УДК 658.012

КАТКОВА Т.И., кандидат педагогических наук, доцент (Бердянский университет менеджмента и бизнеса)

Статистическое оценивание параметров производственных функций

Рассмотрена задача статистического оценивания параметров производственных функций, устанавливающих зависимость между прибылью предприятия и объемом вкладываемых средств. Предложена нелинейная модель производственной функции и описана итерационная процедура оценивания её параметров. Рассмотренный метод дает возможность на основе статистических данных оценить параметры производственных функций, что позволяет в дальнейшем решать задачу рационального распределения активов предприятия по выбранным направлениям деятельности

Ключевые слова: *производственная функция, переменная эластичность, статистическое оценивание.*

Введение

Развитые статистические методы позволяют количественно определить характеристики функционирования технических, экономических и других систем [1] и служат эффективным инструментом планирования, а также оценки и прогнозирования их экономических показателей. Применительно к предприятиям, одна из важных задач обеспечения надлежащей эффективности их функционирования состоит в рациональном распределении их активов по направлениям деятельности. Для успешного решения этой задачи необходимо знание производственных функций, описывающих зависимость результатов деятельности предприятий от величины вкладываемых ресурсов.

Анализ публикаций

В экономической литературе предлагаются описания типовых производственных функций [2, 3]. Анализ достоинств и недостатков разных вариантов построения таких функций, проведенный в [3], позволяет остановить выбор на соотношении

$$R[K] = a_0 K^{a_1}, \qquad (1)$$

где K - ресурс, вкладываемый в производство,

$R[K]$ - прибыль, получаемая от вложения ресурса K.

Примем это соотношение в качестве структурно-образующего элемента целевой функции в оптимизационной задаче рационального распределения ресурсов предприятия.

© Т.И. Каткова, 2014

Введенная одномерная производственная функция является частным случаем традиционно используемой в экономических исследованиях производственной функции Кобба-Дугласа

$$R\left[K,L\right] = a_0 K^{a_1} L^{a_2},$$

введенной в 1928 г. в работе «Теория производства». Эта производственная функция устанавливает зависимость влияния затрачиваемого капитала (*K*) и объема труда (*L*) на объем выпускаемой продукции. При этом константы a_1 и a_2 есть соответственно коэффициенты эластичности по капиталу и труду. Несмотря на широкое применение канонического соотношения (1) следует отметить появление в современной литературе критики стержневого допущения о независимости коэффициентов эластичности от вкладываемых ресурсов [4], что в особенности актуально для одномерной модели. В соответствии с этим введем модифицированную одномерную производственную функцию

$$R[K(t)] = a_0(t) K(t)^{a_1(t)},$$

где $K(t)$- ресурс, вкладываемый в производство в момент t,

$R[K(t)]$- прибыль, получаемая от вложения ресурса в момент t.

Постановка задачи

Понятно, что качество решения конкретных оптимизационных задач распределения капитала по стратегическим направлениям деятельности зависит от точности оценивания функций

$a_{0j}(t), a_{1j}(t), \quad j = 1, 2, ..., n$. Введем однотипные модели, описывающие поведение во времени этих функций следующим образом: $a_{0j}(t) = a_{00j} + a_{01j}t, \quad a_{1j}(t) = a_{10j} + a_{11j}t$.

Тогда модифицированная функция, описывающая зависимость прибыли от вложения капитала в качестве $K_j(T_i)$ в j - е направление деятельности в момент T_i имеет вид:

$$R_j(T_i) = (a_{00j} + a_{01j}T_i)K_j(T_i)^{a_{10j}+a_{11j}T_i},$$
$$j = 1, 2, ..., n, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{2}$$

$$a_{10j} + a_{11j}T_{\max} < 1, \tag{3}$$

$$a_{10j} + a_{11j}T_{\max} > 0. \tag{4}$$

Поставим задачу оценивания параметров функций (2).

Основные результаты

Процедура оценивания параметров функции (2) выполняется в два этапа. На первом этапе ограничения (3)-(4) не учитываются. Если полученные в результате оценивания значения a_{10} и a_{11} таковы, что ограничения удовлетворяются, то эти значения могут быть использованы при решении задачи рационального распределения. В противном случае, на втором этапе, осуществляется необходимая корректировка.

Первый этап. Понятно, что при наличии надлежащих статистических данных оценивание неизвестных параметров $a_{00j}, a_{01j}, a_{10j}, a_{11j}$ для каждого из стратегических направлений можно осуществлять независимо (то есть эффект взаимного влияния отсутствует). В связи с этим для упрощения записи индекс j опустим. Тогда задача оценивания параметров $A = (a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11})$ формулируется следующим образом: найти вектор *A*, минимизирующий

$$J(A) = \sum_{i=1}^{N}\left[(a_{00} + a_{01}T_i)K(T_i)^{a_{10}+a_{11}T_i} - R(T_i)\right]^2. \tag{5}$$

Непосредственное дифференцирование (5) по неизвестным параметрам $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$ приводит к системе уравнений:

$$\frac{\partial J(A)}{\partial a_{00}} = 2\sum_{i=1}^{N}\left[(a_{00} + a_{01}T_i)K(T_i)^{a_{10}+a_{11}T_i} - R(T_i)\right]K(T_i)^{a_{10}+a_{11}T_i} = 0,$$

$$\frac{\partial J(A)}{\partial a_{01}} = 2\sum_{i=1}^{N}\left[(a_{00} + a_{01}T_i)K(T_i)^{a_{10}+a_{11}T_i} - R(T_i)\right]T_i K(T_i)^{a_{10}+a_{11}T_i} = 0,$$

$$\frac{\partial J(A)}{\partial a_{10}} = 2\sum_{i=1}^{N}\left[(a_{00} + a_{01}T_i)K(T_i)^{a_{10}+a_{11}T_i} - R(T_i)\right](a_{00} + a_{01}T_i)K(T_i)^{a_{10}+a_{11}T_i}\ln K(T_i) = 0,$$

$$\frac{\partial J(A)}{\partial a_{11}} = 2\sum_{i=1}^{N}\left[(a_{00} + a_{01}T_i)K(T_i)^{a_{10}+a_{11}T_i} - R(T_i)\right]\times$$
$$\times(a_{00} + a_{01}T_i)T_i K(T_i)^{a_{10}+a_{11}T_i}\ln K(T_i) = 0.$$

Эта система нелинейных алгебраических уравнений может быть решена численно. Вместе с тем, искомое решение может быть получено с использованием простой итерационной процедуры, реализуемой следующим образом.

На первом шаге положим $a_{01} = 0$. Тогда соотношение (2) редуцируется к виду

$$R(T_i) = a_{00}K(T_i)^{a_{10}+a_{11}T_i}, \quad i = 1, 2, ..., N \tag{6}$$

Осуществим монотонное преобразование левой и правой части соотношений (6), прологарифмировав их. При этом получим

$$\ln R(T_i) = \ln a_{00} + (a_{10} + a_{11}T_i)\ln K(T_i), \quad i = 1,2,...,N \, .$$

Введем переобозначения:

$$r_i = \ln R(T_i), \quad a_0 = \ln a_{00}, \quad k_i = \ln K(T_i).$$

Теперь будем искать набор a_0, a_{10}, a_{11}, минимизируя функционал

$$I_1 = \sum_{i=1}^{N} (a_0 + a_{10}k_i + a_{11}T_i k_i - r_i)^2 \, . \tag{7}$$

Введем матрицу H и векторы A и Y следующим образом:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_1T_1 \\ 1 & k_2 & k_2T_2 \\ . & . & . \\ 1 & k_N & k_NT_N \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_{10} \\ a_{11} \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ ... \\ r_N \end{pmatrix}.$$

Тогда функционал (7) в матричных обозначениях примет вид

$$I_1 = (H_1A - Y_1)^T (H_1A - Y_1).$$

Минимизируя I_1 по вектору A, получим оптимальный набор

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_{10} \\ \hat{a}_{11} \end{pmatrix} = (H_1^T H_1)^{-1} H_1^T Y_1, \quad \hat{a}_{00} = e^{\hat{a}_0} \, .$$

На второй итерации полученные оценки $\hat{a}_{10}$ и $\hat{a}_{11}$ используем для получения оценки a_{01} и уточнения a_{00}. Введем соотношение

$$R(T_i) = (a_{00} + a_{01}T_i)K(T_i)^{\hat{a}_{10} + \hat{a}_{11}T_i}, \quad i = 1,2,...,N.$$

Введем обозначение

$$K(T_i)^{\hat{a}_{10} + \hat{a}_{11}T_i} = b_i, \quad i = 1,2,...,N.$$

При этом получим

$$R(T_i) = a_{00}b_i + a_{01}T_ib_i, \quad i = 1,2,...,N.$$

Введем

$$I_2 = \sum_{i=1}^{N} (R(T_i) - a_{00}b_i + a_{01}T_ib_i)^2,$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} b_1 & b_1T_1 \\ b_2 & b_2T_2 \\ \cdots & \cdots \\ b_N & b_NT_N \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} R(T_1) \\ R(T_2) \\ ... \\ R(T_N) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_2 = \left(H_2^T H_2\right)^{-1} H_2^T Y_2 = \begin{pmatrix} \hat{a}_{00} \\ \hat{a}_{01} \end{pmatrix}.$$

На третьей итерации осуществим уточнение оценок $\hat{a}_{10}$ и $\hat{a}_{11}$. Введем

$$R(T_i) = (\hat{a}_{00} + \hat{a}_{01}T_i)K(T_i)^{a_{10} + a_{11}T_i}, \quad i = 1,2,...,N.$$

После логарифмирования получим

$$\ln R(T_i) = \ln(\hat{a}_{00} + \hat{a}_{01}T_i) + (a_{10} + a_{11}T_i)\ln K(T_i).$$

Введем обозначения

$$\ln(\hat{a}_{00} + \hat{a}_{01}T_i) = d_{0i},$$

тогда, с учетом ранее введенных обозначений, имеем

$$r_i = d_{0i} + a_{10}k_i + a_{11}T_ik_i \, .$$

Теперь введем

$$H_3 = \begin{pmatrix} k_1 & k_1T_1 \\ k_2 & k_2T_2 \\ \cdots & \cdots \\ k_N & k_NT_N \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{11} \end{pmatrix}; \quad Y_3 = Y_1.$$

Тогда

$$A_3 = \left(H_3^T H_3\right)^{-1} H_3^T Y_1 = \begin{pmatrix} \hat{a}_{10} \\ \hat{a}_{11} \end{pmatrix}.$$

Очередная, четвертая итерация повторяет вторую. При этом полученные на третьей итерации оценки $\hat{a}_{10}$ и $\hat{a}_{11}$ используются для уточнения оценок a_{00} и a_{01}. После этого пятая итерация повторяет третью и так далее до выполнения какого-либо естественного критерия останова.

Описанная итерационная процедура повторяется для всех $j = 1, 2, \ldots, n$, что дает полное описание всех компонентов целевой функции (2).

Второй этап. По результатам оценивания значение параметра a_{11} может оказаться положительным или отрицательным. В первом из этих случаев возникает опасность нарушения ограничения (3), а во втором – ограничения (4). Заметим, что невыполнение ограничения (3) недопустимо, так как в этом случае нарушается закон об убывающей эффективности капитала [4]. В связи с этим введем процедуру оценивания параметров a_{10} и a_{11}, обеспечивающую безусловное выполнение ограничения (3). Соответствующую технологию рассмотрим применительно к первому шагу вычислительной схемы оценивания параметров производственной функции.

Прежде всего, путем добавления вспомогательной переменной $a_{12} > 0$ преобразуем неравенство (3) в равенство

$$a_{10} + a_{11} T_{\max} + a_{12} = 1. \tag{8}$$

С вводом новой переменной a_{12} соотношение (7) принимает вид

$$I_{11} = \sum_{i=1}^{N} (a_0 + a_{10} k_i + a_{11} T_i k_i + a_{12} k_i - r_i)^2.$$

Теперь задача сведена к отысканию набора $a_0, a_{10}, a_{11}, a_{12}$, минимизирующего

$$I_1 = (\tilde{H}_1 \tilde{A}_1 - Y)^T (\tilde{H}_1 \tilde{A}_1 - Y) \tag{9}$$

и удовлетворяющего (8).

Здесь

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_1 T_1 & k_1 \\ 1 & k_2 & k_2 T_2 & k_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & k_N & k_N T_N & k_N \end{pmatrix}; \quad \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи получим, используя метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем вектор $C = (0 \quad 1 \quad T_{\max} \quad 1)$ и запишем функцию Лагранжа

$$\Phi(\tilde{A}_1, \lambda) = (\tilde{H}_1 \tilde{A}_1 - Y)^T (\tilde{H}_1 \tilde{A}_1 - Y) - \lambda (C \tilde{A}_1 - 1). \tag{10}$$

Дифференцируя (10) по $\tilde{A}_1$, получим

$$\frac{\partial \Phi(\tilde{A}_1, \lambda)}{\partial \tilde{A}_1} = 2(\tilde{A}_1^T \tilde{H}_1^T \tilde{H}_1 - Y^T \tilde{H}_1) - \lambda C = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \Phi(\tilde{A}_1, \lambda)}{\partial \lambda} = C \tilde{A}_1 - 1 = 0. \tag{12}$$

Из (11) имеем

$$\tilde{A}_1^T \tilde{H}_1^T \tilde{H}_1 = Y^T \tilde{H}_1 + \frac{1}{2} \lambda C,$$

$$\tilde{A}_1 \tilde{H}_1^T \tilde{H}_1 = Y \tilde{H}_1^T + \frac{1}{2} \lambda C^T,$$

$$\tilde{A}_1 = (\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \tilde{H}_1^T Y + \frac{\lambda}{2} (\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} C^T. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), найдем λ:

$$C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \tilde{H}_1^T Y + \lambda \frac{C}{2} (\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} C^T = 1.$$

Отсюда

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1 - C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \tilde{H}_1^T Y}{C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} C^T}. \tag{14}$$

Подставив (14) в (13), найдем искомый вектор $\tilde{A}_1$

$$\tilde{A}_1 = (\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \tilde{H}_1^T Y + \frac{1 - C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \tilde{H}_1^T Y}{C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} C^T} (\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} C^T . \quad (15)$$

Как известно [5], метод неопределенных множителей Лагранжа не гарантирует получение решения с неотрицательными компонентами. Вместе с тем, в рассматриваемом случае требование неотрицательности всех компонентов вектора $\tilde{A}_1$ является обязательным. С учетом этого требования задача преобразуется к виду: найти вектор $\tilde{A}_1$, минимизирующий (9), удовлетворяющий (8) и, кроме того, дополнительному ограничению

$$\tilde{A}_1 \geq 0 . \quad (16)$$

Как и ранее, функция Лагранжа имеет вид (10). В [6] показано, что решение A_1^* задачи (8), (9), (16) удовлетворяет условиям Куна-Таккера:

$$\frac{\partial \Phi(A_1^*, \lambda^*)}{\partial A_1} \geq 0 , \quad (17)$$

$$A_1 \frac{\partial \Phi(A_1^*, \lambda^*)}{\partial A_1} = 0 , \quad (18)$$

$$A_1^* \geq 0 , \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Phi(X^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0 . \quad (20)$$

Условия (17)-(19) означают следующее. Если минимум (9) достигается в точке A_1^*, где все компоненты неотрицательны, то соотношение (17) выполняется как равенство. Если же в точке минимума какие-то компоненты решения отрицательны, то в соответствии с (18), (19) они должны быть положены равными 0. При этом соответствующие соотношения в (18) выполняются как равенства, а в (17) как строгие неравенства. Соотношение (20) эквивалентно (12).

Запишем (17) с учетом (11):

$$2(\tilde{A}_1^T \tilde{H}_1^T \tilde{H}_1 - Y^T \tilde{H}_1) - \lambda C \geq 0 . \quad (21)$$

Транспонируем (21) и введем столбец μ по формуле

$$\mu = 2(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1 \tilde{A}_1 - \tilde{H}_1 Y^T) - \lambda C^T .$$

Тогда получим

$$2(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1 \tilde{A}_1 - \tilde{H}_1 Y^T) - \lambda C^T - \mu = 0 . \quad (22)$$

Решаем уравнение (22) относительно $\tilde{A}_1$:

$$\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1 \tilde{A}_1 = \tilde{H}_1^T Y + \frac{1}{2}(\lambda C^T + \mu) ,$$

$$\tilde{A}_1 = (\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \tilde{H}_1^T Y + \frac{\lambda}{2} (\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} C^T + (\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \mu .$$

Подставим полученное выражение в (12) и найдем λ:

$$C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \tilde{H}_1^T Y + \frac{\lambda}{2} C(\tilde{H}_1^T \tilde{H})^{-1} C^T + C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \mu = 1 ,$$

откуда

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1 - C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \tilde{H}_1^T Y - C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \mu}{C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} C^T} .$$

Тогда

$$\tilde{A}_1 = (\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \tilde{H}_1^T Y + (\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \mu + \frac{1 - C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \tilde{H}_1^T Y - C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} \mu}{C(\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} C^T} (\tilde{H}_1^T \tilde{H}_1)^{-1} C^T .$$

Полученный вектор удовлетворяет (16).

Совершенно аналогично осуществляется построение вектора оценок параметров уравнения регрессии (2) в случае, когда нарушается условие (4).

Выводы

Рассмотренный метод даст возможность на основе статистических данных оценить параметры производственных функций. Предложенная в работе модификация производственных функций, учитывающая переменный характер коэффициента эластичности, обеспечивает адекватное описание зависимости получаемой прибыли от вкладываемого ресурса, что позволяет в дальнейшем решать задачу рационального распределения активов предприятия по выбранным направлениям деятельности.

Литература

1 Афифи А. Статистический анализ: Пер. с англ. / А. Афифи, С. Эйзен. – М. : МИР, 1982. - 488с

2 Курс экономической теории / Под ред. Чепурина М.Н., Киселевой Е.А. –М.: АСА, 2006. - 832с

3 Замков О. О. Математические методы в экономике / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. – М. : МГУ, изд. «ДИС», 1998. - 368с

4 Современная экономическая наука / Под ред. Думной Н. А., Николаевой И. П. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. - 692с

5 Карманов В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. – М: Наука, 1986. - 288с

6 Мину М. Математическое программирование: Пер. с фр. / М. Мину. – М. : Наука, 1990. - 488с

Каткова Т. І. Статистичне оцінювання параметрів виробничих функцій. Розглянуто задачу статистичного оцінювання параметрів виробничих функцій, що встановлюють залежність між прибутком підприємства і обсягом вкладених коштів . Запропоновано нелінійна модель виробничої функції і описана итерационная процедура оцінювання її параметрів . Розглянутий метод дає можливість на основі статистичних даних оцінити параметри виробничих функцій, що дозволяє надалі вирішувати задачу раціонального розподілу активів підприємства за обраними напрямками діяльності.

Ключові слова: виробнича функція, змінна еластичність, статистичне оцінювання.

Katkova T. I. Statistical estimation of production functions parameters. The problem of statistical estimation of production functions parameters, establishing the relationship between enterprise profit and the amount of input has been considered. A nonlinear model of the production function has been proposed and the iterative procedure of its parameters estimation has been described. The considered method allows estimating production functions parameters on the basis of statistical data, that allows further solution of the problem of rational distribution of enterprise assets in selected business areas.

Key words: production function, variable elasticity, statistical estimation.

Рецензент Раскин Л.Г., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой компьютерного мониторинга и логистики НТУ "ХПИ"

Поступила 31.03.2014г.