

УДК 519.6, УДК 663.18

## МАКРОМОДЕЛІ ПРОЦЕСУ АНАЕРОБНОГО МІКРОБІОЛОГІЧНОГО БРОДІННЯ ТВЕРДИХ ПОБУТОВИХ ОРГАНІЧНИХ ВІДХОДІВ НА СТАДІЯХ АЦИДОГЕНЕЗУ ТА МЕТАНОГЕНЕЗУ

Гураль Ірина Володимирівна, Дивак Микола Петрович,  
Порплиця Наталія Петрівна

*Тернопільський національний економічний університет, ФКІТ  
м. Тернопіль, вул. Чехова 8*

*irishural@gmail.com, mdy@tneu.edu.ua, ocheretnyuk.n@gmail.com*

У статті розглянуто макромоделі процесу анаеробного мікробіологічного бродіння твердих побутових органічних відходів на основних стадіях ацидогенезу та метаногенезу. За основу моделей обрано дискретні динамічні рівняння, налаштування яких здійснено із використанням інтервальних даних, отриманих за результатами вимірювання процесів у біогазових установках. Для ідентифікації цих моделей використано методи, що ґрунтуються на поведінкових моделях бджолоїної колонії, а також проведено дослідження стійкості інтервальних дискретних динамічних моделей до вибору початкових умов.

*Ключові слова: структурна ідентифікація, алгоритм бджолоїної колонії, інтервальна дискретна динамічна модель, анаеробне мікробіологічне бродіння, біогазова установка.*

The article deals with macromodels of anaerobic microbiological fermentation process of municipal solid organic waste in the acidogenesis and methanogenesis main stages. Models based on discrete dynamic equations are selected. Their adjustment was made using interval data obtained from the measurement at biogas plants processes. Methods based on the bee colony behavioral models are used to identify these models, as well as studies of interval discrete dynamic models stability prior to the selection of initial conditions.

*Keywords: structure identification, bee colony algorithm, interval discrete dynamic model, anaerobic microbiological fermentation, biogas plant.*

В статье рассмотрены макромодели процесса анаэробного микробиологического брожения твердых бытовых органических отходов на основных стадиях ацидогенеза и метаногенеза. За основу моделей выбрано дискретные динамические уравнения, настройки которых осуществлено с использованием интервальных данных, полученных по результатам измерения процессов в биогазовых установках. Для идентификации этих моделей использованы методы, основанные на поведенческих моделях пчелиной колонии, а также проведено исследование устойчивости интервальных дискретных динамических моделей к выбору исходных условий.

*Ключевые слова: структурная идентификация, алгоритм пчелиной колонии, интервальная дискретная динамическая модель, анаэробное микробиологическое брожения, биогазовая установка.*

### Вступ

На сьогоднішній день проблема утилізації твердих побутових органічних відходів (ТПОВ) для України є найбільш актуальною, оскільки вона є європейським лідером за кількістю відходів на душу населення [1]. Разом з тим для їх утилізації потрібно використовувати біогазові установки (БГУ), які

дають змогу як розв'язати екологічної проблеми, так і отримати високоефективні органічні добрива та енергію у вигляді біогазу [2].

Як відомо, організація процесу анаеробного мікробіологічного бродіння в БГУ є складною при складній структурі сировини. Тому, важливим питанням є можливість керувати процесами та необхідність надійно утримувати сталими основні параметри процесу для забезпечення високої ефективності таких установок.

Математичні моделі на всіх стадіях процесу анаеробного мікробіологічного бродіння ТПОВ, які дають можливість прогнозувати процес бродіння при деяких умовах, є невід'ємною складовою частиною системи контролю за процесом. Незважаючи на те, що існують вже розроблені та визнані моделі процесу, задача моделювання анаеробного мікробіологічного бродіння в біогазових установках залишається актуальною і на сьогоднішній день [3]. Зокрема, більшість математичних макромоделей анаеробного мікробіологічного бродіння в біогазових установках описує автономну систему [4-6]. Разом з тим, реальний процес є неавтономним, оскільки вимагає урахування основних факторів впливу, а саме: температури та кислотності середовища.

Тому для управління і контролю процесами анаеробного мікробіологічного бродіння потрібно побудувати макромоделі на різних стадіях. Для їх побудови необхідно розв'язати задачі структурної і параметричної ідентифікації [7].

Отже, актуальним завданням є побудова макромоделей процесу анаеробного мікробіологічного бродіння для окремих етапів. Тому, у даній праці розглянуто задачі макромоделювання для етапів ацидогенезу та метаногенезу.

## 1. Постановка задачі

Розглянемо математичне формування задачі структурної ідентифікації математичної моделі для автономної системи у вигляді дискретної динамічної моделі:

$$v_k = \vec{f}^T(v_0, \dots, v_{k-1}) \cdot \vec{g}, \quad k = p, \dots, K, \quad (1)$$

де  $\vec{f}^T(\bullet)$  - вектор невідомих базисних функцій (відомого класу), що визначає структуру дискретної динамічної моделі; символ  $(\bullet)$  означає набір аргументів базисних функцій в рівнянні (1);  $v_k$  - модельована характеристика на часовій дискреті  $k = p, \dots, K$ ;  $\vec{g} = (g_1, \dots, g_i)^T$  - вектор невідомих параметрів дискретної динамічної моделі.

Дискретні динамічні моделі для кожного із етапів процесу анаеробного мікробіологічного бродіння отримуватимемо у вигляді (1) на основі аналізу експериментальних даних, які представлено в інтервальному вигляді у зв'язку з

похибками вимірювання. Вектор оцінок параметрів  $\hat{g}$  та вектор базисних функцій  $\vec{f}^T(\bullet)$  у виразі (1) отримуватимемо у такий спосіб, щоб забезпечити виконання таких умов [8]:

$$[\hat{v}_k^-; \hat{v}_k^+] \subseteq [v_k^-; v_k^+], \forall k = 1 \dots N, \quad (2)$$

де  $[v_k^-; v_k^+]$  - інтервал можливих значень модельованої характеристики на часовій дискреті  $k = p, \dots, K$ ,  $[\hat{v}_k^-; \hat{v}_k^+]$  - інтервальні оцінки прогнозованої характеристики, які отримуватимемо на основі інтервальної дискретної динамічної моделі (ІДДМ) у такому загальному вигляді:

$$[\hat{v}_k] = [\hat{v}_k^-; \hat{v}_k^+] = \vec{f}^T([\hat{v}_0^-; \hat{v}_0^+], \dots, [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+]) \cdot \hat{g}. \quad (3)$$

Врахувавши умови (2) та вираз для дискретної динамічної моделі автономної системи у загальному випадку (1), запишемо інтервальні оцінки прогнозованої характеристики  $[\hat{v}_k]$  у вигляді інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь (ІСНАР) [9]:

$$\begin{cases} [\hat{v}_0^-; \hat{v}_0^+] \subseteq [v_0^-; v_0^+], [\hat{v}_1^-; \hat{v}_1^+] \subseteq [v_1^-; v_1^+], \dots, [\hat{v}_p^-; \hat{v}_p^+] \subseteq [v_p^-; v_p^+], \\ [\hat{v}_k] = [\hat{v}_k^-; \hat{v}_k^+] = \vec{f}^T([\hat{v}_0^-; \hat{v}_0^+], \dots, [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+]) \cdot \hat{g}, \\ v_k^- \leq \vec{f}^T([\hat{v}_0^-; \hat{v}_0^+], \dots, [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+]) \cdot \hat{g}(\bar{u}) \leq v_k^+, k = p, \dots, K. \end{cases} \quad (4)$$

де  $[\hat{v}_0^-; \hat{v}_0^+]$ ,  $[\hat{v}_p^-; \hat{v}_p^+]$  – інтервальні оцінки модельованої характеристики на часовій дискреті  $k=0$  та  $k=p$  відповідно.

Задача ідентифікації параметрів ІДДМ для макромоделей на різних стадіях процесу анаеробного мікробіологічного бродіння, зокрема на стадіях ацидогенезу, ацетогенезу та метаногенезу є задачею розв’язування ІСНАР (4). Проте в загальному випадку базисні функції  $\vec{f}^T(\bullet)$  є невідомими, що призводить до задачі структурної ідентифікації ІДДМ [10]. Алгоритм розв’язування цієї задачі полягає у послідовному формуванні множини структур ІДДМ та отримання «нових» ІДДМ, шляхом модифікації попередньо отриманих. Цей процес відбувається доти, поки не буде сформовано таку структуру ІДДМ, яка забезпечує побудову сумісної ІСНАР у вигляді (4) [11].

Таким чином, отриманий розв’язок сумісної ІСНАР (4) дає можливість побудови ІДДМ у вигляді (3).

Для розв’язання задачі структурної ідентифікації ІДДМ, у праці [12] запропоновано метод, який побудовано на основі поведінкових моделей бджолоїної колонії.

Поведінкові моделі бджолоїної колонії відтворюють природну поведінку колонії медоносних бджіл у процесі пошуку їжі [13, 14]. Вищезгаданий метод структурної ідентифікації ІДДМ побудовано на аналогіях із поняттями та

процедурами цієї поведінкової моделі і зорієнтовано на знаходження хоча б одного розв'язку ІСНАР (4).

Нехай  $\lambda_s$  поточна структура інтервальної дискретної динамічної моделі [15]:

$$\lambda_s = \{f_1^s(\bullet) \cdot g_1^s; f_2^s(\bullet) \cdot g_2^s; \dots; f_{m_s}^s(\bullet) \cdot g_{m_s}^s\} \subset \Lambda, \quad (5)$$

де  $\vec{f}^s = \{f_1^s(\bullet); f_2^s(\bullet); \dots; f_{m_s}^s(\bullet)\} \subset F$  набір структурних елементів, що задає поточну  $s$ -ту структуру ІДДМ;  $m_s \in [I_{\min}; I_{\max}]$  – кількість елементів у поточній структурі  $\lambda_s$ ;  $F$  – множина усіх структурних елементів,  $F = \{f_1(\vec{v}_{k-1}); \dots; f_l(\vec{v}_{k-1}); \dots; f_L(\vec{v}_{k-1})\}$ , де  $|F| = L$  (потужність множини  $F$ );  $\vec{g}^s = \{g_1^s; g_2^s; \dots, g_{m_s}^s\}$  – вектор невідомих значень параметрів.

Тоді задача структурної ідентифікації полягає у пошуку структури  $\lambda_0$  ІДДМ у вигляді (5) у такий спосіб щоб забезпечити виконання умов (2), тобто забезпечувати належність інтервальних оцінок прогнозованого значення модельованої характеристики до інтервалів допустимих значень на множині усіх дискрет [16].

Опираючись на результати праці [17], задачу структурної ідентифікації ІДДМ формально подамо у вигляді задачі знаходження мінімуму функції мети  $\delta(\lambda_s)$ :

$$\delta(\lambda_s) \xrightarrow{\vec{g}^s, \vec{f}^s(\bullet)} \min, m_s \in [I_{\min}; I_{\max}], \vec{f}^s(\bullet) \in F. \quad (6)$$

Значення функції мети  $\delta(\lambda_s)$  для конкретної структури ІДДМ кількісно визначає наближеність поточної структури до задовільної в сенсі умов (2) [18]. У випадку, якщо значення функції мети обчислене для конкретної структури ІДДМ дорівнює нулю, то структура ІДДМ дає можливість побудувати адекватну модель для конкретної стадії процесу анаеробного мікробіологічного бродіння.

Отже, якість поточної структури ІДДМ оцінюватимемо за значенням функції мети  $\delta(\lambda_s)$ , яке кількісно визначає наближеність поточної структури до задовільної в сенсі забезпечення умов (3). Значення функції мети  $\delta(\lambda_s)$  обчислюватимемо за допомогою виразів, отриманих у праці [9], вигляд яких для фіксованої структури такий:

$$\delta(\lambda_s) = \max_{k=1, \dots, K} \{ |mid(\vec{f}^{Ts}([\hat{v}_0], \dots, [\hat{v}_{k-1}]) \cdot \vec{g}^s), -mid([v_k])| \}, \quad (7)$$

якщо  $[\hat{v}_k] \cap [v_k] = \emptyset, \exists k = 1, \dots, K$ ;

$$\delta(\lambda_s) = \max_{k=1, \dots, K} \{ |mid(\vec{f}^{Ts}([\hat{v}_0], \dots, [\hat{v}_{k-1}]) \cdot \vec{g}^s) - wid((\vec{f}^{Ts}([\hat{v}_0], \dots, [\hat{v}_{k-1}]) \cdot \vec{g}^s) \cap [v_k])| \}, \quad (8)$$

якщо  $[\hat{v}_k] \cap [v_k] = \emptyset, \forall k = 1, \dots, K;$

де  $mid(\bullet), wid(\bullet)$ - операції визначення центру та ширини інтервалів, відповідно.

Вираз (7) описує «наближеність» поточної структури до задовільної на початкових ітераціях, тим часом як вираз (8) у випадку  $\delta(\lambda_s)=0$  забезпечує виконання умови (3).

Із виразів (7) та (8) бачимо, що для обчисленого значення функції мети  $\delta(\lambda_s)$  для фіксованої структури  $\lambda_s$  ІДДМ за будь-яких умов справедливою буде нерівність  $\delta(\lambda_s) \geq 0$ . Таким чином, можна стверджувати, що функція мети  $\delta(\lambda_s)$  має глобальний екстремум лише у тих точках, для яких виконується наступна рівність:  $\delta(\lambda_s) = 0$ .

Чим менше значення  $\delta(\lambda_s)$ , тим «краща» поточна структура ІДДМ. Якщо  $\delta(\lambda_s) = 0$ , то поточна структура ІДДМ дає можливість побудувати адекватну модель, для якої інтервальні оцінки прогнозованої характеристики належать до інтервалів можливих значень модельованої характеристики.

## 2. Особливості отримання експериментальних даних

Розглянемо процес виробництва біогазу на двох етапах (ацидогенезу та метаногенезу) анаеробного мікробіологічного бродіння. Основним вихідним продуктом на етапі ацидогенезу є ацетат, з якого за участю кислотоутворюючих бактерій відбувається подальше розкладання з утворенням органічних кислот і їх солей, а також спиртів та альдегідів [19]. Ці кислоти окислюються і утворюється оцтова кислота, яка взаємодіючи з метаноутворюючими бактеріями на етапі метаногенезу перетворює органічні речовини в метану й воду [20].

У прикладі, наведеному у праці [21], розглянуто процеси анаеробного бродіння ТПОВ. Усі експериментальні дані отримано авторами за умови використання 5-літрового реактора з періодичним завантаженням із початковим об'ємом субстрату  $3 \text{ дм}^3$ .

Посівний матеріал для варильного котла сформувавши з 500 мл суміші анаеробного мулу (75%) та гною великої рогатої худоби (25%). В реактор, разом з посівним матеріалом, також було додано відходи продуктів харчування, подрібнена мукулатура, 150 мл дистильованої води,  $\text{NaHCO}_3$ , масою 3 г і  $\text{NaOH}$ , в об'ємі 2 мл для контролю і підвищення рН середовища до 7.2, так як при завантаженні субстрату рівень рН був не достатній для процесу анаеробного бродіння. У підсумку, робочий об'єм субстрату склав 3 л.

Процес бродіння досліджувався від початку завантаження ТПОВ протягом 50 діб при температурі  $T_0=[35;37]^\circ\text{C}$ .

Мірою для визначення відносних концентрацій трьох доменів (*Bacteria*, *Archaea* і *Eucarya*) було обрано малу субодиницю (МСО) рибосомної РНК (рРНК) (вид РНК, який є центральним компонентом рибосоми, комплексу, що

збирає білки у клітині) цільових олігонуклеотидних зондів. Сума відносних кількостей *Bacteria*, *Archaea* і *Eucarya* (представлені у вигляді відсотка від загального МСО рРНК) повинна дорівнювати 100%, так як всі відомі організми містяться в межах цих трьох областей. *Bacteria* становили більшість мікроорганізмів в реакторах, *Archaea* присутні в менших кількостях (менше 10% в більшості випадків), і *Eucarya* присутні на дуже низькому рівні [22].

На етапі метаногенезу в процесі задіяні метаноутворюючі бактерії, які входить до типів *Archaea* і *Eucarya*.

Відсоток МСО рРНК метаноутворюючих бактерій  $[v_k^-; v_k^+]$  вираховувався щодня. Результати експериментальних даних вимірювання відзначаються точністю в межах 5% відносної похибки. Тому в процесі ідентифікації моделі необхідним є виконання умови, щоб інтервальні оцінки прогнозованого значення відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій ацетату були в межах цієї похибки.

Принцип вимірювання концентрації ацетату в суслі має таку властивість, що для малих значень концентрацій похибка вимірювання є великою, а для великих концентрацій – малою. Тому для представлення таких експериментальних даних вибрана максимальна абсолютна похибка на всьому діапазоні, яка складає  $\pm 0,25$  мг/л.

Результати вимірювань концентрації ацетату та відсоток МСО рРНК метаноутворюючих бактерій наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Експериментальні дані динаміки концентрації ацетату та відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій протягом 50 діб в інтервальному вигляді

$k$	діб	$v_k^-$ , $\frac{\text{мг}}{\text{л}}$	$v_k^+$ , $\frac{\text{мг}}{\text{л}}$	$v_k^-$ , % МСО рРНК	$v_k^+$ , % МСО рРНК
0	1	0,05	0,55	9,5	10,5
1	2	0,375	0,875	9	9,95
2	3	0,7	1,2	8,55	9,45
3	4	1	1,5	8,7	9,6
4	5	1,3	1,8	7,44	8,56
5	6	1,725	2,225	7,67	8,91
6	7	2,15	2,65	7,89	9,23
7	8	2,5	3	8,37	9,7
8	9	2,85	3,35	8,835	10,165
9	10	3,25	3,75	8,37	9,7
10	11	3,65	4,15	7,89	9,23
11	12	3,95	4,45	7,11	8,29
12	13	4,25	4,75	6,324	7,346

Продовження таблиці 1

13	14	4,5	5	5,62	6,48
14	15	4,75	5,25	4,8825	5,6175
15	16	4,15	4,65	5	5,75
16	17	3,55	4,05	5,115	5,885
17	18	2,95	3,45	5,45	6,28
18	19	2,35	2,85	5,8125	6,68
19	20	1,8	2,3	6,39	7,35
20	21	1,25	1,75	6,975	8,025
21	22	0,7	1,2	7,47	8,53
22	23	0,25	0,58	7,975	9,025
23	24	0,2	0,53	7,92	8,86
24	25	0,19	0,48	7,875	8,925
25	26	0,14	0,47	7,42	8,63
26	27	0,13	0,46	7,068	8,284
27	28	0,12	0,45	6,51	7,54
28	29	0,11	0,44	5,9125	6,98
29	30	0,12	0,41	5,63	6,76
30	31	0,09	0,38	5,4525	6,5475
31	32	0,085	0,375	5,33	6,26
32	33	0,08	0,37	5,25	6,175
33	34	0,07	0,36	4,94	5,85
34	35	0,06	0,35	4,767	5,533
35	36	0,05	0,34	4,75	5,515
36	37	0,04	0,33	4,7475	5,4825
37	38	0,03	0,32	4,695	5,394
38	39	0,02	0,31	4,6575	5,3725
39	40	0,015	0,305	4,6325	5,289
40	41	0,01	0,3	4,6275	5,28725
41	42	0,005	0,295	4,6275	5,28725
42	43	0,005	0,29	4,6275	5,28725
43	44	0,005	0,285	4,6275	5,28725
44	45	0,005	0,28	4,6275	5,28725
45	46	0,005	0,28	4,6275	5,28725
46	47	0,005	0,28	4,6275	5,28725
47	48	0,005	0,28	4,6275	5,28725
48	49	0,005	0,28	4,6275	5,28725
49	50	0,005	0,28	4,6275	5,28725

### 3. Модель динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій ТПОВ

Тепер перейдемо до практичної реалізації задачі структурної ідентифікації макромоделей відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ.

Для розв'язання задачі структурної ідентифікації ІДДМ скористаємося відомим методом структурної ідентифікації, побудованим на основі поведінкових моделей бджолоїної колонії, згаданим вище [23, 24].

Спочатку спираючись на відомі особливості процесу метаногенезу згенеруємо набір структурних елементів. Результати цієї процедури наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Множина структурних елементів  $F$  моделей процесу формування метаноутворюючих бактерій на стадії метаногенезу

№пп	Структурний елемент	№пп	Структурний елемент
1	$v_{k-1}$	167	$v_{k-1} \cdot v_{k-3} \cdot v_{k-5}$
2	$v_{k-2}$	...	...
...	...	177	$v_{k-1} \cdot v_{k-3} \cdot v_{k-16}$
16	$v_{k-16}$	...	...
17	$v_{k-1} \cdot v_{k-1}$	236	$v_{k-2} \cdot v_{k-3} \cdot v_{k-4}$
18	$v_{k-1} \cdot v_{k-2}$	...	...
...	...	367	$v_{k-9} \cdot v_{k-12} \cdot v_{15}$
32	$v_{k-1} \cdot v_{k-16}$	...	...
33	$v_{k-2} \cdot v_{k-2}$	560	$v_{k-14} \cdot v_{k-15} \cdot v_{k-16}$
34	$v_{k-2} \cdot v_{k-3}$	561	$v_{k-1} / v_{k-2}$
...	...	562	$v_{k-1} / v_{k-3}$
47	$v_{k-2} \cdot v_{k-16}$	...	...
...	...	575	$v_{k-1} / v_{k-16}$
152	$v_{k-16} \cdot v_{k-16}$	...	...
153	$v_{k-1} \cdot v_{k-2} \cdot v_{k-3}$	802	$v_{k-16} / v_{k-1}$
154	$v_{k-1} \cdot v_{k-2} \cdot v_{k-4}$	803	$v_{k-16} / v_{k-2}$
...	...	...	...
166	$v_{k-1} \cdot v_{k-3} \cdot v_{k-4}$	816	$v_{k-16} / v_{k-15}$



Як видно із таблиці 2, для побудови ІДДМ процесу формування метаноутворюючих бактерій необхідно задати початкові умови у вигляді вимірних значеннях відсотку МСО рНК метаноутворюючих бактерій у початкових дискретах:  $[\widehat{v}_k^-; \widehat{v}_k^+] = [v_{k=0} - v_{k=0} \cdot 0,01; v_{k=0} + v_{k=0} \cdot 0,01]$ ,  $\{k=0, \dots, 15\}$ .

Для синтезу структури ІДДМ за допомогою методу структурної ідентифікації згенеровано множину структурних елементів  $F$  з потужністю  $L=816$ . Множина структурних елементів містить поліноміальні функції не вищого третього степеня.

Для реалізації методу структурної ідентифікації задаємо такі параметри алгоритму:  $MCN=100$  (максимальне кількість ітерацій алгоритму);  $LIMIT=5$  (максимальну можливу кількість ітерацій «незмінності» структури, тобто якщо структура ІДДМ не покращувалася в процесі її перетворення  $LIMIT$  разів, то вона вважається «вичерпаною»);  $S=20$  (початкову кількість структур ІДДМ),  $[I_{\min}; I_{\max}] = [4; 7]$  (інтервал, межі якого задають відповідно мінімальне  $I_{\min}$  та максимальне  $I_{\max}$  значення потенційної кількості структурних елементів у структурі ІДДМ  $\lambda_s$ ) та множину структурних елементів  $F$ .

Далі формуємо початкову множину структур ІДДМ  $\Lambda_0$  (потужністю  $S=20$ ).

Спираючись на поведінкову модель бджолиної колонії, з набору структурних елементів послідовно формуємо «нові» структури ІДДМ. Для їх оцінки кожен раз мінімізуємо функцію мети задачі параметричної ідентифікації для поточної структури моделі.

Таблиця 3

Початкова множина структур ІДДМ процесу формування метаноутворюючих бактерій на стадії метаногенезу

№	Порядкові номери структурних елементів із множини $F$ , що задають структури $\lambda_s$ , $s = 1 \dots S$ .	Значення функції мети $\delta(\lambda_s)$
1	111, 187, 216, 400	13,654
2	4, 56, 309, 522, 679	8,006
3	54, 405, 516, 527, 714, 802	11,543
4	119, 214, 298, 468, 588, 635, 698	13,883
5	77, 504, 616, 634	12,46
6	1, 5, 211, 611	4,675
7	67, 88, 315, 442, 721	9,34
8	223, 344, 614, 645, 811	12,831
9	14, 45, 568, 697, 719, 803	8,192
10	9, 14, 98, 318, 488, 586, 708	10,047

## Продовження таблиці 3

11	25, 105, 216, 339, 561, 734	11,6
12	59, 146, 287, 538, 588, 735, 804	7,896
13	377, 568, 590, 734	9,533
14	412, 458, 600, 722, 779	11,315
15	34, 67, 98, 125, 488, 735, 779	10,678
16	7, 12, 105, 737	12,005
17	4, 12, 567, 600, 624, 755	13,972
18	9, 111, 149, 346, 590, 815	6,817
19	611, 623, 744, 787, 794, 810	9,211
20	4, 604, 616, 812	8,995

Ураховуючи заданий початковий набір структурних елементів, на кожній ітерації з використанням операторів алгоритму бджолоїної колонії отримуємо послідовність структур, які в кінцевому випадку забезпечують виконання умов гарантованої точності ІДДМ для усіх дискретних значень.

У результаті проведення етапу структурної ідентифікації, після 28 ітерацій модифікацій ІСНАР, отримали ІДДМ, яка дозволяє оцінити та спрогнозувати відсоток МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ:

$$\begin{aligned}
 [\hat{v}_k^-, \hat{v}_k^+] = & 0.853 + 0.00291 \cdot [\hat{v}_{k-1}^-, \hat{v}_{k-1}^+] \cdot [\hat{v}_{k-9}^-, \hat{v}_{k-9}^+] \cdot [\hat{v}_{k-16}^-, \hat{v}_{k-16}^+] - \\
 & - 0.10097 \cdot [\hat{v}_{k-8}^-, \hat{v}_{k-8}^+] / [\hat{v}_{k-2}^-, \hat{v}_{k-2}^+] + 0.8617 \cdot [\hat{v}_{k-1}^-, \hat{v}_{k-1}^+] - \\
 & - 0.1278 \cdot [\hat{v}_{k-5}^-, \hat{v}_{k-5}^+] - 0.03421 \cdot [\hat{v}_{k-2}^-, \hat{v}_{k-2}^+] / [\hat{v}_{k-1}^-, \hat{v}_{k-1}^+], k=16 \dots 49.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Результати прогнозування в порівнянні з експериментальними даними відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ на стадії метаногенезу наведено на рис. 1.

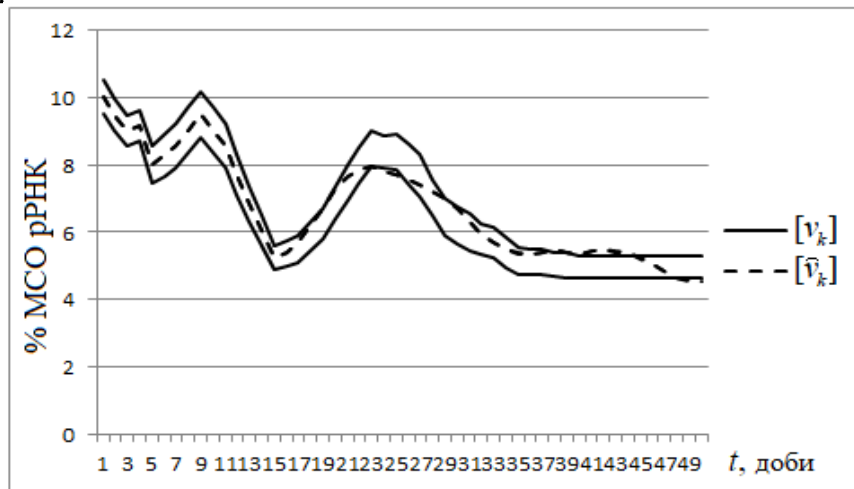


Рис. 1. Коридор динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ

Як бачимо, структура дискретної динамічної моделі і параметри адекватно відображають процес метаногенезу. Коридор динаміки концентрації ацетату ТПОВ знаходиться в межах коридору експериментальних даних, що забезпечує адекватність математичної моделі.

#### 4. Дослідження області вибору початкових умов в задачі моделювання процесу бродіння на стадії метаногенезу

Розглянемо задачу вибору початкових умов. Для цього було проведено декілька обчислювальних експериментів.

За початкові умови обрано значення, що знаходяться в інтервалі експериментальних даних. У результаті прогнозування відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій, що зображений на рис.1, за початкові умови обирали середнє значення експериментальних даних з невеликим відхиленням. На рис. 2, 3 показано ряд експериментів на стадії метаногенезу процесу анаеробного мікробіологічного бродіння, де за початкові умови взято різні дані (див. табл. 4), відмінні від даних прогнозування, що представлено на рис. 1.

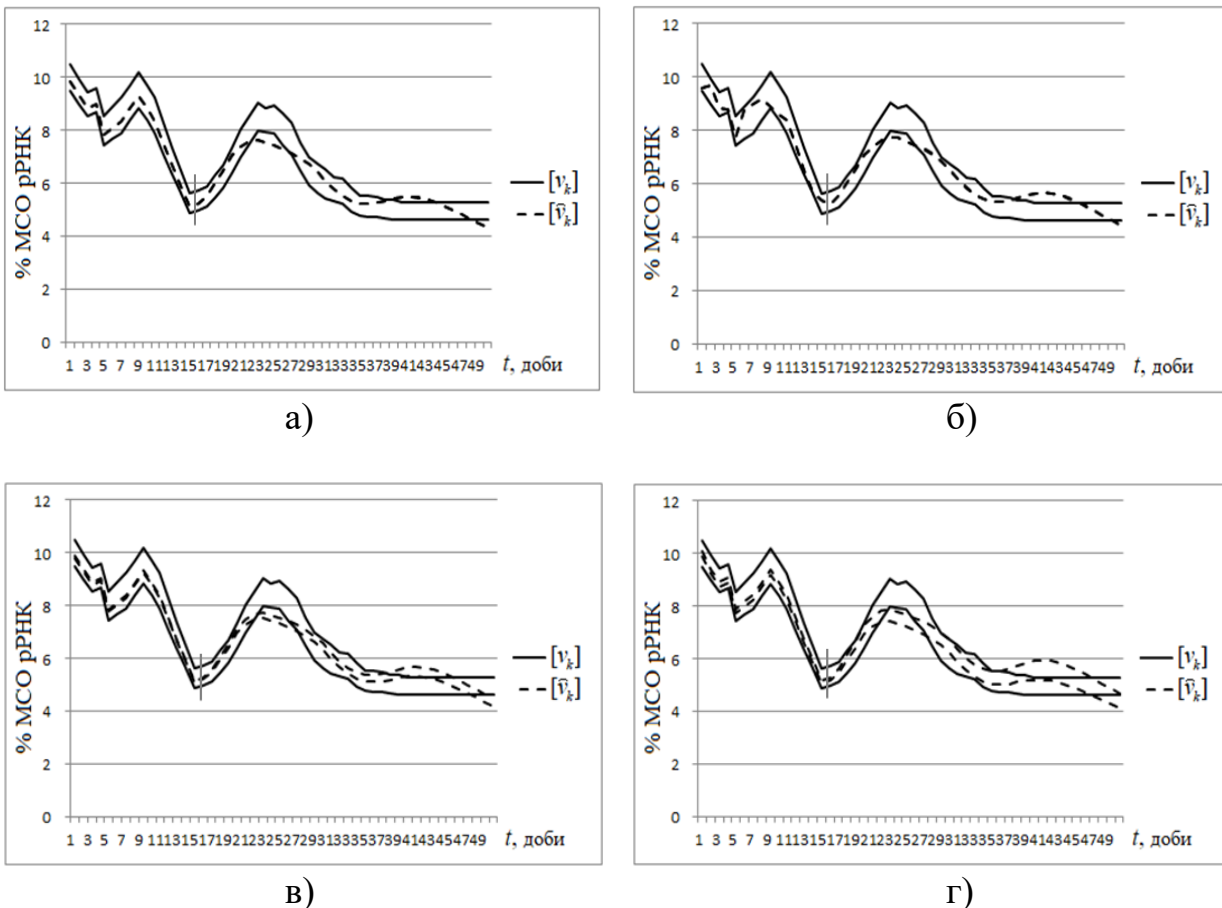


Рис. 2. Коридор динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ при правильному виборі початкових умов

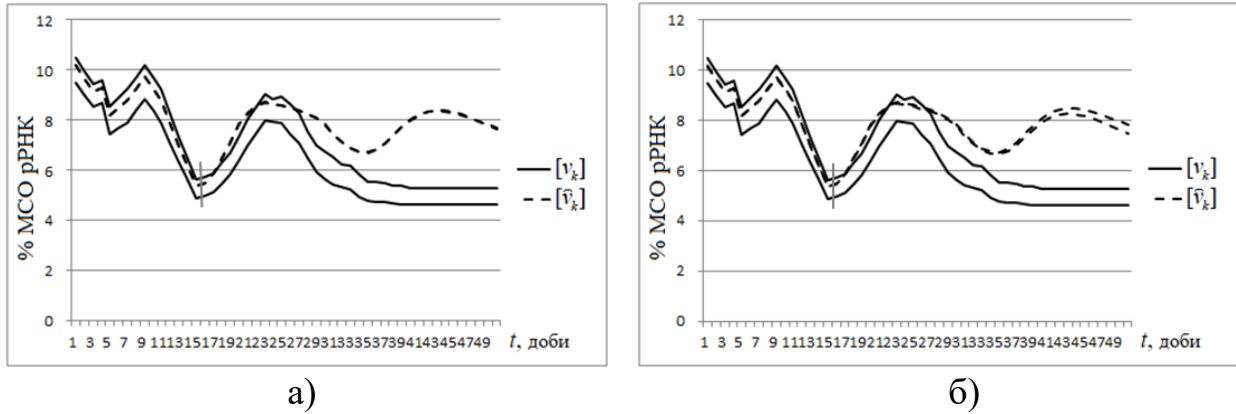


Рис. 3. Коридор динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ при неправильному виборі початкових умов

Як бачимо з рис. 2, характер процесу якісно не відрізняється від коридору динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ, що зображено на рис. 1. При збільшенні інтервалу заданих початкових даних, збільшується і ширина прогнозованих вихідних даних.

Разом з тим на рис. 3 видно, що при заданні початкових умов в межах вимірних значень, але у верхній частині інтервалів цих значень, характер процесу якісно відрізняється від коридору експериментальних даних відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ. Це означає, що отримана ІДДМ динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій втрачає стійкість при не правильному виборі початкових умов. Варто зазначити, що раніше в теорії інтервального аналізу хибно вважалося, що вибір початкових умов для ІДДМ в межах вимірювальних значень забезпечує стійкість результатів моделювання. Тому в подальших дослідженнях важливо досліджувати цю стійкість від вибору початкових умов.

Таблиця 4

Набір початкових даних для моделювання прогнозованої характеристики

Номер рисунок	Початкові умови
Рис. 2 а)	$[\hat{v}_0^-, \hat{v}_0^+] = [9,832; 9,834]$ , $[\hat{v}_1^-, \hat{v}_1^+] = [9,316; 9,318]$ , $[\hat{v}_2^-, \hat{v}_2^+] = [8,850; 8,851]$ , $[\hat{v}_3^-, \hat{v}_3^+] = [8,999; 9,001]$ , $[\hat{v}_4^-, \hat{v}_4^+] = [7,813; 7,814]$ , $[\hat{v}_5^-, \hat{v}_5^+] = [8,083; 8,084]$ , $[\hat{v}_6^-, \hat{v}_6^+] = [8,336; 8,338]$ , $[\hat{v}_7^-, \hat{v}_7^+] = [8,813; 8,814]$ , $[\hat{v}_8^-, \hat{v}_8^+] = [9,277; 9,279]$ , $[\hat{v}_9^-, \hat{v}_9^+] = [8,813; 8,814]$ , $[\hat{v}_{10}^-, \hat{v}_{10}^+] = [8,336; 8,338]$ , $[\hat{v}_{11}^-, \hat{v}_{11}^+] = [7,503; 7,504]$ , $[\hat{v}_{12}^-, \hat{v}_{12}^+] = [6,664; 6,665]$ , $[\hat{v}_{13}^-, \hat{v}_{13}^+] = [5,906; 5,907]$ , $[\hat{v}_{14}^-, \hat{v}_{14}^+] = [5,127; 5,128]$ , $[\hat{v}_{15}^-, \hat{v}_{15}^+] = [5,249; 5,251]$ ;

Продовження таблиці 4

Рис. 2 б)	$[\hat{v}_0^-, \hat{v}_0^+] = [9,599;9,601], [\hat{v}_1^-, \hat{v}_1^+] = [9,699;9,701],$ $[\hat{v}_2^-, \hat{v}_2^+] = [8,849;8,851], [\hat{v}_3^-, \hat{v}_3^+] = [8,799;8,801],$ $[\hat{v}_4^-, \hat{v}_4^+] = [7,749;7,751], [\hat{v}_5^-, \hat{v}_5^+] = [8,799;8,801],$ $[\hat{v}_6^-, \hat{v}_6^+] = [8,999;9,001], [\hat{v}_7^-, \hat{v}_7^+] = [9,199;9,201],$ $[\hat{v}_8^-, \hat{v}_8^+] = [8,899;8,901], [\hat{v}_9^-, \hat{v}_9^+] = [8,599;8,601],$ $[\hat{v}_{10}^-, \hat{v}_{10}^+] = [8,399;8,401], [\hat{v}_{11}^-, \hat{v}_{11}^+] = [7,499;7,501],$ $[\hat{v}_{12}^-, \hat{v}_{12}^+] = [6,4994;6,501], [\hat{v}_{13}^-, \hat{v}_{13}^+] = [5,699;5,701],$ $[\hat{v}_{14}^-, \hat{v}_{14}^+] = [5,399;5,401], [\hat{v}_{15}^-, \hat{v}_{15}^+] = [5,249;5,251];$
Рис. 2 в)	$[\hat{v}_0^-, \hat{v}_0^+] = [9,784;9,883], [\hat{v}_1^-, \hat{v}_1^+] = [9,270;9,363],$ $[\hat{v}_2^-, \hat{v}_2^+] = [8,806;8,894], [\hat{v}_3^-, \hat{v}_3^+] = [8,955;9,045],$ $[\hat{v}_4^-, \hat{v}_4^+] = [7,774;7,852], [\hat{v}_5^-, \hat{v}_5^+] = [8,043;8,124],$ $[\hat{v}_6^-, \hat{v}_6^+] = [8,295;8,378], [\hat{v}_7^-, \hat{v}_7^+] = [8,769;8,857],$ $[\hat{v}_8^-, \hat{v}_8^+] = [9,232;9,325], [\hat{v}_9^-, \hat{v}_9^+] = [8,769;8,857],$ $[\hat{v}_{10}^-, \hat{v}_{10}^+] = [8,295;8,378], [\hat{v}_{11}^-, \hat{v}_{11}^+] = [7,466;7,541],$ $[\hat{v}_{12}^-, \hat{v}_{12}^+] = [6,631;6,698], [\hat{v}_{13}^-, \hat{v}_{13}^+] = [5,877;5,936],$ $[\hat{v}_{14}^-, \hat{v}_{14}^+] = [5,102;5,153], [\hat{v}_{15}^-, \hat{v}_{15}^+] = [5,224;5,276];$
Рис. 2 г)	$[\hat{v}_0^-, \hat{v}_0^+] = [9,900;10,100], [\hat{v}_1^-, \hat{v}_1^+] = [9,224;9,410],$ $[\hat{v}_2^-, \hat{v}_2^+] = [8,762;8,939], [\hat{v}_3^-, \hat{v}_3^+] = [8,910;9,090],$ $[\hat{v}_4^-, \hat{v}_4^+] = [7,735;7,892], [\hat{v}_5^-, \hat{v}_5^+] = [8,003;8,164],$ $[\hat{v}_6^-, \hat{v}_6^+] = [8,253;8,420], [\hat{v}_7^-, \hat{v}_7^+] = [8,725;8,902],$ $[\hat{v}_8^-, \hat{v}_8^+] = [9,186;9,371], [\hat{v}_9^-, \hat{v}_9^+] = [8,725;8,9024],$ $[\hat{v}_{10}^-, \hat{v}_{10}^+] = [8,253;8,420], [\hat{v}_{11}^-, \hat{v}_{11}^+] = [7,428;7,578],$ $[\hat{v}_{12}^-, \hat{v}_{12}^+] = [6,598;6,731], [\hat{v}_{13}^-, \hat{v}_{13}^+] = [5,848;5,966],$ $[\hat{v}_{14}^-, \hat{v}_{14}^+] = [5,076;5,179], [\hat{v}_{15}^-, \hat{v}_{15}^+] = [5,198;5,303];$
Рис 3 а)	$[\hat{v}_0^-, \hat{v}_0^+] = [10,166;10,168], [\hat{v}_1^-, \hat{v}_1^+] = [9,632;9,634],$ $[\hat{v}_2^-, \hat{v}_2^+] = [9,149;9,151], [\hat{v}_3^-, \hat{v}_3^+] = [9,299;9,301],$ $[\hat{v}_4^-, \hat{v}_4^+] = [8,186;8,188], [\hat{v}_5^-, \hat{v}_5^+] = [8,496;8,498],$ $[\hat{v}_6^-, \hat{v}_6^+] = [8,783;8,784], [\hat{v}_7^-, \hat{v}_7^+] = [9,256;9,258],$ $[\hat{v}_8^-, \hat{v}_8^+] = [9,721;9,723], [\hat{v}_9^-, \hat{v}_9^+] = [9,256;9,258],$ $[\hat{v}_{10}^-, \hat{v}_{10}^+] = [8,783;8,784], [\hat{v}_{11}^-, \hat{v}_{11}^+] = [7,896;7,899],$ $[\hat{v}_{12}^-, \hat{v}_{12}^+] = [7,005;7,006], [\hat{v}_{13}^-, \hat{v}_{13}^+] = [6,193;6,194],$ $[\hat{v}_{14}^-, \hat{v}_{14}^+] = [5,372;5,373], [\hat{v}_{15}^-, \hat{v}_{15}^+] = [5,499;5,501];$

## Продовження таблиці 4

Рис. 3 б)	$[\hat{v}_0^-, \hat{v}_0^+] = [10,157; 10,177], [\hat{v}_1^-, \hat{v}_1^+] = [9,624; 9,643],$
	$[\hat{v}_2^-, \hat{v}_2^+] = [9,141; 9,159], [\hat{v}_3^-, \hat{v}_3^+] = [9,291; 9,309],$
	$[\hat{v}_4^-, \hat{v}_4^+] = [8,179; 8,195], [\hat{v}_5^-, \hat{v}_5^+] = [8,488; 8,505],$
	$[\hat{v}_6^-, \hat{v}_6^+] = [8,775; 792], [\hat{v}_7^-, \hat{v}_7^+] = [9,247; 9,266],$
	$[\hat{v}_8^-, \hat{v}_8^+] = [9,712; 9,731], [\hat{v}_9^-, \hat{v}_9^+] = [9,247; 9,66],$
	$[\hat{v}_{10}^-, \hat{v}_{10}^+] = [8,775; 8,792], [\hat{v}_{11}^-, \hat{v}_{11}^+] = [7,889; 7,905],$
	$[\hat{v}_{12}^-, \hat{v}_{12}^+] = [6,998; 7,012], [\hat{v}_{13}^-, \hat{v}_{13}^+] = [6,187; 6,199],$
	$[\hat{v}_{14}^-, \hat{v}_{14}^+] = [5,367; 5,378], [\hat{v}_{15}^-, \hat{v}_{15}^+] = [5,495; 5,506].$

### 5. Модель динаміки концентрації ацетату ТПОВ на стадії ацидогенезу

Далі перейдемо до практичної реалізації задачі структурної ідентифікації макромоделі динаміки концентрації ацетату ТПОВ на стадії ацидогенезу.

Спочатку спираючись на відомі особливості процесу ацидогенезу згенеруємо набір структурних елементів. Результати цієї процедури наведено в таблиці 5.

Таблиця 5

#### Множина структурних елементів $F$ моделей динаміки концентрації ацетату ТПОВ на стадії ацидогенезу

№пп	Структурний елемент	№пп	Структурний елемент
1	$v_{k-1}$	111	$v_{k-1} \cdot v_{k-3} \cdot v_{k-5}$
2	$v_{k-2}$	...	...
...	...	126	$v_{k-1} \cdot v_{k-3} \cdot v_{k-10}$
10	$v_{k-10}$	...	...
11	$v_{k-1} \cdot v_{k-1}$	137	$v_{k-2} \cdot v_{k-3} \cdot v_{k-4}$
12	$v_{k-1} \cdot v_{k-2}$	...	...
...	...	154	$v_{k-4} \cdot v_{k-5} \cdot v_{k-10}$
20	$v_{k-1} \cdot v_{k-10}$	...	...
21	$v_{k-2} \cdot v_{k-2}$	174	$v_{k-7} \cdot v_{k-8} \cdot v_{k-10}$
22	$v_{k-2} \cdot v_{k-3}$	175	$v_{k-1}^3$
...	...	...	...
30	$v_{k-2} \cdot v_{k-10}$	184	$v_{k-1}^4$
...	...	...	...

Продовження таблиці 5

100	$v_{k-10} \cdot v_{k-10}$	193	$v_{k-1} \cdot v_{k-1} \cdot v_{k-1} \cdot v_{k-2}$
101	$v_{k-1} \cdot v_{k-2} \cdot v_{k-3}$	...	...
102	$v_{k-1} \cdot v_{k-2} \cdot v_{k-4}$	201	$v_{k-1} \cdot v_{k-1} \cdot v_{k-2} \cdot v_{k-3}$
...	...	...	...
110	$v_{k-1} \cdot v_{k-3} \cdot v_{k-4}$	390	$v_{k-10} \cdot v_{k-10} \cdot v_{k-10} \cdot v_{k-8}$

Для побудови ІДДМ процесу формування концентрацій ацетату необхідно задати початкові умови у вигляді вимірних значень концентрацій ацетату у початкових дискретах:  $[\hat{v}_k^-; \hat{v}_k^+] = [v_{k=0} - v_{k=0} \cdot 0,01; v_{k=0} + v_{k=0} \cdot 0,01]$ ,  $\{k=0, \dots, 10\}$ .

Для синтезу структури ІДДМ за допомогою методу структурної ідентифікації згенеровано множину структурних елементів  $F$  з потужністю  $L=390$ . Множина структурних елементів містить поліноміальні функції не вищого четвертого степеня.

Для реалізації методу структурної ідентифікації задаємо такі параметри алгоритму:  $MCN=100$ ;  $LIMIT=5$ ;  $S=15$ ,  $[I_{min}; I_{max}] = [4; 7]$  та множину структурних елементів  $F$  (див. табл. 5).

Далі формуємо початкову множину структур ІДДМ  $\Lambda_0$ ,  $S=15$ .

Ураховуючи заданий початковий набір структурних елементів, на кожній ітерації з використанням операторів алгоритму бджолоїної колонії отримуємо послідовність структур, які в кінцевому випадку забезпечують виконання умов гарантованої точності ІДДМ для усіх дискретних значень.

Таблиця 6

Початкова множина структур ІДМ динаміки концентрації ацетату ТПОВ на стадії ацидогенезу

№	Порядкові номери структурних елементів із множини $F$ , що задають структури $\lambda_s$ , $s = 1 \dots S$ .	Значення функції мети $\delta(\lambda_s)$
1	4, 56, 86, 215, 286	9,43
2	12, 156, 209, 329	6,566
3	22, 27, 106, 127, 294	2,314
4	113, 200, 233, 256, 312	7,003
5	7, 46, 79, 104, 216, 334, 351	2,906

## Продовження таблиці 6

6	9, 15, 211, 300	5,715
7	98, 108, 205, 222, 321	6,304
8	3, 87, 156, 198	8,381
9	34, 49, 99, 107, 303	8,507
10	9, 15, 38, 388	7,406
11	24, 109, 116, 334, 380	4,632
12	5, 67, 90, 238, 288	3,96
13	77, 168, 170, 234	2,133
14	32, 48, 100, 222, 379	6,54
15	29, 77, 139, 211, 255, 258, 361	5,314

У результаті проведення етапу структурної ідентифікації, у результаті проведення 22 ітерацій модифікацій ІСНАР отримали ІДДМ, яка дозволяє оцінити та спрогнозувати динаміку концентрації ацетату ТПОВ на стадії ацидогенезу:

$$\begin{aligned}
 [\hat{v}_k^-, \hat{v}_k^+] = & 0.0642 + 0.76 \cdot [\hat{v}_{k-1}^-, \hat{v}_{k-1}^+] + 0.17886 \cdot [\hat{v}_{k-1}^-, \hat{v}_{k-1}^+] \cdot [\hat{v}_{k-1}^-, \hat{v}_{k-1}^+] - \\
 & - 0.092916 \cdot [\hat{v}_{k-1}^-, \hat{v}_{k-1}^+] \cdot [\hat{v}_{k-9}^-, \hat{v}_{k-9}^+] - 0.00176 \cdot [\hat{v}_{k-9}^-, \hat{v}_{k-9}^+] \cdot [\hat{v}_{k-5}^-, \hat{v}_{k-5}^+] - (10) \\
 & - 0.00689 \cdot [\hat{v}_{k-1}^-, \hat{v}_{k-1}^+] \cdot [\hat{v}_{k-1}^-, \hat{v}_{k-1}^+] \cdot [\hat{v}_{k-3}^-, \hat{v}_{k-3}^+] \cdot [\hat{v}_{k-5}^-, \hat{v}_{k-5}^+], k=10 \dots 49.
 \end{aligned}$$

Результати прогнозування в порівнянні з експериментальними даними концентрації ацетату в БГУ на стадії ацидогенезу наведено на рис.4.



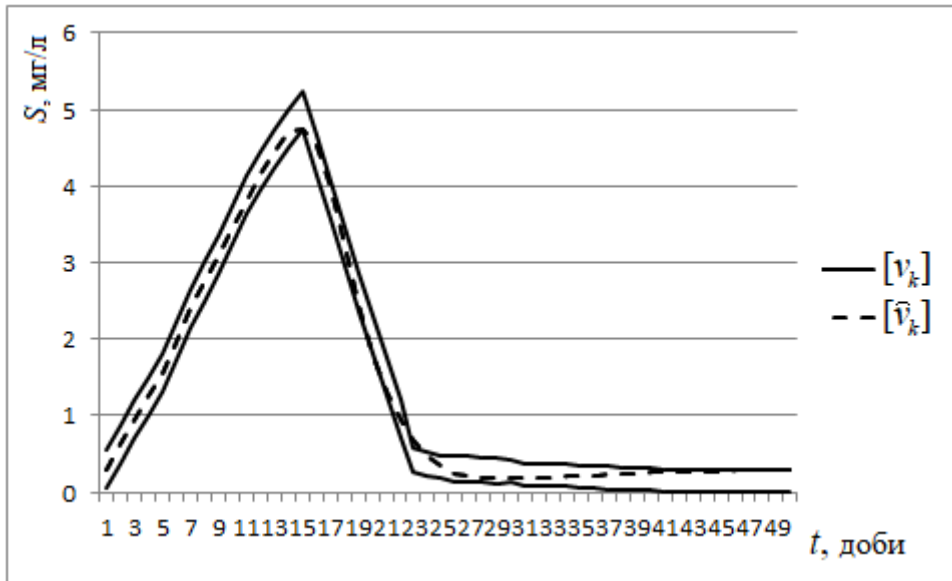


Рис. 4. Коридор динаміки концентрації ацетату в БГУ на стадії ацидогенезу

Як бачимо, коридор динаміки вимірної концентрації в БГУ на стадії ацидогенезу включає інтервал прогнозованих значень концентрації, що підтверджує адекватність моделі.

У даній праці не наведено модель на стадії ацетогенезу, оскільки вона є достатньо простою і не передбачає використання важливих чинників, які би впливали на хід процесу виробництва біогазу.

### Висновки

Отримані моделі дають можливість спрогнозувати коридор динаміки концентрації ацетату ТПОВ на стадії ацидогенезу та відсоток МСО рРНК метаноутворюючих бактерій на стадії метаногенезу.

В процесі проведення комп'ютерних експериментів з отриманими моделями встановлено важливу властивість, що вибір початкових умов для реалізації моделі суттєвим чином впливає на стійкість. Зокрема, отримано ІДДМ динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій на стадії метаногенезу, яка при не правильному виборі початкових умов, втрачає стійкість результатів моделювання.

Розроблені макромоделі процесу анаеробного мікробіологічного бродіння на стадіях ацидогенезу та метаногенезу було розроблено вперше і можуть бути використані для моделювання процесів у БГУ при відповідному налаштуванні їх параметрів. А саме, визначення об'єму БГУ, режимів процесу бродіння процесу бродіння і вибору початкових умов.

### Література

1. Гелетука Г.Г. Перспективи виробництва та використання біогазу в Україні / Г.Г. Гелетука, П.П. Кучерук, Ю.Б. Матвеев // Аналітична записка БАУ № 4, 2013. – 22 с.

2. Боднар А.М. Перший крок до екологічного майбутнього – сортування сміття. – Тернопіль, 2013. – 12 с.
3. Gerber M. An Analysis of Available Mathematical Model for Anaerobic Digestion of Organic Substances for Production of Biogas / M. Gerber, R. Span // International Gas Union Research conference. – Paris 2008. – P. 5–7.
4. Гураль І.В. Біохімічний аналіз процесів в біогазових установках та його застосування в задачі макромодельовання процесів виробництва біогазу / І.В. Гураль, М.П. Дивак // Міжнародний науково-технічний журнал «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах». – Хмельницький, 2014 – С.152-158.
5. Hural I. Autonomous Systems Modification of Mono`s Differential Equations to Non-autonomous Systems in the Tasks of Modeling Processes Problems at Biogas Plants / I. Hural, M. Dyvak, Yu. Pigovsky, V. Spilchuk // 13-th International Conference “The Experience Of Designing And Application Of CAD Systems in Microelectronics” Polyana Svalyava (Zakarpattia) UKRAINE 24-27 February 2015.– P. 93-96.
6. Дивак М. Ідентифікація параметрів моделей «вхід–вихід» динамічних систем на основі інтервального підходу / М. Дивак, П. Стахів, І. Каліщук // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — 2004. —Т. 9, № 4. — С. 109–117.
7. Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. – Киев: "Техника", 1975. – 311 с
8. Дивак М. П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними. – Тернопіль: Видавництво ТНЕУ «Економічна думка», 2011. – 216 с. – ISBN 978-966-654-283-3.
9. Дивак М.П. Особливості побудови інтервальної системи алгебричних рівнянь та методу її розв'язку в задачах ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора / М.П. Дивак. Т.М. Дивак // Індуктивне моделювання складних систем: Зб. наук. пр. – К.: МННЦ ІТС НАН та МОН України, 2009. – Вип. 1. – С. 35-43.
10. Льюнг Л. О точности модели в идентификации систем. Известия АН. Техническая кибернетика, №6. – М.: Наука, 1992. – С. 55–64.
11. Порплиця Н. П. Порівняльний аналіз ефективності генетичного та "бджолиного" алгоритмів у задачі структурної ідентифікації інтервального різницевого оператора / Н. П. Порплиця // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2015. – № 1. – С. 55-67.
12. Порплиця Н. П. Синтез структури інтервального різницевого оператора з використанням алгоритму бджолиної колонії / Н. П. Порплиця, М. П. Дивак // Індуктивне моделювання складних систем. – 2013. – Вип. 5. – С. 256-269.
13. Porplytsya N. Method of structure identification for interval difference operator based on the principles of honey bee colony functioning / N. Porplytsya,

M. Dyvak, T. Dyvak // *Computational Problems of Electrical Engineering*. – 2014. – Vol. 4, №2. – P. 57-68.

14. Karaboga D. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm / D. Karaboga, B. Basturk // *Journal of Global Optimization*. – 2007. – Vol. 39. – P. 459–471.

15. Порплиця Н.П. Метод структурної ідентифікації моделей процесу бродіння у біогазових установках із застосуванням алгоритму бджолиної колонії / Н.П. Порплиця, І.В. Гураль, М.П. Дивак // *Науковий вісник НЛТУ України: збірник науково-технічних праць*. – Львів: РВВ НЛТУ України. – 2017. – Вип. 27(1). – с.215-222.

16. Порплиця Н. П. Реалізація методу структурної ідентифікації інтервальних різницевих операторів на основі алгоритму поведінки бджолиної колонії / Н. П. Порплиця, М. П. Дивак // *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. – 2015. – Вип. 4(93). – С. 34-40.

17. Ивахненко А. Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. – Київ: Наукова думка, 1981. – 296 с.

18. Porplytsya N. Interval difference operator for the task of identification recurrent laryngeal nerve / N. Porplytsya, M. Dyvak // *Computational Problems of Electrical Engineering: Proceedings of the 16th International Conference (CPEE' 2015)*. – Lviv, 2015. – P. 156-158.

19. Hural I. Macromodelling of fermentation process of municipal solid organic waste at biogas plants on the acidogenesis stage / I. Hural, M. Dyvak, P. Stakhiv // *Journal of Applied Computer Science*, 2016. – P.17-35.

20. Гураль І.В. Макромодельовання стадії метаногенезу зброджування твердих побутових органічних відходів у біогазових установках // *Вісник національного технічного університету «ХП»*. Серія «Математичне моделювання в техніці і технологіях» – 2016. – С.23-30.

21. Griffin M. E. Methanogenic population dynamics during start-up of anaerobic digesters treating municipal solid waste and biosolids / M. E. Griffin, K. D. McMahon, R. I. Mackie, and L. Raskin // *Biotechnology and Bioengineering*, vol. 57, no. 3, 1998. – P. 342–355.

22. Швед О.В. Екологічна біотехнологія / Швед О.В., Миколів О.Б., Комаровська-Порохнявець О.З., Новіков В.П.: Навч. посіб. у 2 кн. — Львів: Львівська політехніка, 2010.

23. Abraham A. *Swarm intelligence in data maining* / A. Abraham, G. Grosan. – Berlin: Springer, 2006. – 267 p.

24. Camazine S. A model of collective nectar source by honey bees: Selforganization through simple rules / S. Camazine, J. Sneyd // *Journal of Theoretical Biology*. – 1991. – № 149. – P. 547–571.