УДК 621.3.019

ВОЛОДАРСКИЙ В.А., к.т.н., с.н.с., профессор (Красноярский институт железнодорожного транспорта)

О нетрадиционных распределениях для описания отказов технических средств

Предложены и исследованы нетрадиционные распределения для аппроксимации временной зависимости интенсивности отказов технических средств. Показано, в каких случаях целесообразно использовать степенное распределение, а в каких – распределение косинуса

***Ключевые слова**: интенсивность отказов, распределение косинуса, степенное распределение.*

Состояние вопроса

Известно, что зависимость интенсивности отказов $\lambda(t)$ технических средств (ТС) от времени эксплуатации t имеет в общем случае вогнутую U - образную форму [1]. Это обусловлено тем, что как показано на рисунке 1 первоначально на участке I от 0 до t_1 интенсивность отказов монотонно убывает (период приработки), затем на участке II от t_1 до t_2 - сохраняется примерно постоянной (период нормальной эксплуатации) и, наконец, на участке III от t_2 - монотонно возрастает (период старения и износа).

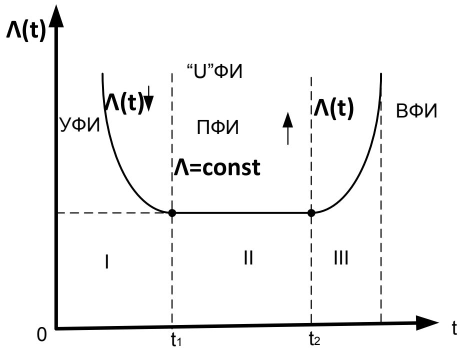

Рис. 1. Зависимость интенсивности отказов от времени эксплуатации

Все возможные виды зависимостей интенсивности отказов от наработки подразделяются на четыре класса. Каждая из них может быть аппроксимирована подбором соответствующих теоретических распределений следующих типов [1]:

УФИ – распределения с убывающей функций интенсивности, характеризующие период приработки (см. рис. 1). Для описания отказов в этот период, как правило, применяют распределение Вейбулла с параметром формы b меньше единицы и гамма-распределение с параметром формы m меньше единицы.

ПФИ – распределения с постоянной функцией интенсивности, характеризующие период нормальной эксплуатации (см. рис.1). В этот период внезапные отказы обычно аппроксимируют с помощью экспоненциального распределения.

ВФИ – распределения с возрастающей функцией интенсивности, характеризующие период износа и старения (см. рис. 1). В этот период для описания постепенных отказов чаще всего используют нормальное распределение с коэффициентом вариации V менее 0,3, распределения Вейбулла и гамма с параметрами формы больше единицы.

"U"ФИ – распределения с U - образной функцией интенсивности, характеризующие весь период эксплуатации (см. рис. 1).

Во-первых, в ряде работ [2, 3] для описания временной зависимости интенсивности отказов U - образной формы используются смеси перечисленных выше распределений. Полученные при этом выражения для определения показателей надежности являются сравнительно сложными, поскольку зависят от четырех и более параметров. Практическое использование смеси распределений наталкивается на трудности нахождения этих параметров по статистическим данным об отказах ТС. Поэтому поиск U - образных функций распределения интенсивности отказов технических средств с минимальным числом параметров является актуальной научной задачей.

Во-вторых, в настоящее время расчеты показателей надежности ТС транспортных систем проводятся, как правило, в предположении о постоянной интенсивности отказов составляющих их элементов. Это соответствует случаю, когда элементы подвержены только внезапным отказам из-за внешних воздействий. Постепенные отказы элементов, связанные с внутренними процессами износа и старения, при этом не учитываются. Последнее не соответствует реальной действительности. Например, в [4, 5] подробно описаны деградационные процессы, которые вызывают износ и старение элементов железнодорожных систем электроснабжения, автоматики, телемеханики и связи. Подобные процессы приводят к постепенным отказам элементов и описываются в теории надежности классом распределений, имеющим возрастающую функцию интенсивности отказов.

Путем сбора и обработки информации об отказах, восстанавливаемых в процессе эксплуатации элементов указанных систем, получены только оценки постоянных значений параметра потока отказов ω [4] или наработки на отказ как $T = 1/\omega$ [5]. Однако это не означает, что интенсивность отказов элементов стареющего типа является постоянной величиной.

Согласно определению параметр потока отказов есть отношение числа отказавших изделий за интервал времени $n(dt)$ к числу испытуемых изделий N за этот интервал dt при условии, что отказавшие изделия заменяются исправными (новыми или отремонтированными), то есть $\omega(t) = n(dt)/Ndt$. Здесь число испытуемых изделий остается постоянным. Из теории надежности известно, что параметр потока отказов при любом виде распределения стремится к стационарному значению равному $\omega = 1/T$. Это и проявляется при сборе статистических данных об отказах ТС в реальных условиях эксплуатации.

Аналогично, согласно определению интенсивность отказов определяется по формуле $\lambda(t) = n(dt)/N_{ср}dt$, где $N_{ср}$ - среднее число изделий, исправно проработавших в данный интервал времени dt. При этом $N_{ср}$ из-за отказов изделий с каждым интервалом уменьшается, а $\lambda(t)$ стареющих изделий - возрастает.

Как отмечается в [4] проведение специальных испытаний для определения законов распределения требует больших затрат времени и средств, а иногда просто невозможно. Поэтому аппроксимация распределения для описания постепенных отказов технических средств в условия неопределенности исходной информации является актуальной научной задачей.

Цель статьи - предложить и исследовать нетрадиционные распределения для описания отказов технических средств.

Степенное распределение

В принципе в качестве функции распределения, описывающей зависимость вероятности безотказной работы $P(t)$ от времени t, можно использовать любую кривую, площадь под которой равна средней наработке на отказ T. В качестве такого распределения предлагается использовать степенную функцию вида [6, 7]

$$P(t) = 1 - (t/a)^b; \quad 0 \le t \le a, \tag{1}$$

где a - параметр масштаба; b - параметр формы.

Параметр a определяется из условия $\int_o^a P(t)dt=T$ как

$$a = (b+1)\, b^{-1}\, T. \tag{2}$$

Плотность распределения $f(t)$ определяется из выражения

$$f(t) = [-P(t)]^{/} = b\, a^{-b}\, t^{\,b-1}\ , \tag{3}$$

а интенсивность отказов $\lambda(t)$ – из выражения

$$\lambda(t) = f(t)/P(t) = b\, t^{\,b-1}\, (a^b - t^b)^{\,-1}. \tag{4}$$

Подставив значение a из (2) в выражения (1), (3) и (4), и, обозначив $u = t/T$, получим

$$P(u)= 1-(bu(b+1)^{-1})^b; \tag{1a}$$
$$f(u)= b^{b+1}(b+1)^{-b}u^{b-1}; \tag{3a}$$
$$\lambda(u) = b^{b+1}u^{b-1}((b+1)^b- b^bu^b)^{-1}. \tag{4a}$$

Выражения (1 а), (3 а) и (4 а) являются функцией одного параметра b, что удобно для проведения исследований предлагаемого распределения.

Коэффициенты вариации V, асимметрии p и эксцесса β распределения определяются, согласно [8] из выражений:

$$V = \mu_2^{\,0,5}\mu_1^{\,-1}; \quad p = \mu_3\mu_2^{\,-1,5}; \quad \beta = \mu_4\mu_2^{\,-2}, \tag{5}$$

где μ_1 - первый начальный момент;

μ_2, μ_3, μ_4 – второй, третий и четвертый центральные моменты, соответственно.

Значения этих моментов вычисляются по формулам [8]:

$$\mu_1 =\int t\, f(t)\, dt; \quad \mu_r = \int (t-\mu_1)^r f(t)\, dt; \ \ r =2,3,4. \tag{6}$$

Подставим в (5) вычисленные по (6) значения моментов, получим:

$$V = (b^2+2b)^{-0.5}; \qquad (7)$$

$$p= (b+1)^3(b+2)^{1.5}(b+3)^{-1}b^{-0.5} - -3b^{0.5}(b+1)^2(b+2)^{0.5}+2(b^2+2b)^{0.5}; \qquad (8)$$

$$\beta=(b+1)^4(b+2)^2(b^2+4b)^{-1}-4(b+1)^3(b+2)^{2(}b+3)^{-1}+ +6b(b+1)^2(b+2) -3b^2(b+2)^2. \qquad (9)$$

При оцененном значении V из выражения (7) получим формулу для определения параметра b вида

$$b= (1+V^{-2})^{0.5}-1. \qquad (10)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

При $b=1$ из (1а) и (4а) получим равномерное распределение вида: $P(t)= 1 – 0,5u$; $\lambda(t)= (2 - u)^{-1}$. Здесь $0\le u\le 2$.

При $b \to \infty$ из (1а) после раскрытия неопределенности получим вырожденное распределение вида $P(t) = 1$. Здесь $0\le u\le 1$.

При $b>1$ из (4а) в случае $u = 0$ имеет $\lambda(0) = 0$, а в случае $u= b^{-1}(b+1)$ - $\lambda(a/T) \to \infty$, что соответствует распределению с возрастающей функцией интенсивности отказов (ВФИ - распределению).

При $b<1$ из (4а) в случае $u = 0$ имеем $\lambda(0) \to \infty$, а в случае $u = b^{-1}(b+1)$ - $\lambda(a/T) \to \infty$, что соответствует распределению U - образной формы. Координаты точки, в которой значение интенсивности отказов минимально, определяются из условий $d\lambda(u)/du = 0$:

$$u_m = (b+1)(1-b)^{1/b}b^{-1};$$
$$\lambda(u_m) = b^2((b+1)(1- b)^{1/b}((1-b)^{1-b}-1)))^{-1}.$$

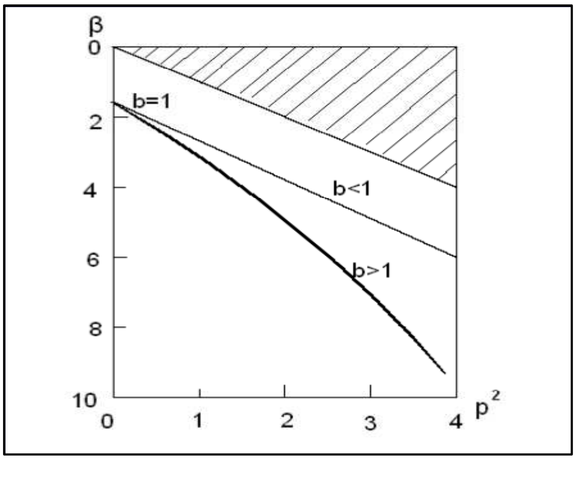

Рис. 2. Степенное распределение в области Пирсона

Коэффициенты асимметрии и эксцесса вычислены при различных значениях параметра b с использованием выражений (8) и (9). На рис. 2 в области $\{\beta, p^2\}$, предложенной Пирсоном [8], представлены соответствующие кривые для случая $b<1$ (U-образное распределение) и для случая $b>1$ (ВФИ - распределение). При $b<1$ распределение имеет правостороннюю асимметрию, причем с уменьшением параметра b асимметрия и эксцесс, характеризующий островершинность, возрастают. При $b>1$ распределение имеет левостороннюю асимметрию, причем с увеличением параметра b асимметрия и эксцесс возрастают. При $b = 1$ получено $\beta = 1,8$ и $p = 0$, что соответствует равномерному распределению (см. точка $b = 1$ на оси ординат рис. 2).

Для отдельных значений параметра b на рис. 3 представлены временные зависимости интенсивности отказов, а на рис. 4 - вероятности безотказной работы.

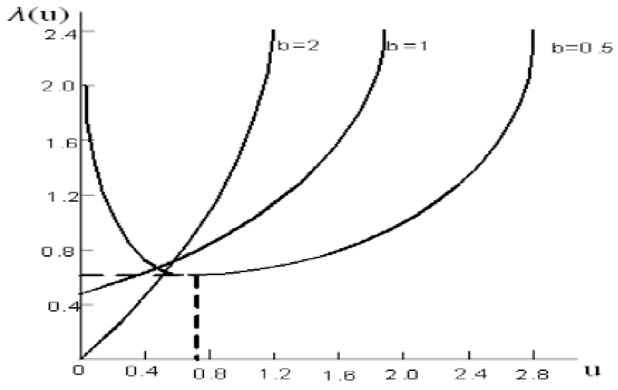

Рис. 3. Зависимости интенсивности отказов от времени эксплуатации при степенном распределении

Как видно из рис. 3 при $b = 2$ (что соответствует ВФИ - распределению) $\lambda(u)$ возрастает от 0 до ∞; при $b = 1$ (что соответствует равномерному распределению) $\lambda(u)$ возрастает от 0,5 до ∞; при b=0,5 (что соответствует распределению U - образной формы) $\lambda(u)$ изменяется от ∞ до ∞ с минимальным значением в точке с координатами: $u_m = 0.75$; $\lambda(u_m)$=0.67 (см. пунктир на рис. 3). Отметим, что с уменьшением параметра b кривые $\lambda(u)$ смешаются вниз и вправо, а отрезок кривой, характеризующий период нормальной эксплуатации, становится длиннее и положе.

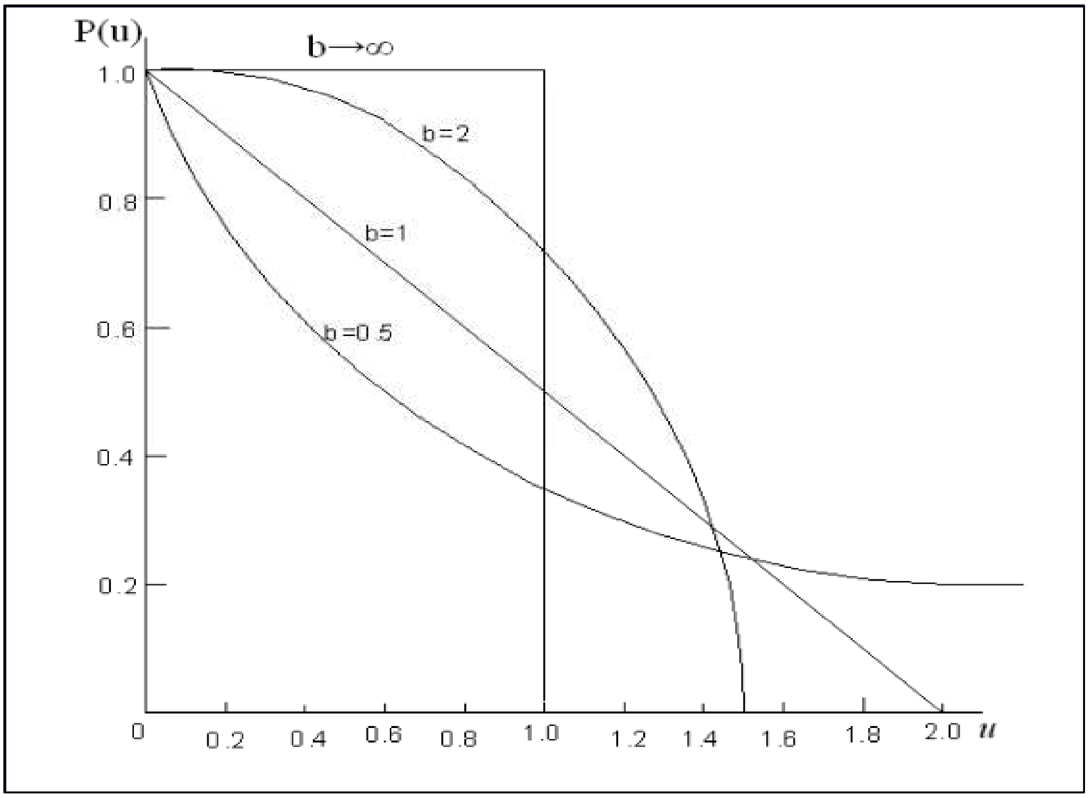

Рис. 4. Зависимости вероятности безотказной работы от времени эксплуатации при степенном распределении

Как видно из рис. 4 кривая *P(u)* при b = 2, когда функция интенсивности отказов возрастает, выпукла вверх, а при b = 0,5, когда функция интенсивности отказов имеет *U* - образную форму, выпукла вниз. С возрастанием параметра b ВФИ - распределение все более приближается к вырожденному распределению.

Оценка параметров α и b степенного распределения по совокупности статистических данных об отказах технических средств выполняется с использованием метода моментов следующим образом.

1. Вычисляются средняя наработка на отказ, среднеквадратическое отклонение σ и коэффициент вариации по формулам:

$$T = n^{-1} \sum t_i; \quad \sigma = ((n-1)^{-1} \sum (t_i - T)^2)^{0.5}; \quad V = \sigma/T, \qquad (11)$$

где n- количество отказов;

$t_i - i$ - я реализация наработки на отказ.

2. По полученному значению V, используя формулу (10), оценивается параметр формы b.

3. По полученным значениям T и b по формуле (2) определяется параметр масштаба α.

Проверка согласия опытного распределения с предложенным распределением степенного вида может быть проведена с помощью критерия ХИ- КВАДРАТ по методике, изложенной в [8].

Пример 1. В результате наблюдений над техническими средствами получено 100 значений наработки на отказ в годах, которые представлены вариационным рядом: 0,005; 0,006; 0,007; 0,009; 0,011; 0,018; 0,027; 0,035; 0,043; 0,051; 0,062; 0,073; 0,079; 0,082; 0,093; 0,106; 0,111; 0,135; 0,136;0,145; 0,161; 0,172; 0,191; 0,211; 0,228; 0,236; 0,251; 0,273; 0,291; 0,312; 0,342; 0,363; 0,381; 0,402; 0,415; 0,445; 0,446; 0,480; 0,506; 0,520; 0,561; 0,615; 0.631; 0,646; 0,670; 0,705; 0,738; 0,748; 0,778; 0,782; 0,826; 0,855; 0,925; 0,937; 0,959; 0,986; 0,987; 1,085; 1,127; 1,135; 1,161; 1,198; 1,225; 1,242; 1,283; 1,341; 1,375; 1,421; 1,435; 1,501; 1,522; 1,573; 1,601; 1.653; 1,703; 1,745; 1,764; 1,822; 1,849; 1,897; 1,964; 1,969; 2,031; 2,038; 2,105; 2,185; 2,285; 2,311; 2,354; 2,393; 2,451; 2,492; 2,541; 2,601; 2,646; 2,785; 3,101; 3,904; 4,007; 4,388.

Методом моментов необходимо найти оценки параметров формы b и масштаба α и проверить согласие распределения наработки на отказ, полученного в результате наблюдения, с предложенным распределением степенного вида по критерию согласия ХИ- КВАДРАТ при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}9$.

Проверка согласия производится следующим образом.

1. По формулам (11), (10) и (2) находим: T = 1.074 года;

σ = 0.985 года; V = 0.917; b = 0.480; α = 3.314 года.

2. Разделим полученные данные о наработках на отказ на k интервалов: $k = n/5 = 20$.

3. Используя выражение (1), определим границы интервалов t_i для $i = 1, 2,\ldots, k$ как

$t_1 = a(1/k)^{1/b}$; $t_2 = a(2/k)^{1/b}$;….; $t_k = a((k-1)/k)^{1/b}$.

Результаты вычислений представлены в табл. 1.

4. Математическое ожидание числа наблюдений в интервале для принятого теоретического распределения находим по формуле

$$E_i = n/k = 5;\; i = 1, 2, \ldots, k.$$

Таблица 1

Интервал	M_i	E_i	Интервал	M_i	E_i
0 – 0,006	2	5	0,782 – 0,953	5	5
0,007 – 0,027	5	5	0,954 – 1,142	6	5
0,028 – 0,063	4	5	1,143 – 1,350	6	5
0,064 – 0.115	5	5	1,351 – 1,575	6	5
0.116 – 0,184	6	5	1,576 – 1,819	5	5
0,185 – 0,269	5	5	1,820 – 2,081	7	5
0,270 – 0,371	5	5	2,082 – 2,361	5	5
0,372 – 0,490	6	5	2,362 – 2,660	6	5
0,491 – 0,627	4	5	2,661 – 2,978	1	5
0,628 – 0,781	7	5	2,979 и более	4	5

Фактическое число наблюдений M_i в i-м интервале находим непосредственно по исходным данным, представленным в табл. 1. Здесь же представлено сравнение значений M_i и E_i.

5. Вычисляем критерий согласия ХИ - КВАДРАТ по формуле

$$\chi^2 = \sum (M_i - E_i)^2/Ei = 42/5 = 8{,}4.$$

6. Определим число степеней свободы как $k - m - 1$, где m - число параметров теоретического распределения, оценки которого находились на этапе 1. При $m = 2$ число степеней свободы равно 17. По таблице IV [8, с.356-357] при γ = 0,9 находим χ^{*2}=24,8. Сравнивая вычисленное значение χ^2 с табличным χ^{*2}, делаем вывод, что гипотеза о согласии наработки на отказ технического средства с предлагаемым распределением степенного вида принимается. Тогда вероятность безотказной работы и интенсивность отказов на интервале $0 \le t \le 3{,}314$ года определяются согласно (1) и (4) по формулам:

$P(t) = 1- 0.56\, t^{\,0.48}$; $\lambda(t) = 0.48\ (1.78\, t^{\,0.52} - t)^{-1}$, 1/год.

Распределение косинуса

Когда удается оценить только значение наработки на отказ ТС, например, из выражения $T = 1/\omega$, то можно предложить следующий метод приближенного описания функции $\omega(t)$. Поскольку параметр потока отказов при t=T приближается к своему стационарному значению, равному $1/T$, предлагается аппроксимировать зависимость $\omega(t)$ кусочно-линейной функцией вида [9]:

при $t < T \quad \omega(t) = t/T^2$; при $t \ge T \quad \omega(t)= 1/T$.

Остальные показатели определяются с использованием преобразования Лапласа. Плотность распределения $f(t)$ найдем из уравнения, связывающего ее в операторной форме с параметром потока отказов $f(s) = \omega(s)/(1+\omega (s))$ как $f(t)=(1/T)\ sin(t/T)$. Тогда вероятность безотказной работы и интенсивность отказов будут равны:

$$P(t) = cos\ (t/T);\quad \lambda(t) = f(t)/P(t)=(1/T)\ tg\ (t/T).$$

Учитывая, что $T = 1/\omega$ формулы для определения $P(t)$ и $\lambda(t)$ можно представить в виде:

$$P(t) = cos\ (\omega t);\quad \lambda(t) = \omega\ tg\ (\omega t). \qquad (12)$$

Аргумент t/T или ωt в формулах для определения показателей надежности измеряется в радианах. Назовем полученное распределение распределением косинуса, область определения которого лежит в интервале $0<\omega t<\pi/2$. Поскольку интенсивность отказов этого распределения согласно выражению (12) является монотонно возрастающей функцией времени, а значение коэффициента вариации $V=(\pi- 3)^{0,5} \approx 0{,}375$ [9], то есть менее единицы, оно относится к классу ВФИ - распределений и может использоваться для описания постепенных отказов ТС. В статье [9] определены коэффициенты асимметрии и эксцесса и отмечено, что распределение косинуса может быть представлено в области Пирсона точкой с координатами p^2 =0,18 и β = 2,23. Показано, что согласно [1] функция косинуса является также распределением с возрастающей средней интенсивностью отказов, распределением типа «новое лучше использованного» и распределением типа «новое в среднем лучше использованного».

Из представленных на рис. 5 сравнительных графиков зависимости вероятности безотказной работы от времени эксплуатации t/T для распределений нормального, Вейбулла и гамма видно относительно хорошее совпадение указанных распределений с распределением, аппроксимированным функцией косинуса. Поскольку показатели надежности при распределении косинуса выражены элементарными функциями, его использование по сравнению с классическими теоретическими распределениями имеет ряд преимуществ.

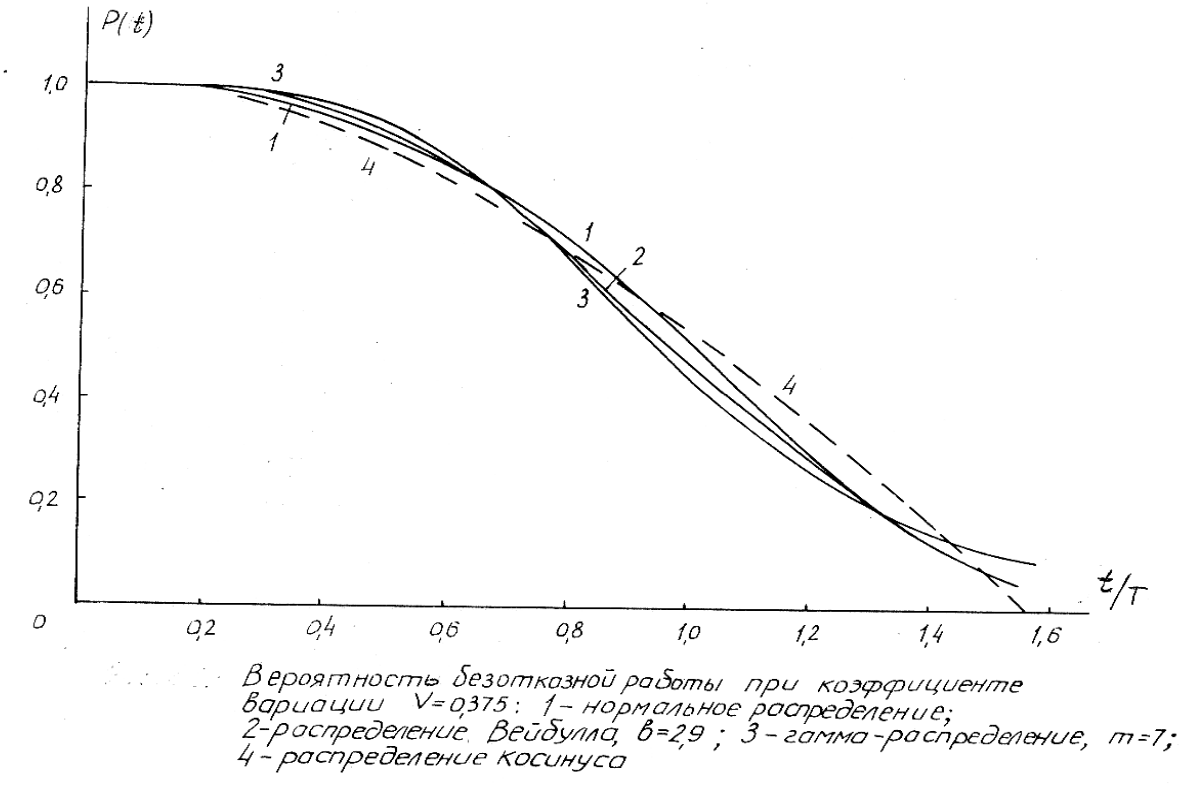

Рис. 5. Зависимости вероятности безотказной работы от времени эксплуатации при разных распределениях

Пример 2. Определим выражения для определения $P(t)$ и $\lambda(t)$ электродвигателя МСП-0,15 на напряжение 160В с параметром потока отказов $\omega = 0{,}0173$ 1/г [4]. Поскольку коэффициент вариации не известен, а ТС подвергается износу и старению, применим распределение косинуса. Тогда, используя выражения (12), получим: $P(t) = cos\ (0{,}0173\ t)$; $\lambda(t) = 0{,}0173\ tg\ (0{,}0173\ t)$. В табл. 2 приведены значения интенсивности отказов в зависимости от времени эксплуатации.

Таблица 2

ωt	0,2	0,4	0,6	$\pi/4$	1,0	1,2	1,4	1,5
$\lambda(t)$ 1/г	0,0034	0,0073	0,0118	0,0173	0,0269	0,044	0,10	0,25

Как видно из данных, приведенных в табл. 2, $\lambda(t)$ монотонно возрастает и при $\omega t = \pi/4 = 0{,}785$ интенсивность отказов численно равна параметру потока отказов, а при $\omega t = 1$, то есть при времени эксплуатации, равному наработке на отказ, интенсивность отказов уже составляет 0,0269, продолжая в дальнейшем неограниченно возрастать.

В заключение в табл. 3 представлены классические теоретические и предложенные нетрадиционные распределения, а также показана возможность их применения для описания отказов технических средств.

Таблица 3

Распределение	УФИ	ПФИ	ВФИ	“U”ФИ	Применение для описания отказов:
Экспоненциальное		+			только внезапных;
Вейбулла	+	+	+		приработочных при b<1; внезапных при b=1; постепенных при b>1;
Гамма	+	+	+		приработочных при m<1; внезапных при m=1; постепенных при m>1;
Нормальное			+		только постепенных при V<0.3;
Косинуса			+		только постепенных;
Степенное			+	+	постепенных при b>1; одновременно приработочных, внезапных и постепенных при b<1.

Выводы

1. Предлагаемое степенное распределение позволяет описывать отказы технических средств в течение всего периода эксплуатации и при различном виде функции интенсивности отказов (U - образной, ВФИ, равномерной плотности).

2. При практическом использовании степенного распределения оценка значений его параметров по сравнению с определением параметров используемых в настоящее время смесей распределений производится достаточно просто методом моментов по совокупности статических данных об отказах технических средств.

3. В случае, когда определена только наработка на отказ, и известно, что технические средства подвержены износу и старению, для описания их постепенных отказов целесообразно использовать предлагаемое распределение косинуса.

Литература

1. Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. – М.: Наука, 1984.-328 с.
2. Диллон Б., Сингх Ч. Инженерные методы обеспечения надежности систем. – М.: Мир, 1984.-318 с.
3. Гродзенский С.Я. Об универсальных распределениях моментов наступления отказов элементов систем управления // Методы менеджмента качества. - 2001. - № 12.- С. 34-37.
4. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Шаманов В.И. Надёжность систем железнодорожной автоматики, телемеханики и связи. – М.: Маршрут, 2003. – 263 с.
5. Ефимов А.В., Галкин А.Г. Надёжность и диагностика систем электроснабжения.- М.: УМК МПС России, 2000.- 512 с.
6. Володарский В.А. Об одном распределении наработки до отказа изделий // Надежность и контроль качества.- 1992. - № 9. - С. 6-11.
7. Volodarsky V.A. Modelling of failure of power supply system elements // Electrical Technology. – 1993. – No 3. – pp. 33-40.
8. Хан Г., Шапиро С. Статистические методы в инженерных задачах. - М.: Мир, 1969. – 395 с.
9. Володарский В.А. Аппроксимация распределения вероятности безотказной работы функцией косинуса // Надежность и контроль качества.- 1988. - № 8. - С. 18-22.

VOLODARSKY V. A. ON ALTERNATIVE DISTRIBUTIONS FOR DESCRIBING FAILURES OF TECHNICAL EQUIPMENT. Alternative distributions to approximate time dependence of technical means failure rate have been proposed and investigated. We showed cases where it is advisable to use either power-series distribution or cosine distribution.

Key words: failure rate, cosine distribution, power-series distribution.

Рецензент д.т.н., профессор кафедры «Системы обеспечения движения поездов» Христинич Р.М. (Красноярский институт железнодорожного транспорта Иркутского государственного университета путей сообщения)

Поступила 01.09.2014г