

УДК 631.362:532

Про наближене обчислення швидкості потоку зернової суміші в циліндричному віброрешеті

В.П. Ольшанський, В.В. Бурлака, М.В. Сліпченко, О.М. Малець

*Харківський національний технічний університет сільського господарства
 імені Петра Василенка (Харків, Україна)*

Виведено нелінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке описує усталений вертикальний рух шару віброзрідженої дрібнозернистої суміші по внутрішній поверхні циліндричного решета віброцентрифуги, що обертається зі сталою кутовою швидкістю навколо вертикальної вісі. В основу рівняння покладено нелінійну квадратично-полігональну залежність дотичного напруження в суміші від швидкості деформації зсуву. Припускається, що реологічні сталі в цій залежності параметрично пов'язані з фізико-механічними характеристиками зерноsumіші та характеристиками механічних коливань віброцентрифуги. Додатково до рівняння сформульовано крайову умову. Вона виражає відсутність ковзання суміші по поверхні віброрешета. Одержано аналітичний розв'язок поставленої крайової задачі у вигляді квадратури, яка не виражається через елементарні або затабульовані спеціальні функції. Тому для обчислення квадратури (або швидкості потоку) запропоновано два наближених способи, які ґрунтуються на відомій в інтегральному численні формулі Сімпсона. У першому способі названа формула безпосередньо застосовується для обчислення інтеграла, а в другому додатково проводиться попередня апроксимація підінтегральної функції, завдяки чому основна частина інтеграла виражається окремим доданком у аналітичному вигляді. Показано, що другий спосіб обчислень більш точний, ніж перший. Його похибка не перевищує десятих долей відсотка, що встановлено порівнянням наближених і точних результатів, одержаних числовим комп'ютерним інтегруванням. Ефективне використання формули Сімпсона можливе завдяки відносно малій товщині рухомого шару зерноsumіші.

В статті наведено перелік останніх публікацій, де раніше в континуальних моделях руху сипкого матеріалу використовували квадратичну реологічну залежність. Сформульована мета дослідження, яка полягає а виведенні компактних формул для наближеного обчислення швидкості усталеного зернопотоку на поверхні циліндричного решета віброцентрифуги. В результаті проведених розрахунків досліджено вплив товщини рухомого шару та реологічних сталих на швидкість потоку зерноsumіші.

Ключові слова: *циліндричне решето віброцентрифуги, зернові суміші, швидкість руху, квадратична реологічна залежність, формула Сімпсона.*

Вступ. У ряді публікацій, зокрема в [1-4], починаючи з дослідів в [5] відзначено, що при великих швидкостях деформацій зсуву в математичній моделі руху суміші доцільно використовувати квадратичну залежність дотичного напруження в суміші від швидкості деформацій зсуву. Така залежність має дві реологічні константи, підбираючи значення яких можна досягти гарного узгодження теорії з еспериментом. Виходячи з цього, тут розглянемо наближені обчислення швидкості руху суміші в рамках квадратично-нелінійної моделі. Швидкість подається інтегралом, який не виражається в елементарних функціях і при обчисленні з високою точністю його доводиться знаходити числовими методами на комп'ютері.

Метою даною роботи є виведення наближених розрахункових формул, які дають можливість, без числового інтегрування, наближено

обчислювати вертикальну швидкість усталеного руху псевдозрідженої суміші в циліндричному віброрешеті.

Основна частина роботи. Щоб скласти нелінійне диференціальне рівняння руху, знайдемо залежність дотичного напруження τ в циліндричному шарі суміші від радіальної координати r . Для цього використаємо відомі формули [6,7]:

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}; \quad u = \frac{\rho g}{2\mu} \left(R_0^2 \ln \frac{r}{R} - \frac{r^2 - R^2}{2} \right), \quad (1)$$

де $u = u(r)$ — швидкість вертикального потоку суміші, коли $u(R) = 0$; $R_0 = R - h$ — радіус вільної поверхні суміші; R — радіус циліндричного віброрешета; h — товщина рухомого шару; ρ — питома маса суміші; g — прискорення вільного падіння; μ — реологічна стала, яку називають динамічним коефіцієнтом вібров'язкості.

Із (1) випливає, що:

$$\tau = \frac{\rho g}{2} \left(\frac{R_0^2}{r} - r \right), \quad (2)$$

тобто $\tau = 0$ при $r = R_0$.

Далі, замість записаної вище лінійної реологічної залежності (формули Ньютона), аналогічно [1-4], приймаємо:

$$\tau = \left(\mu + \mu_* \left| \frac{du}{dr} \right| \right) \frac{du}{dr}, \quad (3)$$

де μ і μ_* — реологічні сталі.

Тоді, підставивши (2) в (3), одержуємо нелінійне диференціальне рівняння руху:

$$\mu_* \left| \frac{du}{dr} \right| \frac{du}{dr} + \mu \frac{du}{dr} - \frac{\rho g}{2} \left(\frac{R_0^2}{r} - r \right) = 0. \quad (4)$$

При $\frac{du}{dr} < 0$ рівняння (4) має розв'язок:

$$u(r) = \int_r^R \sqrt{\frac{\mu^2}{4\mu_*^2} + \frac{\rho g}{2\mu_*} \left(x - \frac{R_0^2}{x} \right)} dx + \frac{\mu(r-R)}{2\mu_*}, \quad (5)$$

який задовольняє граничній умові $u(R) = 0$.

Інтеграл в (5) не виражається через елементарні функції. Тому при обчисленні $u(r)$ доводиться використовувати числові комп'ютерні методи інтегрування. Але, приймаючи до уваги, що в практиці сепарування $h \ll R$ можна запропонувати досить просте наближене інтегрування, яке зводиться до використання компактних аналітичних формул.

Так, застосовувавши для обчислень відому формулу Сімпсона [8], наближено одержуємо:

$$u(r) \approx \frac{R-r}{6} \left[\sqrt{\frac{\mu^2}{4\mu_*^2} + \frac{\rho g}{2\mu_*} \left(r - \frac{R_0^2}{r} \right)} + 4 \sqrt{\frac{\mu^2}{4\mu_*^2} + \frac{\rho g}{2\mu_*} \left(r_c - \frac{R_0^2}{r_c} \right)} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4\mu_*^2} + \frac{\rho g}{2\mu_*} \left(R - \frac{R_0^2}{R} \right)} \right] + \frac{\mu(r-R)}{2\mu_*}, \quad (6)$$

$$r_c = \frac{r+R}{2}.$$

При обчисленні максимальної швидкості потоку в (6) треба покласти $r = R_0$. Тоді:

$$u(R_0) \approx \frac{\mu h}{12\mu_*} \times \left[4 \sqrt{1 + \beta \left(R_0 + 0,5h - \frac{R_0^2}{R_0 - 0,5h} \right)} + \sqrt{1 + \beta \left(R - \frac{R_0^2}{R} \right)} - 5 \right], \quad (7)$$

де

$$\beta = \frac{2\rho g \mu_*}{\mu^2}.$$

Якщо $\mu_* \rightarrow 0$, то граничний перехід в (7) дає:

$$u(R_0) \approx \frac{\rho g h}{12\mu} \left[4 \left(R_0 + 0,5h - \frac{R_0^2}{R_0 - 0,5h} \right) + R - \frac{R_0^2}{R} \right]$$

Подальше спрощення в лінійній моделі можливе за умови, що $h \ll R$. Тоді:

$$u(R_0) \approx \frac{\rho g h^2}{2\mu}.$$

У цьому наближенні середня швидкість потоку $u_{cp} = \frac{2}{3} u(R_0)$.

Зазначемо, що раніше обчислення швидкості, з використанням формули Сімпсона, проводили в [7, 9], але там розглядали лінійні моделі руху.

Більш точні розрахункові формули можна одержати додатковим введенням апроксимації:

$$x - \frac{R_0^2}{x} \approx 2(x - R_0), \quad x \in [R_0; R]$$

для підкореневого виразу в (5). Після введення апроксимації інтеграл в (5) виражається через елементарні функції, а нев'язку від апроксимації можна наближено знайти по формулі Сімпсона. В такий спосіб одержуємо:

$$u(R_0) \approx \frac{\mu}{6\beta\mu_*} \left[(1 + 2\beta h)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] + \frac{\mu h}{12\mu_*} \left[4 \sqrt{1 + \beta \left(R_0 + 0,5h - \frac{R_0^2}{R_0 + 0,5h} \right)} + \sqrt{1 + \beta \left(R - \frac{R_0^2}{R} \right)} - \sqrt{1 + \beta h} - \sqrt{1 + 2\beta h} - 6 \right]. \quad (8)$$

Отже, наближений розрахунок максимальної швидкості потоку суміші зводиться до використання компактних формул. Середню швидкість потоку u_{cp} нескладно оцінити, прийнявши, як і в лінійній моделі, $u_{cp} = \frac{2}{3} u(R_0)$.

Далі проаналізуємо результати розрахунків, які приведено при $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $R = 0,3075 \text{ м}$ та різних h, μ, μ_* .

Результати обчислень $u(R_0)$ по формулі (7) записано в чисельники в табл. 1, а результати комп'ютерного інтегрування квадратури (5) — в знаменники цієї таблиці.

Як бачимо, зі збільшенням товщини рухомого шару зростають розбіжності наближених (чисельники) і точних (знаменники) значень, хоча похибки формули (7) залишаються малими.

Таблиця 1. Обчислені двома способами швидкості $u(R_0)$

μ , Па·с	$\frac{\mu_*}{\mu}$, с	h , м		
		0,008	0,012	0,016
		Значення $10 u(R)$, м/с		
0,4	0,01	$\frac{3,69}{3,71}$	$\frac{7,38}{7,44}$	$\frac{11,96}{12,09}$
		$\frac{2,17}{2,21}$	$\frac{4,16}{4,25}$	$\frac{6,55}{6,71}$
0,4	0,05	$\frac{1,65}{1,69}$	$\frac{3,11}{3,20}$	$\frac{4,87}{5,01}$
		$\frac{3,12}{3,14}$	$\frac{6,30}{6,34}$	$\frac{10,26}{10,36}$
0,5	0,01	$\frac{1,89}{1,92}$	$\frac{3,63}{3,71}$	$\frac{5,74}{5,87}$
		$\frac{1,44}{1,48}$	$\frac{2,74}{2,81}$	$\frac{4,29}{4,41}$
0,5	0,05	$\frac{2,72}{2,73}$	$\frac{5,52}{5,55}$	$\frac{9,02}{9,10}$
		$\frac{1,68}{1,71}$	$\frac{3,25}{3,31}$	$\frac{5,15}{5,26}$
0,6	0,01	$\frac{1,29}{1,32}$	$\frac{2,46}{2,52}$	$\frac{3,87}{3,97}$
		$\frac{2,41}{2,42}$	$\frac{4,92}{4,94}$	$\frac{8,08}{8,14}$
0,6	0,05	$\frac{1,52}{1,55}$	$\frac{2,95}{3,00}$	$\frac{4,69}{4,78}$
		$\frac{1,18}{1,20}$	$\frac{2,25}{2,30}$	$\frac{3,54}{3,63}$
0,7	0,01	$\frac{1,18}{1,20}$	$\frac{2,25}{2,30}$	$\frac{3,54}{3,63}$
		$\frac{1,18}{1,20}$	$\frac{2,25}{2,30}$	$\frac{3,54}{3,63}$

Про точність формули (8) надана інформація в табл. 2. Там в чисельники записано швидкості, обчислені по (8), а в знаменники – швидкості, одержані числовим інтегруванням.

Таблиця 2. Результати наближеного і точного обчислень $u(R_0)$

μ , Па·с	$\frac{\mu_*}{\mu}$, с	h , м		
		0,008	0,012	0,016
		Значення $10u(R)$, м/с		
0,8	0,01	$\frac{2,1737}{2,1737}$	$\frac{4,4668}{4,4673}$	$\frac{7,3749}{7,3756}$
		$\frac{1,4140}{1,4140}$	$\frac{2,7589}{2,7590}$	$\frac{4,4026}{4,4030}$
0,8	0,05	$\frac{1,1064}{1,1064}$	$\frac{2,1238}{2,1239}$	$\frac{3,3551}{3,3553}$

Тут максимальна похибка наближеної формули (8) не перевершує десятих долей відсотка.

Висновки.

1. Проведений аналіз показав, що поряд з числовим інтегруванням, обчислення швидкості руху суміші по решету можна з досить високою точністю приводити за допомогою вищевиведених розрахункових формул.

2. Величина швидкості суттєво залежать не тільки від товщини рухомого шару суміші, а також від значень реологічних сталих. Тому є можливість вибрати значення сталих такими, щоб теоретичні результати узгоджувались з експериментом.

Література

1. Savage S. The stress tensor in a granular flow of high shear rates. / S. Savage, D. Jeffrey // Journal Fluid Mech. – 1981. – V. 110. – pp. 255 - 272.

2. Долгуни В.Н. Быстрые гравитационные течения зернистых материалов.: техника измерения, закономерности, технологическое применение / В.Н. Долгуни, В.Я. Борщев. – М.: Машиностроение, 2005. – 73 с.

3. Шваб А.В. Модель движения высококонцентрированной гранулированной среды. / А.В. Шваб, М.С.Марценко // Вестник Томского государственного университета. – 2011. – №3(15). – С. 110 - 116.

4. Тищенко Л.Н. Способ повышения эффективности пневмосепарирования зерновых смесей в пневмосепарирующих устройствах. / Л.Н. Тищенко, С.А. Харченко, Ю.П. Борщ и др. // Вісник ХНТУСГ: Механізація сільськогосподарського виробництва. – 2014. – Вип. 148. – С. 150 - 158.

5. Bagnold R.A. Experiments on a gravity free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear. / R.A. Bagnold // Proc. Roy. Soc. London, 1954. – Vol. 225 A. – pp. 49 - 63.

6. Тищенко Л.М. Интенсификация сепарирования зерна / Л.Н. Тищенко – Харьков: Основа, 2004. – 224 с.

7. Тищенко Л.Н. Динамика виброцентробежной зерноочистки / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский и др. – Харків: Міськдрук, 2013. – 440 с.

8. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельников. – М.: Бином, 2001. – 630 с.

9. Ольшанский В.П. Приближенный расчет скорости потока зерна в цилиндрическом виброрешете / В.П. Ольшанский, С.И. Кучеренко, В.В. Бурлака и др. // Вісник ХНТУСГ: Механізація сільськогосподарського виробництва. – 2012. – Вип. 124, Т.1. – С. 163 - 169.

Анотація

**О приближенном вычислении скорости потока
зерновой смеси в цилиндрическом виброрешете**

В.П. Ольшанский, В.В. Бурлака, М.В. Слипченко, О.Н. Малец

Выведено нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее установившееся вертикальное движение слоя виброожиданной мелкозернистой смеси по внутренней поверхности цилиндрического решета виброцентрифуги, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. В основу уравнения положено нелинейную квадратично-полигональную зависимость касательного напряжения в смеси от скорости деформации сдвига. Предполагается, что реологические постоянные в этой зависимости параметрически связаны с физико-механическими характеристиками зерносмеси и характеристиками механических колебаний виброцентрифуги. Дополнительно к уравнению сформулировано краевое условие. Оно выражает отсутствие скольжения смеси по поверхности виброрешета. Получены аналитическое решение поставленной краевой задачи в виде квадратуры, не выражается через элементарные или затабулированные специальные функции. Поэтому для вычисления квадратуры (или скорости потока) предложено два приближенных способа, основанные на известной в интегральном исчислении формуле Симпсона. В первом способе названная формула непосредственно применяется для вычисления интеграла, а во втором дополнительно проводится предварительная аппроксимация подинтегральной функции, благодаря чему основная часть интеграла выражается отдельным слагаемым в аналитическом виде. Показано, что второй способ вычислений более точен, чем первый. Его погрешность не превышает десятых долей процента, установленного сравнением приближенных и точных результатов, полученных числовым компьютерным интегрированием. Эффективное использование формулы Симпсона возможно благодаря относительно малой толщине подвижного слоя зерносмеси.

Ключевые слова: цилиндрическое решето виброцентрифуги, зерновая смесь, скорость движения, квадратичная реологическая зависимость, формула Симпсона.

Abstract

**About speed approximate calculation of the grain mixture flow
in a cylindrical vibrosieve**

V.P. Olshansky, V.V. Burlaka, M.V. Slipchenko, O.M. Malec

Nonlinear first order differential equation describing the steady vertical movement of vibroliquefied layer of fine-grained mixture on the inner surface of the cylindrical sieve of vibrating centrifuge which rotating at a constant angular velocity around a vertical axis are deduced. Nonlinear quadratic-polygonal dependence of shear stress in a mixture from shear strain rate are laid in equations basis. It is assumed, that the rheological constant in this depending are parametrically associated with the physical and mechanical characteristics of the grain mixture and the characteristics of the mechanical vibrations of vibrating centrifuge. In addition to the equation a boundary conditions is formulated. It expresses the absent of slip of mixture on vibrosieve surface. Analytic solution of the boundary value problem in the form of squaring, that can not be expressed in terms of elementary or special tabulated functions are obtained. Therefore, to calculate of the integral (or flow velocity) two approximate methods based on well-known in the integral calculus Simpson's formula are suggested. In the first method, called formula is applied directly to the integral calculation, and in the second addition is carried out a preliminary approximation of the integrand, so the basic part of integral is expressed a separate summand in analytical form. It is shown that the second method is more accurate than the first. Its error does not exceed tenths of a percentage set by comparing the approximate and exact results obtained by numerical computer integration. Effective using of Simpson's formula is possible due to the relatively small thickness of the moving layer grain mixture.

In article provides a list of recent publications, where earlier in the continuum models of bulk material movement the quadratic rheological dependence were used. Formulated objective of the study, which is a derivation of a compact formula for approximate calculation of the velocity of a steady grain flows on the surface of the cylindrical sieve vibrating centrifuge. In a result of the calculations the effect of movable layer thickness and rheological constant to the grain mixture velocity are investigated.

Keywords: cylindrical sieve of vibrating centrifuge, grain mixture, speed of motion, rheological's quadratic dependence, Simpson's formula.

Представлено: Л.М. Тищенко / Presented by: L.M. Tishchenko

Рецензент: О.І. Завгородній / Reviewer: O.I. Zavgorodnij

Подано до редакції / Received: 24.06.15