

УДК 519.766.4

## МОДЕЛЮВАННЯ І КОРОТКОСТРОКОВЕ ПРОГНОЗУВАННЯ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Бідюк П.І., Кожухівська О.А.

*Інституту прикладного системного аналізу  
Національного технічного університету України "КПІ"*

*pbidyuke\_00@ukr.net, olga-kozuhovska@mail.ru*

Виконано дослідження вибраних моделей умовної дисперсії гетероскедастичних процесів з метою вибору кращих для короткострокового прогнозування. Запропоновано удосконалену структуру моделі стохастичної волатильності і розроблено алгоритм оцінювання параметрів на основі методу Монте-Карло для марковських ланцюгів. Побудовано нові моделі для фінансових індексів трьох країн, як для гетероскедастичних процесів. Моделі мають задовільну ступінь адекватності, про що свідчать обчислені критерії якості оцінок прогнозів.

*Ключові слова: короткострокового прогнозування, метод Монте-Карло*

Selected models of conditional variance for heteroscedastic processes have been studied with the purpose of short term forecasting. An improved structure of stochastic volatility model is proposed and algorithm for its parameters estimation was developed on the basis of Markov chain Monte Carlo approach. Several new models were constructed for financial indices of three countries as heteroscedastic processes. The models exhibit satisfactory adequacy according to the set of statistical quality criteria computed for forecasts estimates.

*Keywords: short term forecasting, Monte Carlo approach*

Выполнено исследование некоторых моделей условной дисперсии гетероскедастических процессов с целью выбора лучших для краткосрочного прогнозирования. Предложена усовершенствованная структура модели стохастической волатильности и разработан алгоритм оценивания параметров на основе метода Монте-Карло для марковских цепей. Построены новые модели для финансовых индексов трех стран, как для гетероскедастических процессов. Модели имеют приемлемую адекватность, что подтверждается критериями качества оценок прогнозов.

*Ключевые слова: краткосрочное прогнозирование, метод Монте-Карло*

### 1. Вступ

В економіці, фінансах, деяких технічних і технологічних системах поширені нестационарні процеси із змінною у часі дисперсією, які отримали назву гетероскедастичних. Так, у роботі [1] запропоновано систему керування процесом виробництва паперу, у якій регулюється дисперсія товщини паперу. Функціонал якості, який використовується для синтезу керуючих впливів для паперової машини, включає дисперсію як один із основних параметрів. Дисперсія і волатильність (стандартне відхилення) використовуються на фінансовому ринку у системах підтримки прийняття рішень стосовно виконання торгових операцій. У всіх автоматизованих системах торгівлі біржовими активами використовується волатильність при формуванні правил

прийняття рішень, оскільки прибуток від інвестування в активи обернено пропорційний дисперсії процесу ціноутворення [2].

При виконанні операцій на фінансовому ринку необхідно будувати моделі математичні моделі для прогнозування напрямку і рівня процесів ціноутворення та їх волатильності. Оцінки прогнозів волатильності (мінливості процесів) необхідні для формування правил прийняття рішень стосовно купівлі або продажу цінних паперів або відсторонення від виконання будь-яких операцій [3 – 5]. Крім того, оцінки умовної дисперсії та їх прогнози знаходять широке застосування у діагностичних системах технічного і медичного призначення, а також при прийнятті економічних рішень на мікро- та макрорівнях.

Відомі різні підходи до оцінювання структури моделі волатильності, зокрема це відомий класичний підхід на основі аналізу кореляційних функцій досліджуваних процесів [6]. Результати цього аналізу використовують для оцінювання структури моделей авторегресії з умовною гетероскедастичністю (АРУГ) і узагальненої АРУГ (УАРУГ). Подальшим ускладненням моделей цього типу є експоненціальна модель УАРУГ (Е-УАРУГ), яка забезпечує, як правило, прийнятну якість оцінок прогнозів волатильності. Фактичну взаємодію процесів на фінансовому ринку відображає досить поширена модель стохастичної волатильності [7].

Важливою задачею моделювання і прогнозування волатильності є коректне оцінювання параметрів моделі. Хоча моделі згаданих вище типів відносяться до нелінійних стосовно змінних, звичайний метод найменших квадратів застосовувати у даному випадку не завжди коректно, оскільки розподіли фінансових процесів ціноутворення здебільшого не відповідають нормальному, а залишки можуть бути корельованими. Тому для оцінювання моделей волатильності необхідно застосовувати метод максимальної правдоподібності із застосуванням розподілу відповідного типу або метод Монте-Карло для марковських ланцюгів (МКМЛ).

Роботу присвячено побудові модифікованих моделей стохастичної волатильності і застосуванню різних методів оцінювання параметрів вибраних структур, у тому числі МКМЛ; для розв'язання цієї задачі розроблено спеціальне програмне забезпечення.

## 2. Постановка задачі

Мета статті: виконати аналіз існуючих структур моделей гетероскедастичних процесів; запропонувати модифіковану структуру авторегресійної моделі стохастичної волатильності, яка надасть можливість враховувати ретроспективні значення умовної дисперсії; розробити алгоритм оцінювання параметрів моделі стохастичної волатильності і виконати обчислювальні експерименти з метою оцінювання параметрів моделей і короткострокового прогнозування умовної дисперсії.

### 3. Моделі гетероскедастичних процесів

Розглянемо деякі популярні моделі умовної дисперсії, які застосовуються на практиці для дослідження фінансових процесів. Простою моделлю умовної дисперсії є авторегресійна умовно гетероскедастична модель порядку  $p$  (АРУГ( $p$ )):

$$\varepsilon^2(k) = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \varepsilon^2(k-i) + v(k). \quad (1)$$

де  $\varepsilon^2(k)$  – квадрати залишків моделі авторегресії низького порядку для основної змінної;  $v(k)$  – похибка моделі в дискретний момент часу  $k$  (неперервний час  $t$  зв'язаний з дискретним  $k$  через період дискретизації вимірів:  $t = k T_s$ ). Таким чином, для побудови моделі (1) необхідно спочатку побудувати авторегресійну модель для основної змінної, яка дасть можливість виокремити випадкову складову  $\varepsilon(k)$ , що формує дисперсію процесу. Очевидним недоліком такої моделі є те, що вона не враховує вплив різнознакових збурень на дисперсію. Крім того, на коефіцієнти цієї моделі накладається обмеження  $\beta_i \geq 0, i=1, \dots, p$ , для забезпечення додатності прогнозів дисперсії.

Кращі характеристики має узагальнена авторегресійна умовно гетероскедастична модель (УАРУГ( $p, q$ )):

$$h(k) = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \varepsilon^2(k-i) + \sum_{i=1}^q \alpha_i h(k-i) + \varepsilon_1(k), \quad (2)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$  (для того щоб уникнути появи від'ємних значень умовних дисперсій). Величина  $h(k)$  – це ряд значень умовної дисперсії, розрахований, наприклад, за методом ковзного вікна, розмір якого залежить від потужності основного ряду даних. Модель (2) зручна у застосуванні завдяки простоті структури; на основі цієї моделі можна обчислити прийнятні оцінки короткострокових прогнозів умовної дисперсії.

Подальшим ускладненням структури моделей типу УАРУГ є експоненціальна модель УАРУГ, що описує умовну дисперсію як асиметричну функцію випадкового процесу  $\{\varepsilon(k)\}$ :

$$\log(h(k)) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \frac{|\varepsilon(k-i)|}{h(k-i)} + \sum_{i=1}^p \gamma_i \frac{\varepsilon(k-i)}{h(k-i)} + \sum_{i=1}^q \beta_j \log(h(k-i)). \quad (3)$$

Модель (3), як правило, надає можливість отримати найкращі оцінки короткострокових прогнозів умовної дисперсії порівняно з моделями (1) – (2). Це можна пояснити тим, що вона враховує вплив на  $h(k)$  додатних і від'ємних значень випадкового процесу  $\{\varepsilon(k)\}$ .

Існує також клас моделей умовної дисперсії, відомих під загальною моделлю стохастичної волатильності (МСВ), які враховують вплив випадкових збурень у мультиплікативній формі. Найбільш поширеною моделлю стохастичної волатильності є лог-нормальна модель стохастичної волатильності [5]:

$$\begin{aligned} y(k) &= e^{h(k)/2} u(k), \quad k \geq 1; \\ h(k) &= \mu + \phi(h(k) - \mu) + \sigma_v v(k), \quad k \geq 1; \\ h(k) &\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\mu$ ,  $\phi$ ,  $\sigma_v^2$  – параметри моделі;  $y(k)$  – значення змінної фінансового процесу (наприклад, доходності активу) в момент часу  $k$  ( $k = 1, \dots, n$ );  $h(k)$  – логарифм квадрату волатильності в момент часу  $k$ ;  $u(k)$ ,  $v(k)$  – незалежні гаусівські процеси білого шуму з дисперсіями 1 та  $\sigma_v^2$ , відповідно.

Логарифм квадрату волатильності  $h(k)$  можна інтерпретувати як випадковий та нечіткий потік нової інформації, який є досить складним у моделюванні [5]. Оскільки  $v(k)$  – гаусівський процес, то таку модель називають лог-нормальною моделлю стохастичної волатильності.

Розглянемо докладніше наведену вище модель (4). Вона складається з двох рівнянь: перше описує динаміку зміни доходності фінансового ринку, а друге рівняння описує поведінку логарифму волатильності. Величина доходності коливається навколо деякого середнього значення, яке на валютному ринку прийнято вважати, частіше всього, рівним нулю. Тому доходність може приймати додатні і від'ємні значення, що цілком залежить від випадкової величини  $u(k)$ . Логарифм квадрату волатильності виконує роль коефіцієнта масштабування, тобто він відображає амплітуду коливань доходності.

Лог-волатильність  $h(k)$  відповідає стаціонарному процесу авторегресії  $AR(1)$ , що дозволяє, за умови наявності відомих параметрів, прогнозувати динаміку зміни волатильності. Значення логарифмів квадратів волатильності  $h(k)$  представляють собою ланцюг Маркова оскільки наступне значення оцінки залежить тільки від поточного і не залежить від минулих у часі значень. Для покращення результатів прогнозування пропонується враховувати значення волатильності у минулі проміжки часу і використовувати часткову автокореляційну функцію для оцінювання порядку авторегресійної моделі по  $h(k)$ . Запропонована модель має такий вигляд:

$$y(k) = e^{\frac{h(k)}{2}} u(k), \quad k \geq 1,$$

$$h(k+1) = \mu + \phi(h(k) - \mu) + \psi(h(k-1) - \mu) + \sigma_v v(k), \quad k \geq 1, \quad (5)$$

$$h(k) \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}\right),$$

де  $\mu, \phi, \psi, \sigma_v^2$  – параметри моделі;  $y_t$  – значення доходності в момент часу  $k$  ( $k = 1, \dots, n$ );  $h(k)$  – логарифм квадрату волатильності в момент часу  $k$ ;  $u(k), v(k)$  – два незалежних гаусівських процеси білого шуму з дисперсіями 1 та  $\sigma_v^2$  відповідно. Введений параметр  $\psi$ , як і параметр  $\phi$ , відображає міру сталості прихованого процесу волатильності  $h(k)$ . Очевидно, що модель (5) потребує відповідної модифікації алгоритму оцінювання параметрів за методом Монте-Карло для марковських ланцюгів.

#### 4. Оцінювання параметрів моделей гетероскедастичних процесів

Оцінювання параметрів будь-якої моделі є нетривіальною задачею; її складність зростає зі складністю моделі. Нижче дано короткий огляд різних методів, що застосовуються для оцінювання параметрів моделей (1) – (5). На вершині ієрархії перебуває оцінювання за методом максимальної правдоподібності; оцінювання ґрунтується на мінімізації логарифма функції правдоподібності:

$$-\ln l(\theta) = -\ln p(\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^n | \theta),$$

де  $\theta$  – вектор невідомих параметрів;  $p(\{\xi^i\} | \theta)$  – щільність імовірності спостережень процесу  $\xi^i$  при фіксованому параметрі  $\theta$ . Якщо процес марковський, то формула спрощується до вигляду:

$$-\ln l(\theta) = -\ln p(\xi^0 | \theta) - \sum_{i=0}^{n-1} p(\xi^{i+1} | \xi^i, \theta),$$

де  $p(\xi^{i+1} | \xi^i, \theta)$  – щільність перехідної ймовірності за умови відомого стану  $\xi^i$  і параметра  $\theta$ . Однак аналітичний вираз для цієї ймовірності можна отримати досить рідко, що привело до розробки широкого спектру методів, що не вимагають аналітичного виразу для перехідної щільності.

Відомо, що щільність перехідної ймовірності задовольняє рівнянню Фоккера-Планка [8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left[ -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^1(x_1, \dots, x_N) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^2(x_1, \dots, x_N) \right] f,$$

$$D_i^1(x, t) = \mu_i(x, t),$$

$$D_{ij}^2(x, t) = \frac{1}{2} \sum_k \sigma_{ik}(x, t) \sigma_{jk}(x, t),$$

з відповідними початковими і граничними умовами. У найпростіших випадках воно вирішується аналітично, однак частіше необхідно знаходити його чисельний розв'язок.

Дискретна оцінка максимальної правдоподібності. Головна ідея цього методу – наближення перехідної щільності дискретизованим виразом. Найпростішим прикладом є розкладання Ейлера-Маруяма[9]:

$$X_{i+1} = X_k + \mu(X_i; \theta)\Delta + \sigma(X_i; \theta)\varepsilon_i,$$

де  $\varepsilon_i \sim N(0, \Delta)$  – незалежні нормально розподілені випадкові величини. Незважаючи на те, що оцінки, отримані за цим методом, виявляються зміщеними в силу спрощення процедури оцінювання, вони використовуються на практиці.

У роботі [10] запропоновано метод аналітичного наближення перехідної щільності шляхом її розкладу в ряд по многочленах Ерміта в околі стандартної нормальної щільності. Більше того, показано, як аналітично перегрупувати доданки по степенях  $\Delta t$ . Автор стверджує, що розкладання до  $(\Delta t)^2$  достатньо у більшості випадків.

Застосування вибірових оцінок максимальної правдоподібності запропоновано в [11]. Суть методу полягає у наближенні перехідної щільності її вибіровим аналогом. Для цього чисельно моделюється велика кількість траєкторій системи, після чого перехідна щільність відновлюється, наприклад, шляхом ядерних оцінок. Часто цей метод комбінують із вибіркою за значущістю (importance sampling).

В останні десятиліття набув популярності метод Монте-Карло для марковських ланцюгів (МКМЛ). Основна ідея цього методу полягає у рівномірному розбитті інтервалу спостереження даних  $[t_i, t_{i+1}]$  на множину менших відрізків шляхом введення неспостережуваних (згенерованих) величин у проміжні моменти часу [12, 13]. Далі алгоритм оцінювання функціонує таким чином.

1. Генеруються значення  $X_u^{i+1}$  з розподілу  $P(X_u | X_o, \theta^i)$  ( $X_o$  – спостережувані значення процесу).

2. Генеруються значення параметрів  $\theta^{i+1}$  з розподілу  $P(\theta | X_o, X_u^i)$ .

При досить слабких умовах регулярності згенерований таким чином марковський ланцюг має граничний стаціонарний розподіл  $P(X_u, \theta | X_o)$ , який можна легко перетворити в  $P(\theta | X_o)$ . Основний недолік методів Монте-Карло – досить велика ресурсоемність. Проте методи цієї групи широко використовуються завдяки універсальності, хорошій масштабованості, здатності урахувувати неспостережувані змінні, незначним похибкам оцінювання, а також можливості застосування паралельних обчислень для прискорення процесу оцінювання.

В роботі [14] запропоновано застосовувати для оцінювання моделей гетероскедастичних процесів узагальнений метод моментів. В основі методу –

задавання деякої множини умов  $\psi_k(X; \theta)$ , таких, що  $E[\psi_k(X_i; \theta^*)] = 0$ , де  $\theta^*$  – дійсне значення вектора параметрів. Нехай  $\psi_{ki}(X; \theta) = \psi_k(X_i | \theta)$ ; тоді оцінку вектора  $\theta$  можна знайти шляхом мінімізації функціонала  $J(\theta) = E[\psi(X; \theta)]^T \Sigma E[\psi(X; \theta)]$ , де  $\Sigma$  – додатньо визначена матриця вагових коефіцієнтів. В [15] запропоновано різні способи побудови цієї матриці. Способи одержання належних функціоналів описані в [16]. Перевагами цього методу є простота реалізації, висока швидкодія і узагальненість. Однак він не враховує всю доступну інформацію, а також чутливий до похибок дискретизації, що використовується для отримання функцій  $\psi_k$ .

Відомий метод непрямого оцінювання, згідно з яким параметри оцінюються не через щільність перехідної ймовірності, а опосередковано за допомогою допоміжної моделі, яка легко оцінюється за методом максимальної правдоподібності і забезпечує раціональне наближення до дійсної функції правдоподібності [17]. При цьому враховується, що допоміжна модель зазначена невірно, і тому оцінки  $\hat{\theta}$  пов'язані з дійсними значеннями  $\theta^*$  за допомогою функції  $\hat{\theta} = \varphi(\theta^*)$ , яка визначається шляхом чисельного моделювання. Продуктивність методу і якість одержуваних оцінок сильно залежать від допоміжної моделі. Якщо модель обрана коректно, то навіть при невеликих розмірах вибірки можна отримати високоякісні результати оцінювання.

В роботі [18] запропоновано оцінювати  $\theta$  шляхом порівняння маргінальної щільності з її непараметричною оцінкою за спостережуваними даними. Недоліками цього методу є те, що реальні дані часто досить сильно корельовані, тоді як для оцінювання за методом ядер необхідно щоб спостереження були незалежними й однаково розподіленими.

### 5. Алгоритм оцінювання МСВ за методом МКМЛ

Розглянемо задачу оцінювання параметрів одновимірної моделі стохастичної волатильності (МСВ) загального вигляду:

$$y(k) = \beta_0 + \beta_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k) + \beta_p x_p(k) + u(k), \tag{6}$$

$$u(k) = \sqrt{h(k)} \varepsilon(k),$$

$$\ln[h(k)] = \alpha_0 + \alpha_1 \ln[h(k-1)] + v(k), \tag{7}$$

$$\{\varepsilon(k)\} \sim N(0, 1); \quad \{v(k)\} \sim N(0, \sigma_v^2); \tag{8}$$

$$E[\varepsilon(k)v(k-l)] = 0, \quad \forall k, l,$$

де  $\{x_i(k), i = 1, \dots, p\}$  – пояснючі змінні. Логарифмування змінної  $h(k)$  застосовується для того, щоб забезпечити додатність всіх її значень, оскільки вона має смисл умовної дисперсії. Пояснючі змінні  $x_i(k)$  можуть включати

затримані в часі значення залежної змінної, тобто  $x_i(k) = y(k-i)$ . Для забезпечення стаціонарності процесу  $\ln[h(k)]$  необхідно щоб  $|\alpha_1| < 1$ . Очевидно, що рівняння (6) може мати, при необхідності, вищий порядок, тобто це може бути авторегресія AP(p).

Позначимо вектор параметрів моделі (6) через  $\beta = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p]^T$ , а вектор параметрів моделі (6) через  $\theta = [\alpha_0, \alpha_1, \sigma_v^2]^T$ . Нехай  $\mathbf{y} = [y(1), y(2), \dots, y(N)]^T$  – вектор спостережень залежної змінної;  $\mathbf{X}$  – матриця спостережень пояснюючих змінних;  $\mathbf{h} = [h(1), h(2), \dots, h(N)]^T$  – вектор невимірюваних значень волатильності процесу  $\{y(k)\}$ , тобто вектор умовних дисперсій цього процесу, який ми будемо розглядати як допоміжну змінну математичної моделі (6) – (8). Оцінювання такої моделі за методом максимальної правдоподібності пов'язане із значними труднощами, оскільки функція правдоподібності в цій задачі представляє собою  $N$ – вимірний розподіл вектора  $\mathbf{h}$  наступного вигляду:

$$f(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \beta, \theta) = \int f(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \beta, \mathbf{h}) f(\mathbf{h} | \theta) d\mathbf{h}.$$

Однак у байєсівській постановці вектор волатильностей  $\mathbf{h}$  включає в себе так звані розширені параметри, а процес в цілому характеризується розподілами умовних ймовірностей  $f(\mathbf{y} | \mathbf{h}, \beta)$  і  $f(\mathbf{h} | \theta)$  з апіорним розподілом параметрів моделі  $p(\beta, \theta)$ . Припустимо, що апіорний розподіл параметрів можна представити у вигляді добутку:  $p(\beta, \theta) = p(\beta) p(\theta)$ , тобто, апіорні розподіли для параметрів основної регресії і параметрів для рівняння, що описує волатильність, є незалежними. Тепер за методом Гіббса необхідно згенерувати випадкові вибірки для оцінювання параметрів рівнянь (6) і (7) з таких умовних апостеріорних розподілів:

$$f(\beta | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \theta), \quad f(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \beta, \theta), \quad f(\theta | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \beta, \mathbf{h})$$

Розглянемо одновимірний випадок (одна залежна змінна). Поділимо обидві частини рівняння (6) на  $\sqrt{h(k)}$  і отримаємо таку модель:

$$y_0(k) = \mathbf{x}_0^T(k) \beta + \varepsilon(k), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

де  $y_0(k) = y(k) / \sqrt{h(k)}$ ;  $\mathbf{x}_0(k) = \mathbf{x}(k) / \sqrt{h(k)}$ ;  $\mathbf{x}(k) = [1, x_1(k), \dots, x_p(k)]^T$ . Припустимо, що вектор  $\beta$  має багатовимірний нормальний апіорний розподіл:  $\beta \sim \mathbf{N}(\beta_0, \mathbf{B}_0)$ , де  $\mathbf{B}$  – відповідна коваріаційна матриця. В такому випадку апостеріорний розподіл вектора  $\beta$  також буде нормальним із середнім  $\beta^*$  та коваріаційною матрицею  $\mathbf{B}^*$ . Ці дві величини можна обчислити за виразами:

$$\mathbf{B}^* = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_0(k) \mathbf{x}_0^T(k) + \mathbf{B}_0^{-1}, \quad \beta^* = \mathbf{B}^* \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_0(k) y_0(k) + \mathbf{B}_0^{-1} \beta_0 \right).$$

Обчислення починаються із  $(p+1)$ -го значення для того щоб врахувати  $y(k-p)$  попередніх значень. Елементи вектора волатильностей обчислюються послідовно один за одним за допомогою умовного апостеріорного розподілу



$f[h(k) | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}(-k), \beta, \theta]$ , який формується з нормального розподілу для  $u(k)$  та логнормального розподілу для волатильності:

$$\begin{aligned} & f[h(k) | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}(-k), \beta, \theta] \propto \\ & \propto f[u(k) | h(k), y(k), \mathbf{x}(k), \beta] f[h(k) | h(k-1), \theta] f[h(k+1) | h(k), \theta] \propto \\ & \propto \frac{1}{\sqrt{h(k)}} \exp\left[-\frac{[y(k) - \mathbf{x}^T(k)\beta]^2}{2h(k)}\right] h^{-1}(k) \exp\left[-\frac{[\ln h(k) - \mu(k)]^2}{2\sigma^2}\right] \propto \quad (2.2.10) \\ & \propto \frac{1}{\sqrt{[h(k)]^3}} \exp\left[-\frac{[y(k) - \mathbf{x}^T(k)\beta]^2}{2h(k)} - \frac{[\ln h(k) - \mu(k)]^2}{2\sigma^2}\right], \end{aligned}$$

де  $\mu(k) = \frac{\alpha_0(1 - \alpha_1) + \alpha_1[\ln h(k+1)] + \ln h(k-1)}{1 + \alpha^2}$ ;  $\sigma^2 = \frac{\sigma_v^2}{1 + \alpha_1^2}$ . Для отримання

цих характеристик використані такі властивості процесу, що моделюється:

- а)  $\{u(k) | h(k)\} \sim N(0, h(k))$ ;
- б)  $\{\ln h(k) | \ln h(k-1)\} \sim N(\alpha_0 + \alpha_1 \ln h(k-1), \sigma_v^2)$ ;
- в)  $\{\ln h(k+1) | \ln h(k)\} \sim N(\alpha_0 + \alpha_1 \ln h(k), \sigma_v^2)$ ;
- г)  $d \ln h(k) = h^{-1}(k) d h(k)$ ;
- д)  $(x-a)^2 A + (x-b)^2 C = (x-c)^2 (A+C) + (a-b)^2 AC / (A+C)$ ,

де  $d$  – оператор диференціювання;  $c = (Aa - Cb) / (A + C)$  при умові, що  $A + C \neq 0$ . В даному випадку елементи цієї рівності мають наступні значення:  $A = 1$ ,  $a = \alpha_0 + \ln h(k-1)$ ,  $C = \alpha_1^2$  і  $b = [\ln h(k+1) - \alpha_0] / \alpha_1$ . Член  $(a-b)^2 AC / (A+C)$  не містить випадкової змінної  $h(k)$  і не впливає на умовний апостеріорний розподіл. Для генерування випадкових значень застосуємо алгоритм Гіббса на решітці, при цьому діапазон зміни  $h(k)$  вибирається кратним безумовній вибірковій дисперсії процесу  $y(k)$ .

Для того щоб згенерувати випадкову вибірку вектора параметрів  $\theta$ , розділимо параметри наступним чином:  $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1]^T$  і  $\sigma_v^2$ . Відповідно до цього розділимо також функцію апіорного розподілу:  $p(\theta) = p(\alpha) p(\sigma_v^2)$ . Тепер умовні апостеріорні розподіли можна описати наступним чином:

–  $f(\alpha | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \beta, \sigma_v^2) = f(\alpha | \mathbf{h}, \sigma_v^2)$ : при наявності  $\mathbf{h}$  можна оцінити параметри моделі АР(1) для умовної дисперсії у відповідності до процедури, яка розроблена для авторегресійних моделей. За апіорний розподіл для  $\alpha$  виберемо багатовимірний нормальний розподіл із середнім  $\alpha_0$  та коваріаційною матрицею  $\mathbf{C}_0$ , що приводить до багатовимірного нормального розподілу  $f(\alpha | \mathbf{h}, \sigma_v^2)$  із середнім  $\alpha^*$  і коваріаційною матрицею  $\mathbf{C}^*$ :

$$(\mathbf{C}^*)^{-1} = \frac{\sum_{k=2}^N \mathbf{z}(k) \mathbf{z}^T(k)}{\sigma_v^2} + \mathbf{C}_0^{-1}, \quad \alpha^* = \mathbf{C}^* \left[ \frac{\sum_{k=2}^N \mathbf{z}(k) \ln h(k)}{\sigma_v^2} + \mathbf{C}_0^{-1} \alpha_0 \right],$$

де  $\mathbf{z}(k) = [1, \ln h(k-1)]^T$ .

–  $f(\sigma_v^2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \beta, \alpha) = f(\sigma_v^2 | \mathbf{h}, \alpha)$ : При відомих значеннях  $\mathbf{h}$  і  $\alpha$  можна обчислити  $v(k) = \ln h(k) - \alpha_0 - \alpha_1 \ln h(k-1)$ ,  $k = 2, 3, \dots, N$ . Якщо апріорним розподілом для  $\sigma_v^2 \in \left( \frac{m\lambda}{\sigma_v^2} \right) \sim \chi_m^2$ , то умовним апостеріорним розподілом для

$\sigma_v^2$  буде інвертований розподіл хі-квадрат з  $m+n-1$  ступенями свободи, тобто:

$$\frac{m\lambda + \sum_{k=2}^N v^2(k)}{\sigma_v^2} \sim \chi_{m+n-1}^2.$$

Необхідно зазначити, що вираз (10) справедливий для  $1 < k < N$ , де  $N$  – довжина вибірки. Крайні значення  $h(1)$  і  $h(N)$  необхідно модифікувати, наприклад,  $h(1) = const$ , а обчислення  $h(k)$  починається з  $k = 2$ . При  $k = N$  можна скористатись виразом:

$$\ln[h(N)] \sim [\alpha_0 + \alpha_1 \ln[h(N-1), \sigma_v^2]].$$

Можна також скористатись прогнозом  $h(N+1)$ , а також зворотним прогнозом  $h(0)$ , а далі вже застосовувати вираз (10). Оскільки нас цікавить  $h(N)$ , то значення  $h(N+1)$  обчислюється як двокроковий прогноз на основі наявного значення  $h(N-1)$ . За допомогою моделі (6), можна записати:

$$\hat{h}_{N-1}(N+1) = \alpha_0 + \alpha_1 [\alpha_0 + \alpha_1 \ln h(N-1)].$$

Зворотний прогноз з метою визначення  $h(0)$  ґрунтується на моделі:

$$\ln h(k) - b = \alpha_1 [\ln h(k-1) - b] + v(k),$$

де  $b = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$  при  $|\alpha_1| < 1$ . Модель зворотного часового ряду має вигляд:

$$\ln h(k) - b = \alpha_1 [\ln h(k+1) - b] + v^*(k),$$

де  $\{v^*(k)\} \sim N(0, \sigma_v^2)$ . Таким чином, прогноз на два кроки назад визначається за формулою:

$$h_2(-2) - b = \alpha_1^2 [\ln h(2) - b].$$

Вираз (10) можна також отримати за допомогою результатів, які стосуються обробки пропусків даних при побудові моделі АР(1). Припустимо, що пропущеним значенням є  $\ln h(k)$ . Це пропущене значення є сусіднім для  $\ln h(k-1)$  і  $\ln h(k+1)$ ,  $1 < k < N$ . Скористаємось моделлю процесу:

$$\ln h(k) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln h(k-1) + u(k).$$

Введемо позначення:  $z(k) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln h(k-1)$ ,  $x(k) = 1$ ,  $\varphi(k) = -u(k)$ . Тепер можна записати:

$$z(k) = x(k) \ln h(k) + \varphi(k). \quad (11)$$

З рівняння  $\ln h(k+1) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln h(k) + u(k+1)$  можна визначити, що  $z(k+1) = \ln h(k+1) - \alpha_0$ ,  $x(k+1) = \alpha_1$  і  $\varphi(k+1) = u(k+1)$ , а тому

$$z(k+1) = x(k+1) \ln h(k) + u(k+1). \quad (12)$$

Таким чином, рівняння (11) і (12) утворюють просту лінійну регресію з двома спостереженнями і невідомим параметром  $\ln h(k)$ . Зазначимо, що  $u(k)$  і  $u(k+1)$  мають однаковий розподіл, оскільки  $-u(k)$  також має нормальний розподіл  $N(0, \sigma_v^2)$ . Оцінку  $\ln h(k)$  позначимо  $\hat{lh}(k)$ ; користуючись методом найменших квадратів, її можна знайти за виразом:

$$\hat{lh}(k) = \frac{x(k)z(k) - x(k+1)z(k+1)}{x^2(k) + x^2(k+1)} = \frac{\alpha_0(1 - \alpha_1) + \alpha_1[\ln h(k+1) + \ln h(k-1)]}{1 + \alpha_1^2},$$

що представляє собою умовне середнє для  $\ln h(k)$ , яке визначається рівнянням (10). Крім того, ця оцінка є нормально розподіленою із середнім  $\ln h(k)$  та дисперсією  $\frac{\sigma_v^2}{1 + \alpha_1^2}$ .

Вираз (10) – це добуток розподілів  $\{u(k)\} \sim N(0, h(k))$  і

$\{\hat{lh}(k)\} \sim N\left(\ln h(k), \frac{\sigma_v^2}{1 + \alpha_1^2}\right)$  із застосуванням перетворення

$d \ln h(k) = h^{-1}(k) d h(k)$ . Наведений метод обчислення оцінки для  $\ln h(k)$  можна узагальнити на модель довільного порядку  $AR(p)$ . Початкове значення для  $\ln h(k)$  можна отримати в результаті оцінювання моделі (6) за часовим рядом.

## 6. Моделювання і прогнозування фінансових процесів

Порівняння моделей було проведено за допомогою програми, написаної в системі Matlab. Воно виконано на даних трьох фінансових індексів – *Vovespa* (Бразилія), *Merval* (Аргентина), *Hang Seng* (Гонг-Конг). Результати тестів Голдфельда-Квандта і Уайта показали наявність гетероскедастичності у вибраних процесах. Період оцінювання включає спостереження з 2001 по 2009 рік.

Оцінювання параметрів моделей виконувалось за МНК, ММП та МКМЛ. В таблицях 1–3 наведено результати оцінювання моделей для фінансових показників. Оцінки, отримані за МНК, показали найгірші результати. Найкращі оцінки параметрів отримані за методом максимальної правдоподібності. У подальшому будемо використовувати саме ММП.

Таблиця 1.

Оцінювання параметрів моделі УАРУГ для індексу *Bovespa*

	$\mu$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta$	AIC	R <sup>2</sup>
ММП	0,0020	0,0010	0,1420	0,8188	-5,195	0,846
МНК	0,0025	0,0007	0,1503	0,8001	-4,879	0,698
МКМЛ	0,0022	0,0011	0,1519	0,8224	-4,912	0,843

Таблиця 2.

Оцінювання параметрів моделі УАРУГ для індексу *Merval*

	$\mu$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta$	AIC	R <sup>2</sup>
ММП	0,0009	0,0000	0,0743	0,888	-5,371	0,864
МНК	0,0009	0,0000	0,0766	0,7143	-5,132	0,710
МКМЛ	0,0009	0,0000	0,0763	0,8100	-5,237	0,811

Таблиця 3.

Оцінювання параметрів моделі УАРУГ для індексу *Hang Seng*

	$\mu$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta$	AIC	R <sup>2</sup>
ММП	0,0007	0,0000	0,0603	0,9308	-5,972	0,837
МНК	0,0006	0,0000	0,0431	0,8710	-5,742	0,713
МКМЛ	0,0007	0,0000	0,0497	0,8911	-5,891	0,829

Для порівняння розглянуто моделі УАРУГ і УАРУГ-НТ з трьома різними розподілами – нормальним,  $t$ -розподілом Стюдента, скошеним  $t$ -розподілом Хансена (НТ), та модель ЕУАРУГ. Для оцінювання параметрів використано ММП. Функції максимальної правдоподібності отримано на основі функцій щільності розподілу відповідно до конкретних моделей. Для порівняння моделей використано інформаційні критерії АІС, SC та значення функції правдоподібності. В таблиці 4 представлено результати оцінювання моделей для показника *Bovespa*. Для всіх показників функція правдоподібності приймає найбільше значення при використанні УАРУГ-НТ. Також хороші результати показали моделі УАРУГ- $t$  та УАРУГ-НТ. Оцінки параметрів  $\beta$  значущі в усіх

моделях і для всіх показників, що свідчить про наявність ефекту кластеризації волатильності. Параметр  $\gamma$  значущий майже у всіх моделях класу УАРУГ для фондових показників, що свідчить про наявність ефекту важелю. В моделях УАРУГ-НТ параметр куртозиса  $\eta$  розподілу Хансена значущий майже для всіх показників, що свідчить про наявність тяжких хвостів.

Таблиця 4.

Оцінювання параметрів моделей УАРУГ для індексу *Bovespa*

	$\mu$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\beta$	$\nu$	$\eta$	AIC	$R^2$
УАРУГ	0,0020	0,0010	0,1420	-	0,8188	-	-	-5,195	0,846
УАРУГ - <i>t</i>	0,0023	0,0012	0,1299	-	0,8487	5,4888	-	-5,254	0,874
УАРУГ - <i>HT</i>	0,0017	0,0009	0,1337	-	0,8310	-	5,7076	-5,255	0,884
УАРУГ- <i>R</i>	0,0017	0,0009	0,0828	0,1044	0,8057	-	-	-5,203	0,850
УАРУГ- <i>Rt</i>	0,0022	0,0011	0,0972	0,0440	0,8435	5,6141	-	-5,256	0,885
УАРУГ- <i>R- HT</i>	0,0016	0,0009	0,0912	0,0470	0,8505	-	5,9237	-5,261	0,885
ЕУАРУГ	0,0018	-0,003	0,0811	-0,012	0,9110	-	-	-5,211	0,845

Також розглянуто моделювання фондових індексів за моделлю стохастичної волатильності. Для порівняння вибрано метод послідовного аналізу і метод Монте-Карло Марковських ланцюгів з різними апіорними розподілами. Для оцінювання параметрів моделі за методом МКМЛ виконано 5000 ітерацій алгоритму дискретизації Гіббса, при цьому перші 500 ітерацій не враховано з огляду на перехідний процес, характерний для даної процедури оцінювання. Для того щоб застосувати дискретизацію Гіббса в МКМЛ, використано такі апіорні розподіли:

$$SV - N: \quad \mu \sim N(0; 6); \alpha_0 \sim N(0,4; 0,02); \alpha_1 \sim N(0,6; 0,03); \sigma_v^2 \sim N(0,3; 0,01),$$

та

$$SV - BG: \quad \mu \sim N(0; 10); \alpha_0 \sim N(0,5; 0,01); \alpha_1 \sim Beta(2; 5),$$

$$\sigma_v^2 \sim InvGamma(2; 0,01).$$

Таблиця 5.

Оцінювання параметрів МСВ для індексу *Bovespa*

	$\mu$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\sigma_v^2$	AIC	$R^2$
МСВ-МПА	0,000721	0,000561	0,1423	0,35432	-5,301	0,938
МСВ -N	0,000722	0,000571	0,1723	0,37261	-5,303	0,939
МСВ -GB	0,000721	0,000572	0,1672	0,45233	-5,293	0,912

Таблиця 6.

## Оцінювання параметрів МСВ для індексу Merval

	$\mu$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\sigma_v^2$	AIC	R <sup>2</sup>
МСВ -МПА	0,00000	0,00425	0,2654	0,41234	-5,701	0,923
МСВ -N	0,00001	0,00443	0,2534	0,43541	-5,701	0,924
МСВ -GB	0,00001	0,00444	0,2564	0,43212	-5,683	0,900

Таблиця 7.

## Оцінювання параметрів МСВ для індексу Hang-Seng

	$\mu$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\sigma_v^2$	AIC	R <sup>2</sup>
МСВ -МПА	0,000	0,000132	0,19456	0,36454	-6,041	0,934
МСВ -N	0,000	0,000156	0,22134	0,31231	-6,039	0,913
МСВ -GB	0,000	0,000146	0,21345	0,31245	-6,039	0,915

Виконаний аналіз свідчить про переваги моделі стохастичної волатильності над моделями класу УАРУГ. МСВ є краще теоретично обґрунтованою та простішою за структурою ніж моделі УАРУГ і для всіх розглянутих фінансових показників за інформаційними критеріями вона показала кращі результати. Недоліком МСВ вважається складність реалізації методів оцінки параметрів.

Для порівняння якості прогнозів обчислено однокроковий прогноз для фінансового індексу Bovespa. Обчисливши середню абсолютну похибку у процентах, робиться висновок про переваги прогнозів методом стохастичної волатильності. У таблиці 8 наведено значення середньої абсолютної похибки у процентах (САПП) для вибраних моделей та оцінок прогнозів умовної дисперсії на три кроки вперед.

Таблиця 8.

## Оцінки прогнозів і значення САПП для різних моделей

	$\sigma_{T+1}^2 / \sigma_{T+1}$	$\sigma_{T+2}^2 / \sigma_{T+2}$	$\sigma_{T+3}^2 / \sigma_{T+3}$	САПП, %
УАРУГ	0,0066451	0,0066213	0,006513	8,32
УАРУГ -t	0,0066312	0,0066275	0,0066265	7,87
УАРУГ -HT	0,0066412	0,0066372	0,0066354	7,88
УАРУГ-R	0,0066374	0,0066365	0,0066321	8,24
УАРУГ-Rt	0,0066354	0,0066341	0,0066298	8,13

Продовження таблиці 8

УАРУГ-RT	0,0066398	0,0066376	0,0066342	8,08
ЕУАРУГ	0,0254	0,0241	0,0233	7,25
МСВ	0,0255	0,0251	0,0246	7,16

Очевидно, що всі використані моделі дають можливість отримати високоякісні оцінки прогнозів умовної дисперсії, але найкращий результат отримано за допомогою МСВ; експоненційна УАРУГ знаходиться на другому місці.

## 7. Висновки

Виконано дослідження вибраних моделей гетероскедастичних процесів. Проаналізовано дві групи моделей – моделей умовної гетероскедастичності та моделі стохастичної волатильності, а також розглянуто методи їх оцінювання. Запропоновано модифікацію моделі стохастичної волатильності, яка враховує минулі значення умовної дисперсії. Розроблено процедуру оцінювання моделі стохастичної волатильності за методом Монте-Карло для марковських ланцюгів на основі умовних розподілів.

Розроблено програму для моделювання гетероскедастичних процесів у системі Matlab, яка реалізує методи оцінювання параметрів моделей гетероскедастичних процесів методами максимальної правдоподібності, найменших квадратів та МКМЛ. Порівняльний аналіз результатів показав переваги моделей УАРУГ і УАРУГ-R з  $t$ -розподілом Стьюдента і Хансена. Найкращим методом оцінювання параметрів з точки зору статистичних критеріїв виявився метод максимальної правдоподібності. Найкращі результати за статистичними критеріями якості показали моделі стохастичної волатильності, які є більш обґрунтованими, але мають складність при оцінюванні параметрів. Для цієї моделі розглянуто два методи оцінювання – метод послідовного аналізу та метод МКМЛ.

Також розроблено нові моделі для фінансових індексів трьох країн, як для гетероскедастичних процесів. Моделі мають задовільну ступінь адекватності, про що свідчать обчислені критерії якості. Оцінювання однокрокових прогнозів на навчальній вибірці дало можливість визначити якість оцінок прогнозів, отриманих в результаті застосування різних методів оцінювання параметрів моделей.

У подальших дослідженнях доцільно створити удосконалені структури моделей гетероскедастичних процесів з метою підвищення якості прогнозів, а також розробити систему підтримки прийняття рішень для автоматизованої побудови і вибору кращої моделі на основі множини статистичних критеріїв якості оцінок прогнозів.

## Література

1. Astrom K.J. Computer control of a paper machine // IBM Journal of Research and Development, 1967, Vol. 11, pp. 389-405.
2. Уотшем Т.Д., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. – М.: Финансы, 1999. – 527 с.
3. Фишер Р. Трейдинг по Фибоначчи: практические приемы и методы. – М.: ЕВРО, 2002. – 192 с.
4. Малюгин В.И. Рынок ценных бумаг. – М.: «Дело», 2003. – 322 с.
5. Рынок ценных бумаг / Под ред. В.А. Голованова, А.И. Басова. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 448 с.
6. Бідюк П.І., Меняйленко О.С., Половцев О.В. Методи прогнозування. – Луганськ: Альма-Матер, 2008. – 607 с.
7. Taylor S. J. Financial returns modeled by the product of two stochastic processes – a study of the daily sugar prices: 1961 – 1975 // In Anderson, O. D. (ed.), Time Series Analysis: Theory and Practice, 1. – Amsterdam: North-Holland, – 1982. – P. 203–226.
8. Harvey A., Shepard N. Estimation of an asymmetric stochastic volatility model for asset returns // Journal of Business and Economic Statistics. – 1996. – Vol. 14, No.4. – Pp. 429-434.
9. Singleton K. Estimation of an asset pricing models using the empirical characteristic function / Singleton K. //Journal of Econometrics. – 2001. – Vol.102, № 1.– Pp. 111-141.
10. Broze L., Scaillet O., Zako J. Quasi-indirect inference for diffusion processes / Broze L., Scaillet O., Zako J. // Econometric Theory.– 1998. – Vol. 14, № 02. – Pp. 161-186.
11. Affet-Sahalia Y. Transition Densities for Interest Rate and Other Nonlinear Diffusions // The Journal of Finance. – 1999. – Vol. 54, No. 4.– Pp. 1361–1395.
12. Gilks W.R., Richardson S., Spiegelhalter D.J. Markov Chain Monte Carlo in Practice. – New York: Chapman & Hall/CRC, 1996. – 486 p.
13. Бідюк П.І., Коновалюк М.М. Прогнозування волатильності валютного ринку за нелінійними моделями // Вісник Національного університету «Львівська політехніка», № 719. –2011р., с. 154 – 163.
14. Hansen L. Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators / Hansen L. // Econometrica. – 1982. – Vol. 50, № 4. – Pp. 1029–1054.
15. Hansen L., Heaton J., Yaron A. Finite-Sample Properties of Some Alternative GMM Estimators / Hansen L., Heaton J., Yaron A. // Journal of Business & Economic Statistics. – 1996. – Vol. 14, №. 3. – Pp. 262–280.
16. Hansen L., Scheinkman J. Back to the Future: Generating Moment Implications for Continuous-Time Markov Processes / Hansen L., Scheinkman J. // Econometrica. –1995. – Vol. 63, № 4. Pp. 767–804.
17. Gouriéroux C., Monfort A., Renault E. Indirect Inference / Gouriéroux C., Monfort A., Renault E. // Journal of Applied Econometrics. – 1993. – Vol. 8. – Pp. S85–S118.
18. Pritsker M. Nonparametric density estimation and tests of continuous time interest rate models / Pritsker M. // Review of Financial Studies. – 1998.– Vol.11, №3.– Pp. 449–487.