



## Переробка та зберігання сільськогосподарської продукції Processing and storage of agricultural products

УДК 631.362:532

### Про нелінійну модель руху сепарованих сумішей в циліндричних віброрешетах

Л.М. Тіщенко, В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський

Харківський національний технічний університет сільського господарства  
ім. Петра Василенка (м. Харків, Україна)

З використанням гідродинамічної теорії описано усталений вертикальний рух шару сепарованих сумішей по внутрішній поверхні циліндричного вібровідцентрованого решета, яке рівномірно обертається навколо вертикальної вісі. Прийнято степеневу залежність дотичного напруження в псевдорозрідженій суміші від похідної швидкості потоку за радіальною координатою, запозичену з теорії неньютонової в'язкої рідини. Висвітлено питання ідентифікації двох феноменологічних параметрів псевдорозрідженої суміші за даними вимірювань кінематичних характеристик потоку.

**Ключові слова:** сепарування, зернова суміш, циліндричне віброрешето, усталений рух, степенева реологічна залежність, швидкість потоку, продуктивність решета.

**Вступ.** Останнім часом серед моделей, які використовують для опису руху шару сепарованих сумішей по поверхнях віброрешіт, набули поширення гідродинамічні моделі [1 - 5]. В їх основі лежить теорія ньютонової в'язкої рідини з лінійною залежністю дотичного напруження від похідної швидкості руху за просторовою координатою. Але потік псевдорозрідженої сепарованої суміші може дещо відрізнятись від потоку ньютонової рідини з одним феноменологічним параметром (коефіцієнтом в'язкості). Тому доцільно узагальнити відомі гідродинамічні моделі додатковим введенням другого феноменологічного параметра, яким стає показник степеня в залежності дотичного напруження від швидкості зсуву.

Завдяки цьому створюється можливість поліпшити адекватність математичної моделі, чим і зумовлена мета роботи.

**Метою роботи** є розробка узагальненої уточненої гідродинамічної моделі усталеного потоку шару сепарованої зернової суміші по внутрішній поверхні циліндричного віброрешета, що обертається навколо вертикальної вісі зі сталою кутовою швидкістю.

**Диференціальне рівняння руху та його розв'язки.** Усталений осесиметричний потік зе-

рнової суміші у напрямі вісі  $oz$  (рис. 1) описуємо диференціальним рівнянням:

$$\frac{d}{dr}(r\tau) = -\rho g r. \quad (1)$$

У ньому  $\tau = \tau(r)$  дотичне напруження в суміші, яка має питому масу  $\rho$ ;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $r$  – радіальна координата, показана на рисунку.

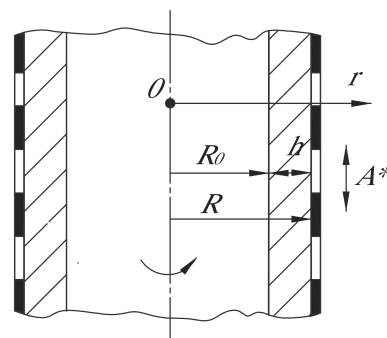


Рис. 1. Розрахункова схема вертикального циліндричного решета з сепарованою сумішшю

На вільній поверхні рухомого шару  $r = R_0$  відсутні дотичні напруження. Тому рівняння (1)

інтегруємо при граничній умові:

$$\tau(R_0) = 0,$$

що дає:

$$\tau(r) = \frac{\rho g}{2} \left( \frac{R_0^2}{r} - r \right). \quad (2)$$

Далі приймаємо зв'язок між  $\tau$  і  $\frac{du}{dr}$  у вигляді:

$$\tau = \mu \left| \frac{du}{dr} \right|^{1/\alpha} \operatorname{sign} \left( \frac{du}{dr} \right), \quad (3)$$

де  $\mu, \alpha$  – позитивні сталі;  $u = u(r)$  – швидкість потоку в напрямі вісі  $oz$ .

При  $\alpha = 1$  залежність (3) переходить у відому формулу Ньютона [6].

Враховуючи, що  $\frac{du}{dr} < 0$ , після підстановки (3) в (2), отримуємо:

$$\left| \frac{du}{dr} \right|^{1/\alpha} = \frac{\rho g}{2\mu} \left( r - \frac{R_0^2}{r} \right),$$

або

$$\frac{du}{dr} = - \left( \frac{\rho g}{2\mu} \right)^\alpha \left( r - \frac{R_0^2}{r} \right)^\alpha. \quad (4)$$

На внутрішній поверхні решета  $r = R$  швидкість потоку приймаємо рівною нулю. Тому інтегрування (4), при граничній умові  $u(R) = 0$ , дає наступний розподіл швидкості потоку по радіальній координаті:

$$u(r) = \left( \frac{\rho g}{2\mu} \right)^\alpha \int_r^R \left( y - \frac{R_0^2}{y} \right) dy. \quad (5)$$

Цей інтеграл виражається через елементарні функції при цілих додатних  $\alpha$ . Наприклад, при  $\alpha = 1$ , маємо:

$$u(r) = \frac{\rho g}{2\mu} \left( \frac{R^2 - r^2}{2} - R_0^2 \ln \frac{R}{r} \right),$$

що раніше було в [1, 5].

У випадку довільних  $\alpha > 0$  інтеграл в (5) доводиться обчислювати на комп'ютері. Але для розв'язання оберненої задачі динаміки (проведення ідентифікації) бажано мати компактну замкнену формулу  $u(r)$ . Тому далі інтеграл в (5) обчислимо наближено, виходячи з практики малого відношення товщини сепарованого шару до радіуса решета. З цією метою перейдемо до нової змінної інтегрування  $\xi$  по формулі  $y = R_0 + \xi$ , де  $\xi \in [0; h]$ ,  $h = R - R_0$ .

Тоді:

$$u(\xi) = \left( \frac{\rho g}{2\mu} \right)^\alpha \int_\xi^h \left( R_0 + \xi - \frac{R_0^2}{R_0 + \xi} \right)^\alpha d\xi.$$

Замінімо наближено тут множник

$$f_1 \left( \alpha, \frac{\xi}{R_0} \right) = \left( \frac{1 + 0,5\xi / R_0}{1 + \xi / R_0} \right)^\alpha$$

на

$$f_2 \left( \alpha, \frac{\xi}{R_0} \right) = 1 - 0,5\alpha\xi / R_0.$$

Після такої заміни, провівши інтегрування, одержуємо наближений розподіл швидкості потоку по радіальній координаті:

$$u(\xi) = \left( \frac{\rho g}{\mu} \right)^\alpha \left( \frac{h^{\alpha+2} - \xi^{\alpha+2}}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{2R_0} \times \frac{h^{\alpha+2} - \xi^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right). \quad (6)$$

При цьому найбільша швидкість руху суміші становить:

$$u(0) = \left( \frac{\rho g}{\mu} \right)^\alpha \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left( 1 - \frac{\alpha h}{2R_0} \frac{\alpha+1}{\alpha+2} \right). \quad (7)$$

Розподілу швидкості (6) відповідає наступна об'ємна продуктивність решета:

$$Q = 2\pi \int_0^h (\xi + R_0) u(\xi) d\xi = 2\pi \left( \frac{\rho g}{\mu} \right)^\alpha \left[ R_0 \frac{h^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{h^{\alpha+3}}{\alpha+3} - \frac{\alpha}{2R_0} \frac{h^{\alpha+4}}{\alpha+4} \right].$$

Тут третій доданок значно менший, ніж перший. Тому, без суттєвої похибки, можна наближено прийняти:

$$Q = 2\pi R_0 \left( \frac{\rho g}{\mu} \right)^\alpha \frac{h^{\alpha+2}}{\alpha+2} \times \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\alpha+2}{\alpha+3} \frac{h}{R_0} \right]. \quad (8)$$

Вирази  $u(\xi)$ ,  $u(0)$  та  $Q$  одержано в результаті заміни  $f_1(\alpha, \xi/R_0)$  на  $f_2(\alpha, \xi/R_0)$ . Виникає питання, чи суттєво це вплинуло на точність формул? Щоб відповісти на нього проведено обчислення відношень указаних функцій

для різних  $\alpha$  і  $\xi/R_0$ . Результати обчислень записано в табл. 1. У межах розглянутих значень аргументів, що відповідає практиці сепарування, відношення функцій близькі до одиниці. Це підтверджує високу точність одержаних наближених аналітичних виразів швидкості потоку і об'ємної продуктивності решета.

Результати обчислення  $u(0)$  по формулі (7) при  $h = 0,008$  м;  $R = 0,3075$  м;  $\rho = 750$  кг/м<sup>3</sup> і різних  $\alpha$  і  $\mu$  записано в табл. 2.

В табл. 3 записано  $u(0)$ , обчислені за виразом (7), для  $h = 0,012$  м.

**Таблиця 1.** До оцінки похибок апроксимації при різних  $\alpha$  і  $\xi/R_0$

$\xi/R_0$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,7$	$\alpha = 0,9$	$\alpha = 1,1$	$\alpha = 1,3$
	Відношення $f_1(\alpha, \xi/R_0)/f_2(\alpha, \xi/R_0)$				
0,01	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05	1,0005	1,0008	1,0011	1,0014	1,0017
0,10	1,0021	1,0031	1,0042	1,0054	1,0068
0,15	1,0045	1,0067	1,0092	1,0120	1,0150

**Таблиця 2.** Швидкість  $u(0)$  при  $h = 0,008$  м

$\mu$ , Па с <sup>1/α</sup>	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,6$	$\alpha = 0,7$	$\alpha = 0,8$	$\alpha = 0,9$
	Значення $u(0)$ , м/с				
0,10	0,129	0,228	0,406	0,726	1,299
0,15	0,105	0,179	0,306	0,525	0,902
0,20	0,091	0,151	0,250	0,417	0,696
0,25	0,082	0,132	0,214	0,349	0,570
0,30	0,074	0,118	0,188	0,301	0,483
0,40	0,064	0,099	0,154	0,239	0,373

**Таблиця 3.** Швидкість  $u(0)$  при  $h = 0,012$  м

$\mu$ , Па с <sup>1/α</sup>	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,6$	$\alpha = 0,7$	$\alpha = 0,8$	$\alpha = 0,9$
	Значення $u(0)$ , м/с				
0,1	0,236	0,436	0,807	1,500	2,796
0,2	0,167	0,288	0,497	0,861	1,498
0,3	0,136	0,225	0,374	0,623	1,040
0,4	0,118	0,190	0,306	0,495	0,803

Збільшення  $h$  і  $\alpha$  призводить до суттєвого зростання розрахункової швидкості  $u(0)$  на вільній поверхні рухомого шару, тоді як збільшення  $\mu$  супроводжується зменшенням цієї швидкості. Тому важливо для розрахунків задати потрібні значення  $\mu$  і  $\alpha$ . Цьому сприяє проведення ідентифікації на базі експерименту, про що піде мова далі.

**Ідентифікація феноменологічних констант.** Її можна проводити з вимірюванням швидкості потоку або з вимірюванням об'ємної проду-

ктивності решета. Розглянемо перший варіант проведення. Нехай за результатами вимірювань при товщині рухомого шару  $h = h_1$  швидкість  $u(0) = u_1$  а при  $h = h_2$   $u(0) = u_2$ . Тоді, користуючись формулою (7), одержуємо:

$$\alpha = \frac{1}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)} \ln \left( \frac{u_1 \left(1 - \frac{\alpha h_2}{2R_2} \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}\right)}{u_2 \left(1 - \frac{\alpha h_1}{2R_1} \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}\right)} \right) - 1; \quad (9)$$

$$\mu = \rho g h_1 \left[ \frac{h_1}{u_1} \left( \frac{1}{\alpha + 1} - \frac{\alpha h_1}{2R_1} \frac{1}{\alpha + 2} \right) \right]^{1/\alpha}, \quad (10)$$

де  $R_1 = R - h_1$ ;  $R_2 = R - h_2$ .

Обчислення  $\alpha$  доводиться проводити методом ітерацій по формулі (9), задаючи в її праву частину початкове наближення  $\alpha = 0$ .

Як приклад, визначимо  $\alpha$  і  $\mu$ , коли  $h_1 = 0,008$  м;  $h_2 = 0,012$  м;  $u_1 = 0,10$  м/с;  $u_2 = 0,19$  м/с. Проводячи ітерації отримуємо  $\alpha = 0,58; 0,59; 0,59$ . Для  $\alpha = 0,59$  по формулі (10) знаходимо:  $\mu = 0,37$  Пас<sup>1/α</sup>. Результати ідентифікації близькі до відповідних значень  $\alpha = 0,6$ ;  $\mu = 0,4$  Пас<sup>1/α</sup>, що в табл. 2 і табл. 3, де  $u_1 = 0,099$  м/с, а  $u_2 = 0,19$  м/с.

Якщо проводити ідентифікацію з вимірюванням продуктивності решета, то слід використовувати формули:

$$\alpha = \frac{1}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)} \ln \left[ \frac{Q_1}{Q_2} \frac{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\alpha + 2}{\alpha + 3} \frac{h_2}{R_2}}{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\alpha + 2}{\alpha + 3} \frac{h_1}{R_1}} \right] - 2; \quad (11)$$

$$\mu = \rho g h_1 \left\{ \frac{2\pi R_1 h_1^2}{Q(\alpha + 2)} \times \left[ 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{(\alpha + 2) h_1}{(\alpha + 3) R_1} \right] \right\}^{1/\alpha}, \quad (12)$$

які впливають з (8).

Тут  $Q_1$  продуктивність решета при  $h = h_1$ , а  $Q_2$  – його продуктивність при  $h = h_2$ .

З'ясуємо якими будуть  $\alpha$ ,  $\mu$ , коли при  $h_1 = 0,008$  м –  $Q_1 = 0,0018$  м<sup>3</sup>/с, а при  $h_2 = 0,012$  м –  $Q_2 = 0,0052$  м<sup>3</sup>/с. За початкове наближення для проведення ітерацій по форму-

лі (11) приймаємо  $\alpha = 0$ . Ітераціями одержуємо:  $\alpha = 0,62; 0,63; 0,63$ . Далі по формулі (12) знаходимо  $\mu = 0,17$  Пас<sup>1/α</sup>. Точність проведення ідентифікації легко перевірити підстановкою одержаних результатів в (8). По суті, точність ідентифікації цілком залежить від точності експериментальних вимірювань параметрів потоку зернової суміші.

#### Висновки.

1. Розроблена нелінійна модель руху псевдорозрідженої суміші узагальнює відомі лінійні гідродинамічні теорії.

2. Розрахункова швидкість потоку зернової суміші суттєво залежить від значень обох феноменологічних параметрів моделі.

3. Завдяки компактності та простоті розрахункових формул виникає можливість ідентифікувати значення феноменологічних констант за даними вимірювань параметрів потоку.

#### Література

1. Тищенко Л. Н. Интенсификация сепарирования зерна / Л. Н. Тищенко. – Харьков : Основа, 2004. – 224 с.
2. Тищенко Л. Н. Гидродинамика сепарирования зерна / Л. Н. Тищенко, В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский. – Харьков : Миськдрук, 2010. – 174 с.
3. Тищенко Л. Н. Моделирование процессов зерновых сепараторов / Л. Н. Тищенко, Д. И. Мазоренко, М. В. Пивень и др. – Харьков : Миськдрук, 2010. – 360 с.
4. Тищенко Л. Н. Виброрешетная сепарация зерновых смесей / Л. Н. Тищенко, В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский. – Харьков : Миськдрук, 2011. – 280 с.
5. Тищенко Л. Н. Динамика вибродвигателя зерноочистки / Л. Н. Тищенко, В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский. – Харьков : Миськдрук, 2013. – 440 с.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1973. – 847 с.

#### Аннотация

### О нелинейной модели движения сепарированных смесей в цилиндрических виброрешетах

Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский

С применением гидродинамической теории описано установившееся вертикальное движение слоя сепарированной смеси по внутренней поверхности цилиндрического вибродвигателя решета, которое равномерно вращается вокруг вертикальной оси. Принято степенную зависимость касательного напряжения в псевдооживленной смеси от производной скорости потока по радиальной ко-

ординате, заимствованную из теории неньютоновской вязкой жидкости. Изложен вопрос идентификации двух феноменологических параметров псевдооживленной смеси по данным измерений кинематических характеристик потока.

**Ключевые слова:** сепарирование, зерновая смесь, цилиндрическое виброрешето, установившееся движение, степенная реологическая зависимость, скорость потока, производительность решета.

#### Abstract

### Nonlinear model of the separated mixtures movement in a cylindrical vibrating screen

L.N. Tishchenko, V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy

With the use of the hydrodynamic theory, the steady vertical movement of the separated mixture layer on the inner surface of the cylindrical vibrocentrifugal screen that regularly rotates around the vertical axis was described. Power dependence of the tangential shearing stress in the fluid mixture on the velocity derivative of the flow rate of the radial coordinate, borrowed from the theory of viscous non-Newtonian fluid theory, was adopted. The problem of identification of two phenomenological parameters of the fluidized mixture according to measurements of the kinematic characteristics of the flow was explored.

**Keywords:** separation, grain mixture, cylindrical vibrating screen, steady movement, power rheological dependence, flow velocity, productivity of screen.

---

Представлено: О.І.Завгородній / Presented by: O.I.Zavgorodniy

Рецензент: С.О.Харченко / Reviewer: S.O.Kharchenko

Подано до редакції / Received: 30.05.2015