно проаналізувати. Тому в остаточному вигляді запишемо формули для ітераційного процесу за методом найменших модулів:

$$\Delta_{(j+1)} = \frac{\mathbf{I}^T \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{P}}_{(j)} \mathbf{Q} \mathbf{y}}{\mathbf{I}^T \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{P}}_{(j)} \mathbf{Q} \mathbf{I}}; \tag{6}$$

$$\Lambda_{(j)} = \mathbf{Q} \mathbf{y} - \Delta_{(j)} \mathbf{Q} \mathbf{I}.$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{(j)} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{|\lambda_1^{(j)}|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{|\lambda_1^{(j)}|} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{|\lambda_1^{(j)}|} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Початок ітерацій починається за таких умов:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{(j)} = \mathbf{E}, \quad \Delta_{(j+1)} = \frac{\mathbf{I}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}}{\mathbf{I}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{I}} = \frac{\mathbf{I}^T \mathbf{P}_y \mathbf{y}}{\mathbf{I}^T \mathbf{P}_y \mathbf{I}}.$$

З останнього виразу видно, що узагальнене середнє вагове є початковим наближенням в методі найменших модулів. Цей метод не достатньо досліджений стосовно даних, спотворених систематичними похибками, однак загальновідомо, що він є дуже ефективним для локалізації грубих помилок навіть в корельованих даних.

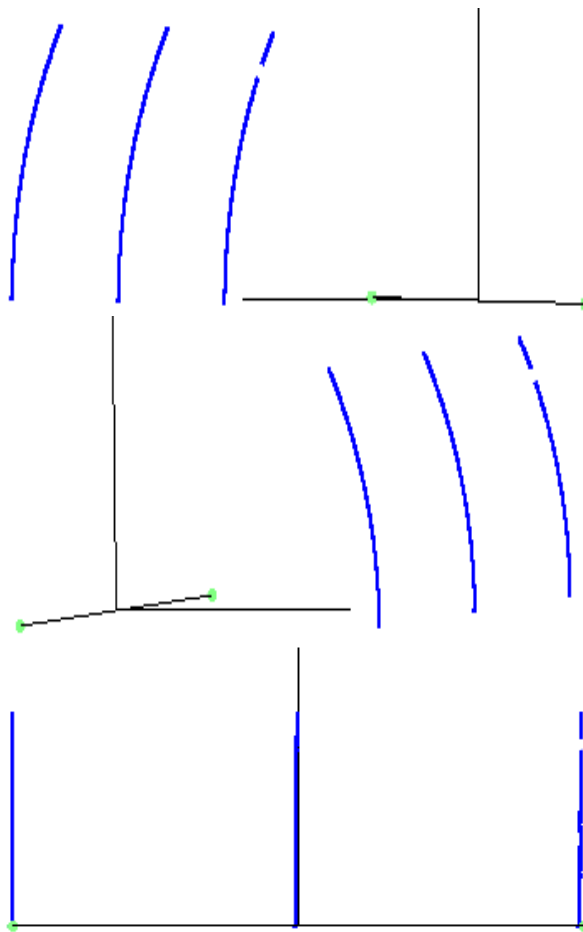
Після стислого огляду досліджуваних нами методів перейдемо до викладу завдання та опису вихідних даних.

Появу систематичних помилок у результатах спостережень можна пояснити багатьма факторами. Відомо, що виникнення систематичних похибок, так само як і грубих, може бути спричинене зміною за певним законом деякої величини, наявної у результатах спостережень. Систематична похибка може бути в будь-якому компоненті комплексу умов: об'єкті спостережень, приладі, зовнішніх умовах, методі та навіть роботі спостерігача. Згідно з загальною теорією зрівнювання результатів геодезичних спостережень вплив систематичних похибок потрібно звести до мінімуму.

Для дослідження впливу систематичних помилок на результати оцінювання та визначення методу, який дає змогу найбільш вдало послабити вплив систематичних помилок, виконано оброблення результатів спостережень за фрагментом просторової оболонки, що має форму кругового циліндра.

Матеріали були отримані в результаті спостережень за допомогою електронного роботизованого тахеометра в режимі без відбивача за трьома перерізами через кожні 10 метрів, загальна кількість точок – 1422.

Загальний вигляд фрагмента циліндричної оболонки у вигляді трьох перерізів в різних ракурсах після попереднього оброблення та вилучення грубих помилок наведено на рис. 1. Згідно з попередніми розрахунками середня квадратична похибка визначення просторового положення точки – 3,5 мм.



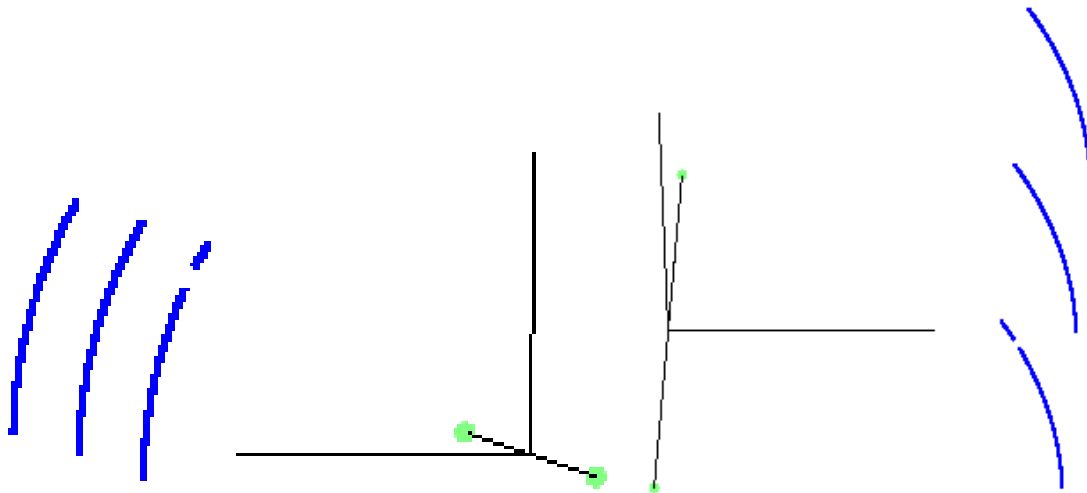


Рис. 1. Загальний вигляд фрагмента циліндричної оболонки у вигляді трьох перерізів

Важливим етапом є визначення форми та математичної моделі представлення поверхні. Від цього залежатиме інформативність отриманих результатів та, головне, стабільність обчислювального процесу. Застосовують кілька форм представлення моделей.

#### *Явна форма*

Для просторових поверхонь таке представлення виражає одну координату як функцію двох інших. Математично такі умови можна передати виразами:

$$z = f(x, y); x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2.$$

Явну форму застосовують тільки до поверхонь, які мають одне значення  $z$  для кожної пари  $(x; y)$ . Такій умові не задовольняє більшість поверхонь, наприклад, циліндр у розгляданому випадку. Найчастіше явну форму використовують для апроксимації площини у вигляді рівності:

$$z = ax + by + c.$$

Така форма запису є відповідною випадку апроксимації, коли похибки вимірювань є лише у висотній складовій, а планові координати вважають безпомилковими.

#### *Неявна форма*

Будь-яку поверхню в неявній формі представляють як функцію трьох координат:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Прикладом такого представлення є рівняння сфери:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - r^2 = 0,$$

де  $c = (c_x \ c_y \ c_z)$  – координати центра сфери, а  $r$  – радіус. Подібна форма запису характерна для площини (лінійна), циліндра (квадратична), конуса (квадратична) і тора (квадратична).

*Параметрична форма*

Параметрична форма являє собою окрему функцію для кожної координати. Кожна така функція параметризована через дві нові змінні  $u$  і  $v$ . Область значень цих змінних задається так:

$$x = f(u, v); y = g(u, v); z = h(u, v).$$

Квадратична поверхня в загальному вигляді представлена рівнянням:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2px + 2qy + 2rz + d = 0. \quad (8)$$

Для апроксимації будь-якої поверхні слід обрати або алгебраїчну відстань, або геометричну. З рівняння (8) видно, що квадратична поверхня має лише дев'ять ступенів свободи і 10 коефіцієнтів. Таку надпараметризацію можна подолати, ввівши додаткове обмеження на параметри поверхні. Оберемо обмеження:

$$a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2 + p^2 + q^2 + r^2 + d^2 = 1.$$

Якщо визначити наступну матрицю для набору точок  $n$ , де  $n \geq 9$ , матимемо [4]:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & 2y_1z_1 & 2x_1z_1 & 2y_1x_1 & 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & 2y_2z_2 & 2x_2z_2 & 2y_2x_2 & 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ x_n^2 & y_n^2 & z_n^2 & 2y_nz_n & 2x_nz_n & 2y_nx_n & 2x_n & 2y_n & 2z_n & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{n} = (a \ b \ c \ d \ f \ g \ h \ p \ r \ d)^T;$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^T,$$

Тоді можна показати, що метод найменших квадратів з обмеженнями дає рішення для  $n$  точок у вигляді власного вектора  $\mathbf{M}$  ( $i$ -та колонка матриці  $\mathbf{E}$ ), відповідного мінімальному власному значенню ( $i$ -го діагонального елемента  $\lambda$  матриці  $\mathbf{\Lambda}$ ). Отримана таким чином поверхня не відповідає стандартній формі, оскільки є розвернутою і зміщеною відносно прийнятої системи координат. Приведення поверхні до однієї зі стандартних форм виконують за допомогою канонічного аналізу.

Оскільки ми використовуємо канонічний аналіз тільки для квадратичних поверхонь, наведемо порядок перетворень саме для цього випадку. Рівняння (8) в матричній формі можна записати таким чином [4]:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{Q} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{b} + d;$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2p \\ 2q \\ 2r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Встановимо  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  - власні значення симетричної матриці  $\mathbf{Q}$  і  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  - відповідні власні вектори. Обов'язкова умова полягає в тому, що усі власні вектори повинні мати одиничну довжину  $\|\mathbf{e}_i\| = 1$ . Вважатимемо, що  $\mathbf{E}$  - ортогональна матриця  $3 \times 3$  з колонками, які містять ці власні вектори, і  $\mathbf{\Lambda}$  - діагональна матриця з відповідними власними значеннями по діагоналі, пов'язані співвідношенням  $\mathbf{Q} \mathbf{E} = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda}$ .

Помноживши з обох боків на  $\mathbf{E}^T$  і зважаючи на те, що  $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^T$ , отримаємо  $\mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{E} = \Lambda$ . Тепер перепишемо рівняння:

$$(\mathbf{v}^T \mathbf{E}) \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{E} (\mathbf{E}^T \mathbf{v}) + (\mathbf{v}^T \mathbf{E}) (\mathbf{E}^T \mathbf{b}).$$

Визначимо  $\mathbf{v}_a = \mathbf{E}^T \mathbf{v}$ ;  $\mathbf{b}_a = \mathbf{E}^T \mathbf{b}$  і, підставивши в це рівняння, отримаємо:

$$\mathbf{v}_a^T \Lambda \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a^T \mathbf{b}_a + d. \tag{10}$$

Оскільки матриця  $\Lambda$  є діагональною, після перемноження залишається рівняння, яке має тільки лінійні складові та константу. Для визначення компонентів зсуву візьмемо похідну від рівняння (10):

$$2\Lambda \mathbf{v}_a + \mathbf{b}_a.$$

Якщо вважати, що невідомого зміщення  $\mathbf{t}$  немає в рівнянні (10), то

$$2\Lambda(\mathbf{v}_a + \mathbf{t}) + \mathbf{b}_a = 0; \mathbf{v}_a = 0 \Rightarrow 2\Lambda \mathbf{t} = -\mathbf{b}_a \Rightarrow \mathbf{t} = -\frac{1}{2} \Lambda^{-1} \mathbf{b}_a.$$

Замінивши  $\mathbf{v}_a$  на  $\mathbf{v}_b = (\mathbf{v}_a + \mathbf{t})$ , отримаємо в результаті підстановки:

$$d_b = d + \mathbf{t}^T \mathbf{b}_a.$$

Остаточно рівняння квадратичної поверхні в канонічній формі матиме такий вигляд:

$$\mathbf{v}_b^T \Lambda \mathbf{v}_b + d_b = 0.$$

Канонічний аналіз дає змогу наближено визначити величини розвороту, зміщення та інші параметри поверхні. Ми застосували цю техніку для наближеного обчислення параметрів циліндричної оболонки.

Параметрами циліндра є  $\mathbf{a} = (a_x \ a_y \ a_z)$  – напрямні косинуси осі циліндра,  $\mathbf{c} = (c_x \ c_y \ c_z)$  – координати точки на осі циліндра, найближчої до початку координат, і радіус. Якщо  $i$ -та точка знаходиться на поверхні циліндра, то справедливим є векторне рівняння:

$$\|(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \times \mathbf{a}\| - r = 0. \tag{11}$$

Позначення в рівнянні (11) можна зрозуміти з рис. 2.

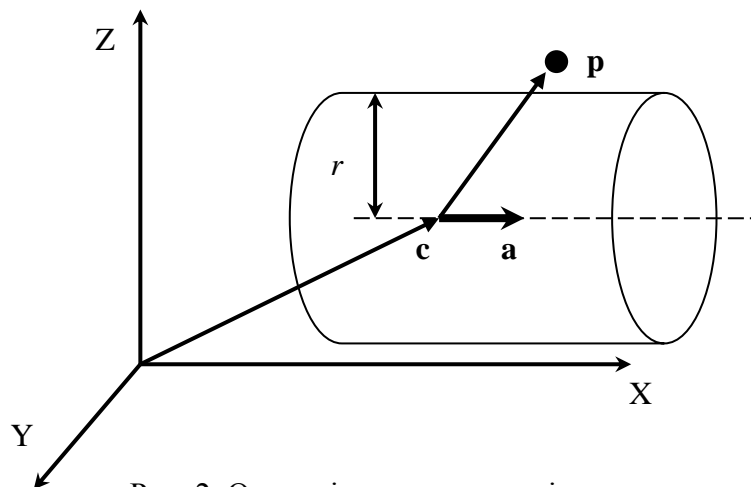


Рис. 2. Основні параметри циліндра



Якщо умова (11) не задовольняється, виникають нев'язки  $\|(\mathbf{p}-\mathbf{c})\times\mathbf{a}\|-r=\Delta_i$ . До стандартних рівнянь поправок, отриманих після лінеаризації виразу (11), слід додати обмеження:

$$\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=1; \quad a_x c_x+a_y c_y+a_z c_z=0. \quad (12)$$

Перший з виразів (12) означає, що вектор  $\mathbf{a}$  має одиничну довжину, другий – що точка  $\mathbf{c}$  повинна бути на одній осі з вектором  $\mathbf{a}$ .

$$\mathbf{v}_c=r; \quad (\mathbf{p}-\mathbf{c})=\mathbf{v}_s; \quad \Delta=\|\mathbf{v}_s\times\mathbf{a}\|-r.$$

Тоді для зведення рівняння (11) до лінійного вигляду треба обчислити частинні похідні за виразами:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} a_z v_{s_y}-a_y v_{s_z} \\ a_x v_{s_z}-a_z v_{s_x} \\ a_y v_{s_x}-a_x v_{s_y} \end{bmatrix}.$$

На початковому етапі було виконане оцінювання параметрів поверхні без систематичних похибок (табл. 1).

Таблиця 1

**Результати оцінювання**

Метод	Xн, м	Yн, м	Zн, м	R, м	Xв, м	Yв, м	Zв, м
МНК	0,0001	-0,0011	-30,186	14,7652	-0,0032	-0,0022	-10,085
МВЗН	0,0006	0,0003	-30,186	14,7676	-0,0042	-0,0015	-10,085
МСКК	-0,0015	-0,0005	-30,186	14,7677	-0,0063	-0,0024	-10,085
МНМ	-0,0014	-0,0003	-30,186	14,7655	-0,0062	-0,0022	-10,085

За результатами оцінювання побудовано графік відхилень для кожного перерізу.

МНК

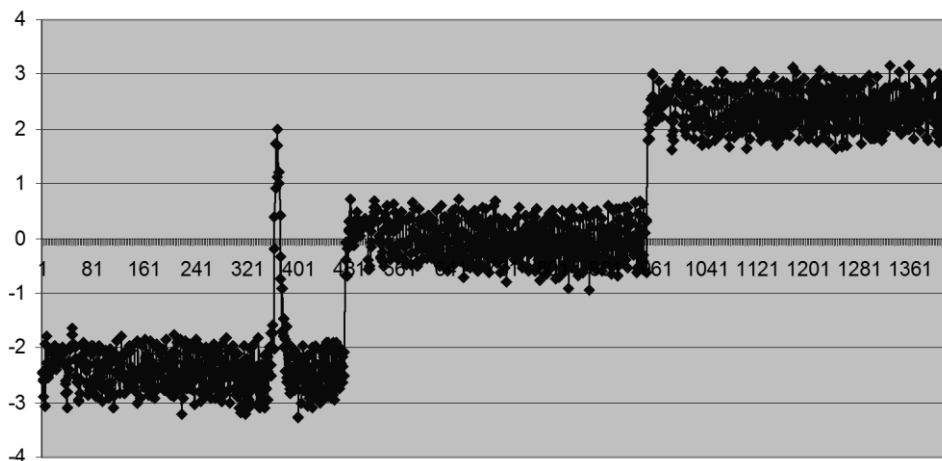


Рис. 3. Залишкові відхилення на кожному перерізі (мм)

З графіка випливає два висновки. Перший – наявність значної за величиною випадкової похибки, яка фактично наближається до грубої. Другий – є суттєвий систематичний зсув між перерізами.

Для дослідження запропонованих нами методів оцінювання до кожного перерізу додамо систематичну похибку, яка змінюється за таким законом:

$$\delta = A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + w, \quad (13)$$

де  $A$  – амплітуда синусоїди,  $L$  – довжина хвилі синусоїди,  $w$  - випадкова складова.

Значення систематичної похибки введені в координати кожного перерізу. Залежність (13) можна представити графічно (рис. 4).

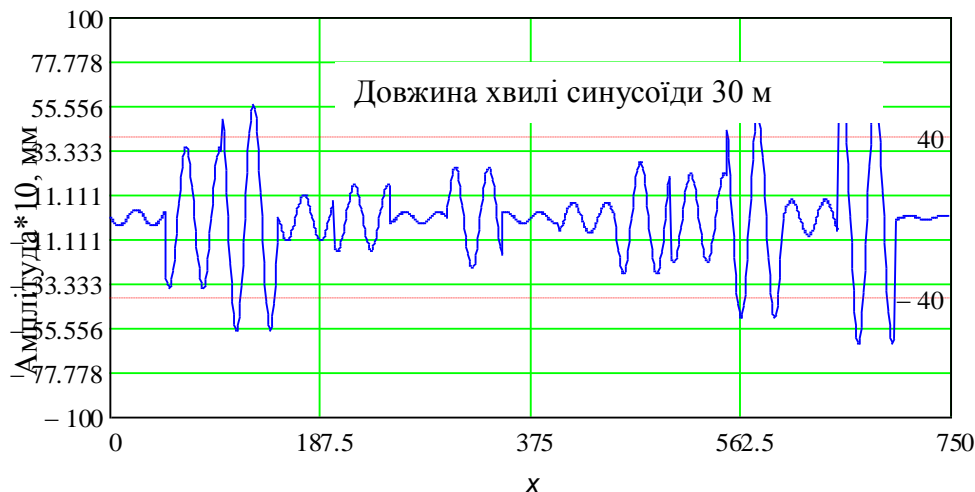


Рис. 4. Графік зміни систематичної похибки

Далі виконаємо оцінювання параметрів поверхні оболонки з врахуванням систематичних похибок. Результати оцінювання представлено в табл. 2.

Таблиця 2

**Результати оцінювання з врахуванням систематичних похибок**

Метод	X <sub>н</sub> , м	Y <sub>н</sub> , м	Z <sub>н</sub> , м	R, м	X <sub>в</sub> , м	Y <sub>в</sub> , м	Z <sub>в</sub> , м
МНК	0,0005	-0,0013	-30,186	14,7647	-0,0031	-0,0027	-10,085
МВЗН	0,0001	0,0001	-30,186	14,7678	-0,0050	-0,0017	-10,085
МСКК	-0,0014	-0,0002	-30,186	14,7681	-0,0060	-0,0020	-10,085
МНМ	-0,0018	-0,0005	-30,187	14,7651	-0,0052	-0,0017	-10,085

Найбільшого ефекту вдалося досягти, застосувавши метод середньої квадратичної колокації. За цього методу вдалося не тільки отримати найменшу СКП = 2,2 мм, а й однозначно відтворити модель систематичної похибки, наявної в результатах спостережень.

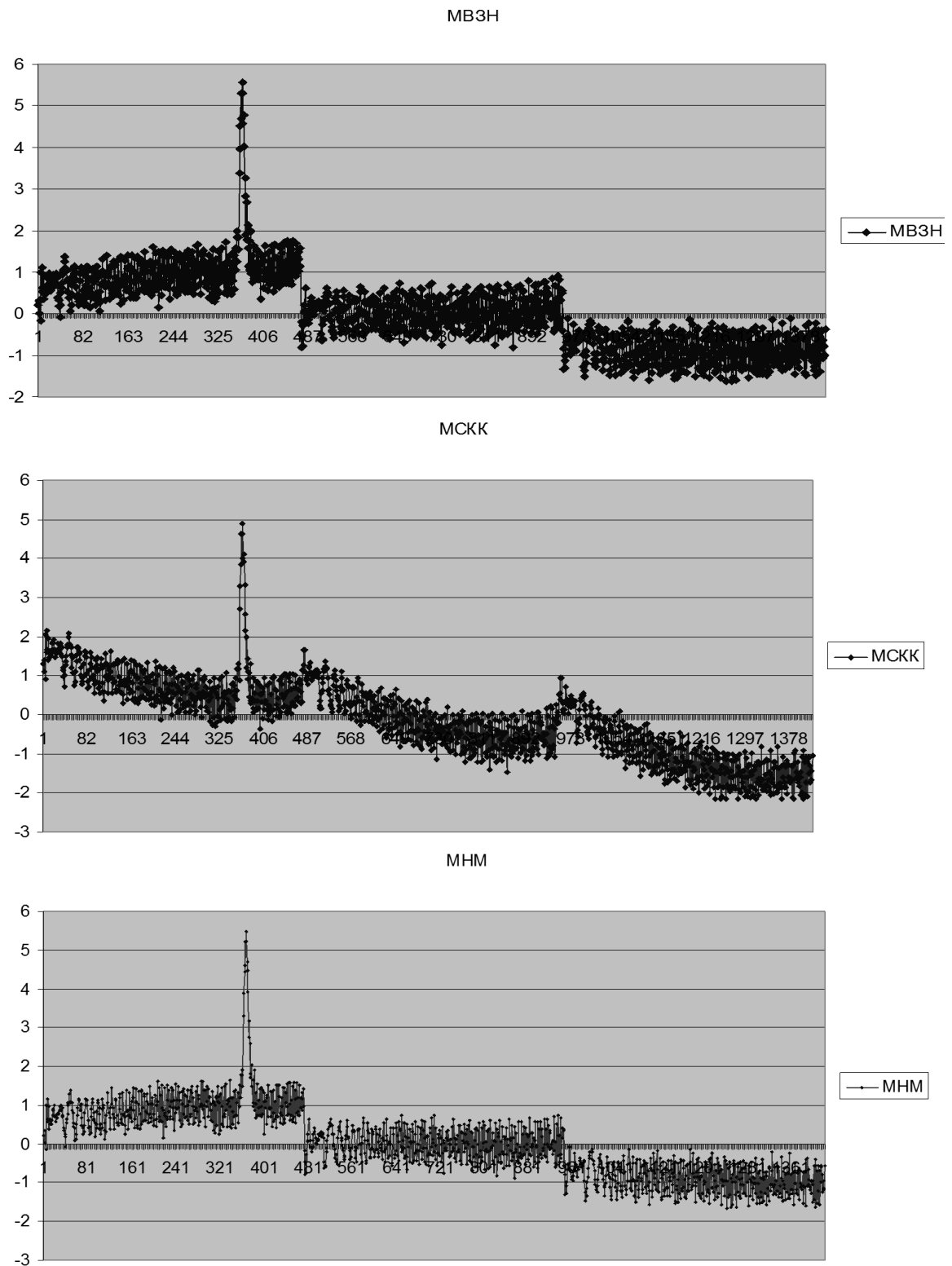


Рис. 5. Залишкові відхилення після врахування впливу систематичних похибок (мм)

Ще до включення систематичних похибок виокремлено фрагмент, де, можливо, наявні грубі помилки. Завдяки застосуванню запропонованих методів, окрім виключення систематичних похибок, ідентифіковано також п'ять грубих помилок. Остаточні графіки залишкових відхилень представлено на рис. 6.

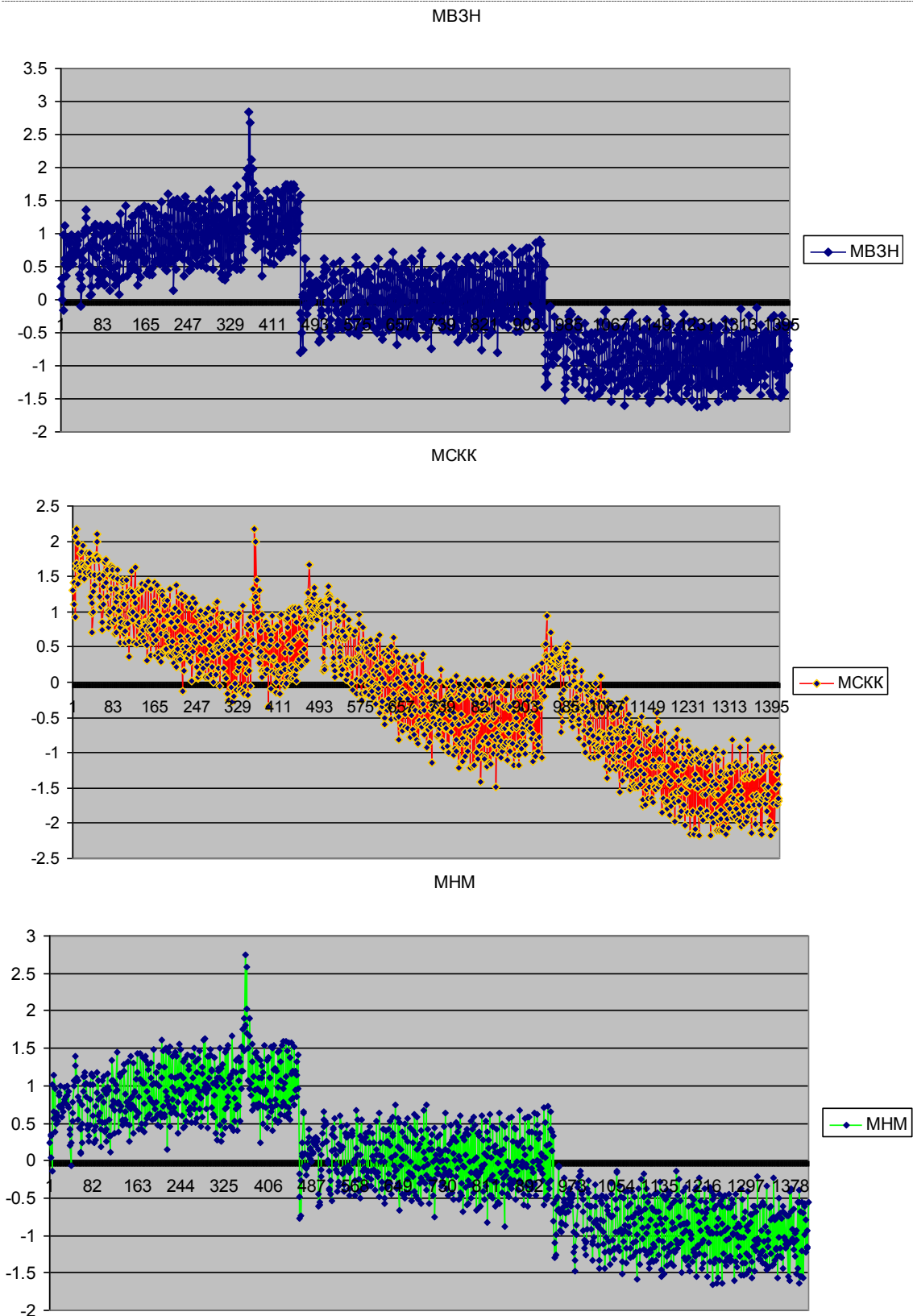


Рис. 6. Залишкові відхилення після врахування впливу систематичних та грубих помилок

Результати дослідження запропонованих методів дають змогу сформулювати загальні висновки.

**Висновок.** У роботі досліджено метод наземного лазерного сканування для визначення параметрів просторових оболонок. Поставлене завдання розв'язано з метою удосконалення методики визначення деформацій просторових оболонок. У процесі оцінювання параметрів оболонок досліджено такі методи: найменших модулів, варіаційно-зважених наближень та середньої квадратичної колокації. Виявлено, що найбільш ефективним є метод середньої квадратичної колокації.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kefyalew, H.* Investigation of the use of Laser Scanning for Deformation Monitoring [Text]: Master of Science Thesis / H.Kefyalew. - Stockholm, 2013. – 67 p.
2. *Koska B., Křemen T., Pospíšil J., Kyrinovič P., Halíčková J.* Monitoring Of Lock Chamber Dynamic Deformation // 13<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurement and Analysis, Lisbon, 12-15 May 12-15 2008 10p.
3. *Lindenbergh R., Pfeifer N., Rabbani T.* Accuracy analysis of the leica HDS3000 and feasibility of tunnel deformation monitoring. ISPRS WG III/3 Workshop "Laser scanning 2005", Enschede, the Netherlands, September 12-14, 2005 6p.
4. *Rabbani, T.* Automatic Reconstruction of Industrial Installations Using Point Clouds and Images [Text]: Thesis for the Degree of Doctor of Science / T. Rabbani. – Delft, 2006 – p. 175.
5. *Schäfer T., Weber T., Kyrinovič P., Zámečnicková M.* Deformation Measurement Using Terrestrial Laser Scanning at the Hydropower Station of Gabčíkovo // INGENEO 2004 and FIG Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying Bratislava, Slovakia, November 11-13, 2004 TS2 – Terrestrial Laser Scanning, 10p.
6. *Вальков В.А.* Геодезические наблюдения за процессом деформирования высотных сооружений с использованием технологии наземного лазерного сканирования [Текст] : дис. ... канд. техн. наук: 25.00.32 / В. А. Вальков. – СПб., 2015. — 158 с.
7. *Журкин И.Г.* Методы вычислений в геодезии / И.Г. Журкин, Ю.М. Нейман. – М.: Недра, 1988 – 304 с.
8. *Маркузе Ю.И.* Основы уравнильных вычислений / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1990. – 240 с.
9. *Мориц Г.* Современная физическая геодезия / Г. Мориц. – М.: Недра, 1980. – 324 с.
10. *Наземное лазерное сканирование: монография / В.А. Середович, А.В. Комиссаров, Д.В. Комиссаров, Т.А. Широкова.* – Новосибирск: СГГА, 2009. – 261 с.
11. *Титов О.А.* Применение среднеквадратической коллокации для обработки РСДБ наблюдений / О.А. Титов // Сообщения ИПА РАН, СПб., – 1996. – №96. – 132 с.
12. *Шульц Р.В.* Теорія і практика наземного лазерного сканування в задачах інженерної геодезії [Текст] : дис. ... доктора техн. наук: 05.24.01 / Р. В. Шульц. – К., 2012. – 364 с.

## REFERENCES

1. Kefyalew, H. (2013) Investigation of the use of Laser Scanning for Deformation Monitoring [Investigation of the use of Laser Scanning for Deformation Monitoring]. Stockholm, 67.
2. Koska B., Křemen T., Pospíšil J., Kyrinovič P., Halíčková J. (2008) Monitoring Of Lock Chamber Dynamic Deformation // 13<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurement and Analysis, Lisbon, 10p.
3. Lindenbergh R., Pfeifer N., Rabbani T. (2005) Accuracy analysis of the leica HDS3000 and feasibility of tunnel deformation monitoring. ISPRS WG III/3 Workshop "Laser scanning 2005", Enschede, the Netherlands, 6 p.
4. Rabbani, T. (2006) Automatic Reconstruction of Industrial Installations Using Point Clouds and Images *Thesis for the Degree of Doctor of Science*. – Delft.
5. Schäfer T., Weber T., Kyrinovič P., Zámečnicková M. (2004) Deformation Measurement Using Terrestrial Laser Scanning at the Hydropower Station of Gabčíkovo // INGENIO 2004 and FIG Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying Bratislava, Slovakia, TS2 – Terrestrial Laser Scanning, 10p.
6. Valkov, V.A. (2015). Geodezicheskie nablyudeniya za protsessom deformirovaniya vyisotnykh sooruzheniy s ispolzovaniem tehnologii nazemnogo lazernogo skanirovaniya [Geodetic monitoring of the deformation process of high-rise buildings using the technology of terrestrial laser scanning]. *Doctor's thesis*. St. Petersburg [in Russian].
7. Zhurkin, I., Neumann Y. (1988) *Metodyi vyichisleniy v geodezii [Methods of calculations in geodesy]*. Moscow: Nedra [in Russian].
8. Marcuse, Y. (1990) *Osnovy uravnitelnykh vyichisleniy [Fundamentals of adjustment calculations]*. Moscow: Nedra [in Russian].
9. Moritz, H. (1980) *Sovremennaya fizicheskaya geodeziya [Modern physical geodesy]*. Moscow: Nedra [in Russian].
10. V.A. Seredovich, A.V. Komissarov, D.V. Komissarov, T.A. Shirokova (2009) *Nazemnoe lazernoe skanirovanie [Terrestrial laser scanning]*. Novosibirsk: SGGA [in Russian].
11. Titov, O. (1996) *Primenenie srednekvadratochnoy kollokatsii dlya obrabotki RSDB nablyudeniya [Application average quadratic collocation to process of VLBI observations]*. St. Petersburg: Bulletin RAS [in Russian].
12. Shults R. V. (2012). Teoriya i praktyka nazemnogo lazernogo skanuvannya v zadachakh inzhenernoyi geodeziyi [Theory and practice of terrestrial laser scanning in the tasks of applied geodesy]. *Doctor's thesis*. Kyiv [in Ukrainian].

Н.В. Куличенко

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБОЛОЧЕК В ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ  
ЗА ДЕФОРМАЦИЯМИ ПО ДАННЫМ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО  
СКАНИРОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ  
ПОГРЕШНОСТЕЙ**

*В работе рассмотрены задачи исследования деформаций пространственных оболочек инженерных сооружений. Выполнены исследования различных методов обработки данных наземного лазерного сканирования при наличии систематических погрешностей. Исследование осуществлено на примере результатов сканирования пространственных оболочек. Для этого класса инженерных сооружений определение деформаций по данным наземного лазерного сканирования можно выполнить путем построения математической модели реальной поверхности и последующего сравнения этой модели с проектной. Оценивание параметров реальной модели поверхности оболочки предложено осуществлять с использованием различных методов: наименьших квадратов, наименьших модулей, вариационно-взвешенных приближений и средней квадратической коллокации. Исследована эффективность каждого из этих методов и выяснено, какой из них целесообразно использовать для оценки параметров пространственных оболочек.*

**Ключевые слова:** наземное лазерное сканирование, пространственная оболочка, метод наименьших квадратов, метод наименьших модулей, метод вариационно-взвешенных приближений, метод средней квадратической коллокации.

N.V. Kulichenko

**DETERMINATION OF HISTORIC BUILDINGS ROLLS BY TERRESTRIAL  
LASER SCANNING**

*The paper discusses the problem of the engineering structures spatial shells deformations study. The studies of various methods of terrestrial laser scanning data processing in the presence of systematic errors were performed. A study carried out by the example of the spatial shells scanning results. For this class of engineering structures definition of deformation according to terrestrial laser scanning data can be performed by constructing a mathematical model of a real surface and the subsequent comparison of this model with the project model. Estimation of the real models parameters of the shell surface offered to be carried out using different methods: least squares, the least modules, the variational-weighted approximations and average quadratic collocation. The efficiency of each of these methods and found out which of them should be used in evaluating the spatial parameters of the shells was researched. According to the research, the most effective method is an average quadratic collocation.*

**Keywords:** terrestrial laser scanning, spatial shell, the method of least squares, the method of least modules, the method of variational-weighted approximations, average quadratic collocation method.