ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ІНЖЕНЕРІЇ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

УДК 51.681.3

С.Л. Кривой
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка

АЛГЕБРА ГРАФОВ И НЕКОТОРЫЕ ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Описывается алгебра графов и доказываются некоторые свойства её операций. Рассматривается приложения этой алгебры к анализу топологий компьютерных сетей, ориентированных на устойчивость к повреждениям.

Описується алгебра графів і доводяться деякі властивості її операцій. Розглядається додатки цієї алгебри до аналізу топологій комп'ютерних мереж, орієнтованих на стійкість до пошкоджень.

Describes the algebra of graphs and prove some properties of its operations. Is considered that the application of algebra to the analysis of computer network topologies, are oriented to the resistance to damage.

Ключевые слова: алгебра графов, топология компьютерніх сетей.

Введение

Данная работа является продолжением исследований начатых в работах [1, 2, 4]. В ней предлагается универсальная алгебра графов, описываются свойства основных и неосновных (производных) операций. Предлагаемая алгебра применяется к решению задачи проектирования топологии компьютерной сети (КС) и исследования свойств этой топологии с точки зрения устойчивости к повреждениям линий связи и компьютеров. При этом КС моделируется в виде неориентированного графа, вершины которого соответствуют компьютерам, а ребра - линиям связи между компьютерами. Выбор той или иной топологии КС связан с определением степени устойчивости этой топологии в случае повреждения линий связи или компьютеров в КС. Правильно спроектированная топология должна представляться связным неориентированным графом, а степень связности этого графа может служить мерой устойчивости КС к повреждениям.

1 Графы и алгебра графов

1.1 Необходимые понятия и определения

Зафиксируем некоторое множество U, которое будем называть универсальным. Вершины всех рассматриваемых в этой работе графов выбираются из этого множества.

Неориентированным графом называется пара $G=(V,E)$, где $V \subseteq U$ – множество вершин графа, E – множество ребер, **состоящее** из неупорядоченных пар элементов из V (т.е. пары (u,v) и (v,u) считаются одинаковыми). Множество всех неупорядоченных пар элементов произвольного множества X **будем** обозначать $X^{(2)}$. Граф G называется конечным, если конечно множество его вершин V. Если $(u,v)\in E$, то вершины u,v называются смежными и являются концами этого ребра. Ребро $e\in E$ называется инцидентным вершине $u\in V$, если эта вершина является концом ребра e. Степенью вершины $u\in V$ называется число ребер, инцидентных этой вершине. Степень вершины u будем обозначать $n(u)$. Если степень вершины равна нулю, то такая вершина называется изолированной, а если степень вершины равна единице, то такая вершина называется концевой или висячей.

Далее в этой работе под графом будет пониматься конечный неориентированный граф.

Пусть $G=(V,E)$ граф и $u,v\in V$ – две вершины этого графа. Говорят, что вершины u и v связаны между собой маршрутом в графе, если существует последовательность вершин $u_1,u_2,...,u_k$ графа G такая, что $u=u_1, v=u_k$ и для всех $i=1,2,...,k-1$ имеет место $(u_i,u_{i+1})\in E$. Число $k-1$ называется длиной этого маршрута. Маршрут, первая и последняя вершины которого совпадают, называется циклом. Граф, у которого нет ни одного цикла, называется ациклическим.

***Определение* 1**. *Граф $G=(V,E)$ называется связным, если любые две вершины, этого графа связаны, между собой маршрутом. Связный ациклический граф называется деревом.*

Вершина дерева называется внутренней, если степень этой вершины больше единицы (в противном случае вершина будет конечной).

Если между вершинами u и v существует маршрут длины $k-1$, то, в частности, при $k=1$ длина маршрута равна 0. Это значит, что $u=u_1=u_k=v$, т. е. из вершины u в вершину v существует маршрут длины 0. Из этого замечания следует, что отношение R означающее "связаны маршрутом между собой" является рефлексивным, а поскольку граф неориентированный, то это отношение симметрично и, очевидно, транзитивно. Следовательно, оно является отношением эквивалентности и существует фактор множество $V/R=\{V_1,V_2,...,V_m\}$, где V_i – классы эквивалентности этого отношения такие, что $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j, i,j=1,2,...,m.$

Из этого простого замечания вытекает такое утверждение.

Теорема 1. Граф $G=(V,E)$ связный тогда и только тогда, когда $V/R=\{V\}$, где R – описанное выше отношение эквивалентности.

Доказательство следует непосредственно из определений и свойств отношения R.

Из этой теоремы получаем простой и эффективный алгоритм проверки связности графа $G=(V,E)$. Действительно, для этого нужно с произвольно выбранной вершины $u \in V$ осуществить обход вершин графа G, в процессе которого метятся пройденные вершины. Если по окончании обхода вершин графа хотя бы одна вершина осталась непомеченной, то граф несвязный, в противном случае – связный. Очевидно, что для этой цели подходит алгоритм поиска в глубину (depth first search – DFS). Алгоритм поиска в глубину описан в многочисленных монографиях (см. например, [4]) и здесь не приводится.

Алгоритм поиска в глубину является важным при проверке связности графа и его роль особенно возрастает, если над связным графом или над связными графами выполняются операции. Некоторые из этих операций в процессе применения могут приводить к несвязным графам и тогда необходимо проверять результат их выполнения на связность.

1.2 Некоторые разновидности графов

Пусть даны графы $G=(V,E)$ и $H=(V_1,E_1)$. Графы G и H называются **изоморфными**, если между их вершинами существует взаимно однозначное соответствие $f:V \to V_1$ такое, что когда $(i,j) \in E$, то $(f(i),f(j)) \in E_1$, где $i,j \in V, f(i),f(j) \in V_1$. В частности, если отображение f тождественно, то графы G и H называются равными. Очевидно, что отношение изоморфизма графов является отношением эквивалентности. Поэтому когда графы изоморфны (обозначение $G-H$), то они не различаются между собой и называются равными или эквивалентными с точностью до изоморфизма.

Специальные виды графов. Граф $G=(V,E)$ называется абсолютно пустым или пустым графом нулевого порядка, если $V=\varnothing$ и $E=\varnothing$. Этот граф обозначается Λ.

Граф $G=(V,E)$ называется пустым графом первого порядка, если $V=\{1\}$ и $E=\varnothing$. Это граф обозначается G_0^0.

Граф $G=(V,E)$ называется полным графом, если любые две его вершины смежны. Полный граф n-го порядка обозначается G^n.

Граф $G=(V,E)$ называется регулярным (или однородным) графом степени k, если все его вершины имеют степень равную k).

Граф $G=(V,E)$ называется подграфом графа $H=(V_1,E_1)$, если $V \subseteq V_1$ и $E \subseteq E_1$.

Граф $G=(V,E)$ называется остовным подграфом графа $H=(V_1,E_1)$, если $V \subseteq V_1$ и $E \subseteq E_1$.

Граф $I=(U,E=U^{(2)})$ называется универсальным графом.

1.3 Основные операции на графах и алгебра графов

Определим сначала операции алгебры графов, а потом определим и саму алгебру. Заметим, что операций на графах существует много и появляются все новые и новые операции, которые необходимы при решении конкретных задач. Однако, существуют операции, которые уже стали общепринятыми.

Пусть дан граф $G=(V,E)$, где $V \subseteq U$ (напомним, что U – универсум, над которым рассматриваются графы).

Операция удаления ребра в графе. Операция удаления ребра $e=(u,v)$ в графе $G=(V,E)$ дает в результате граф $G-e=(V,E\setminus\{u,v\})$. Таким образом, концы ребра e не удаляются из множества V.

Следовательно, если выполняется несколько операций удаления ребра, то результат не зависит от порядка, в котором эти ребра удаляются из графа.

Операция удаления вершины. Пусть $G=(V,E)$ – граф и $v \in V$. Говорят, что граф $G_1=G-v$, получен из графа G в результате выполнения операции удаления вершины v, если вершина v удаляется из V, а из E удаляются все ребра, инцидентные этой вершине.

Как и для предыдущей операции, нетрудно убедиться в том, что операция удаления вершины не зависит от порядка, в котором удаляются вершины из графа.

Операции удаления ребра и вершины – это операции, с помощью которых можно из исходного графа получить его подграфы. Нижеприведенные операции позволяют строить из исходных графов новые графы с большим числом вершин и ребер.

Операция введения вершины. Если $u \notin V$ в графе $G=(V,E)$, то определим граф $G+u=(V\cup\{u\},E)$, о котором говорят, что он получен в результате выполнения операции введения вершины.

В силу коммутативности операции объединения множеств, можно утверждать, что по.

Операция введения ребра. Если $u,v \in V$ и $(u,v)\notin E$ в графе $G=(V,E)$, то определим граф $G+e=(V,E\cup\{e\})$, где $e=\{u,v\}$, о котором говорят, что он получен в результате операции введения ребра.

В силу коммутативности операции объединения множеств выполнение последовательности операций введения ребер в граф G не зависит от порядка, в котором эти ребра вводятся в граф G, т. е. имеет место тождество:

$$(\forall e,e_1 \in E)((G+e)+e_1=(G+e_1)+e)$$

Теперь дадим определение алгебры графов.

Определение 2. Пара $A=(D,\Omega)$ называется универсальной алгеброй графов над универсумом U, если D – множество графов над U, а сигнатура Ω включает нульарную операцию Λ, бинарные операции введения вершины, введения ребра, удаления вершины и удаления ребра.

1.4 Другие операции на графах и их свойства

Как было сказано выше, на графах, кроме перечисленных, имеется еще целое множество операций. Рассмотрим кратко эти операции и их связь с введенной алгеброй графов.

Операция введения вершины в ребро. Пусть (u,v) – некоторое ребро графа G. Введением вершины w в ребро (u,v) называется операция, в результате которой получаем два ребра вида (u,w) и (w,v), а ребро (u,v) удаляется из графа G. Эта операция очевидным образом выражается через операции алгебры графов с помощью операций удаления ребра, введения вершины и введения ребер:

$$G_1=((G-\{(u,v)\})\cup\{w\})+\{(u,w),(w,v)\}.$$

Операция объединения графов. Пусть дано графы $G=(V,E)$ и $H=(V_1,E_1)$, где $V,V_1 \subseteq U$.

Объединением графов называется граф $F=(V\cup V_1,E\cup E_1)$. Из определения этой операции очевидным образом вытекают такие тождества: $\forall G,H,H_1$

$$G\cup\Lambda=G, G\cup G=G, G\cup H=H\cup G,$$

$$G\cup(H\cup H_1)=(G\cup H)\cup H_1, G\cup I=I,$$

где $I=(U,E=U^{(2)})$ – универсальный граф. Для представления этой операции в алгебре графов необходимы вспомогательные операции $isemp(X)$ и $memb(x,X)$(где X – множество):

$$isemp(X)=\begin{cases}1, & если \quad X=\varnothing,\\ 0, & если \quad X\neq\varnothing,\\ error, & иначе.\end{cases}$$

Представление операции объединения в алгебре графов выполняется в два этапа. Рассмотрим сначала частный случай этой операции, а именно, когда её второй аргумент является пустым графом n-го порядка. Обозначим эту операцию $plusG$ и пусть $G=(V,E)$, $G_1=(V_1,\varnothing)$, тогда

$$plusG=\begin{cases} G, если \quad isemp(V_1),\\ plusG(G+i,G_1-i), если \quad \neg memb(i,V),\\ plusG(G,G_1-i), если \quad memb(i,V),\\ error, иначе.\end{cases}$$

Теперь операция объединения графов общего вида G и G_1 принимает вид:

$$unG(G,G_1)=\begin{cases} plusG(G,G_1),\\ unG(G+i+j+(i,j),G_1-(i,j)),\\ unG(G+i+(i,j),G_1-(i,j)),\\ unG(G+j+(i,j),G_1-(i,j)),\\ unG(G+(i,j),G_1-(i,j)),\\ error,\end{cases}$$

Пересечение графов называется граф $F=(V\cap V_1, E\cap E_1)$. Из определения этой операции очевидным образом вытекают такие тождества: $\forall G,H,H_1$

$G\cap\Lambda=\Lambda, G\cap G=G, G\cap H=H\cap G$,

$G\cap(H\cap H_1)=(G\cap H)\cap H_1, G\cap I=I$

где $I=(U,E=U^{(2)})$ – универсальный граф. Очевидно также, что когда $V\cap V_1=\varnothing$, то $G\cap H=\Lambda$.

Выражение операции пересечения графов G и G_1 в алгебре графов имеет вид.

Если один из графов $G=(V,E)$ или $G_1=(V_1,E_1)$ – пустой, то

$$intGE(G,G_1)=\begin{cases} \Lambda,\\ intGE(G-i,G_1)+i,\\ intGE(G-i,G_1),\\ error,\end{cases},$$

А если графы непустые, то

$$intG(G,G_1)=\begin{cases} intGE(G,G_1)+i,\\ intGE(G-(i,j),G_1)+(i,j),\\ intGE(G-(i,j),G_1),\\ error,\end{cases}$$

Основное свойство операций объединения и пересечения дает

Теорема 2*. Множество D всех графов над множеством U относительно операций объединения и пересечения образуют дистрибутивную решетку с нулем и единицей.*

Доказательства требуют только законы поглощения и дистрибутивности. Но из определения операций пересечения и объединения вытекает, что это доказательство сводится к проверке законов дистрибутивности для соответствующих множеств. Но тогда справедливость следует из общих законов для теоретико-множественных операций.

Нулем этой решетки будет абсолютно пустой граф Λ, а единицей - универсальный граф I. ■

Поскольку носитель решетки является частично упорядоченным множеством, то на множестве D всех графов над U можно ввести отношение частичного порядка:

$$G\le H \Leftrightarrow G\cap H=G.$$

Но это равенство означает, что граф G является подграфом графа H. Таким образом, частичный порядок $\le$ для графов означает теоретико-множественное включение $\subseteq$ для графов.

Дополнением графа $G=(V,E)$ называется граф $\overline{G}=(V,V^{(2)}\setminus E)$. Из этого определения следует, что дополнение полного графа $G=(V,E)$ n-го порядка будет пустой граф $G_n^0=(V,\varnothing)$ n-го порядка и наоборот. Дополнен нем графа Λ будет сам граф Λ, а дополнением универсального графа будет пустой граф $|U|$-го порядка.

Выражение этой операции в алгебре графов для графа $G=(V,E)$ имеет вид ($G^C=(V,E^C)$ – полный граф того же порядка, что и граф G):

$$compG(G,G^C)=\begin{cases} G^C,\\ compG(G-(i,j),G^C-(i,j)),\\ error,\end{cases}$$

Непосредственно из определения операции дополнения графа следуют такие её свойства.

Теорема 3. *Пусть G – граф n-го порядка. Дополнение*

а)регулярного графа – регулярный граф;

б) графа $\overline{G}$ совпадает с графом G;

в) графа G будет несвязным графом, если в G существует хотя бы одна вершина степени 2(n-1)..

Разницей двох графов $G=(V,E)$ и $H=(V_1,E_1)$ называется граф $F=G\cap\overline{H}$, где

$\overline{H}$ – дополнение графа *H*.

Очевидно, что когда $G=(V,E)$ – граф *n-го* порядка, то

$G\cup\overline{G}$ – полный граф граф *n-го* порядка,

$G\cap\Lambda=\Lambda, G\cup\Lambda=G, \overline{\overline{G}}=G, G\subseteq H\Leftrightarrow\overline{H}\subseteq\overline{G}$

Из этих свойств вытекает такая

Теорема 4. *Множество всех остовных подграфов универсального графа, $I=(U,U^{(2)})$ относительно операций объединения, пересечения и дополнения является булевой решеткой.*

Доказательство. Справедливость законов булевой решетки следует из теоремы 2. Нулем решетки G_U^0 служит пустой граф $|U|$-го порядка., а единицей – универсальный граф I, поскольку

$$G\cap\overline{G}=G_U^0, G\cup\overline{G}=I \blacksquare$$

Описание остальных операций на графах и их представление в алгебре графов можно найти в монографии [*6*]. А здесь остановимся на операции декартового произведения графов.

Декартовым произведением графов $G=(V,E)$ и $H=(V_1,E_1)$ называется граф $F=(V\times V_1,E')$, где E' определяется таким образом:

$(i,j),(k,m)\in E'\Leftrightarrow i=k$ и $(j,m)\in E_1$ или $j=m$ и $(i,k)\in E$.

Непосредственно из определения этой операции следуют такие свойства.

Теорема 5. *Для произвольных графов $G=(V,E)$, $H=(V_1,E_1)$ и $Q=(V_2,E_2)$ имеют, место тождества:*

$G\times H=H\times G$ *(коммутативность)*

$(G\times H)\times Q=G\times(H\times Q)$*(ассоциативность)*

$G\times G_0^0=G_0^0\times G$ *(G_0^0 единица);*

$G\times(H\cup Q)=(G\times H)\cup(G\times Q)$*;*

$G\times(H\cap Q)=(G\times H)\cap(G\times Q)$*(дистрибутивность).*

Следовательно, множество D всех графов над множеством U относительно операции декартового произведения является абелевой полугруппой с единицей.

Доказательство. Первые три закона очевидны. Докажем справедливость закона дистрибутивности относительно операции пересечения.

$$G\times(H\cap Q)=G\times(V_1\cap V_2,E_1\cap E_2)=$$
$$=(V\times(V_1\cap V_2),E')=((V\times V_1)\cap(V\times V_2),E'),$$

где

$$E'=\{((x,y),(x_1,y_1))\,|\,(x=x_1\wedge(y,y_1)\in E_1\cap E_2)\vee$$
$$\vee((y=y_1)\wedge(x,x_1)\in E)\}=\{((x,y),(x_1,y_1))\,|$$
$$((x=x_1\wedge(y,y_1)\in E_1)\vee((y=y_1)\wedge(x,x_1)\in E))\wedge$$
$$\wedge((x=x_1\wedge(y,y_1)\in E_2)\vee(y=y_1)\wedge(x,x_1)\in E))\}=$$
$$=E_1'\cap E_2'.$$

где E_1',E_2' – множества ребер графов $G\times H$ и $G\times Q$ соответственно.

Следовательно,

$$G\times(H\cap Q)=((V\times V_1)\cap(V\times V_2),E_1'\cap E_2')=$$
$$=(G\times H)\cap(G\times Q)$$

Кроме указанных выше свойств операции декартового произведения графов существуют и другие полезных свойства. Имеет место

Теорема 6. *а) Если вершина u имеет степень n(u) в графе G, а v имеет степень $n(v)$ в графе G_1, то вершина (u,v) в граф $G\times G_1$ будет иметь степень $n(u)+n(v)$. В частности, если G, G_1 регулярные графы степеней k и k_1 соответственно, то граф $G\times G_1$ регулярный граф степени $k+k_1$.*

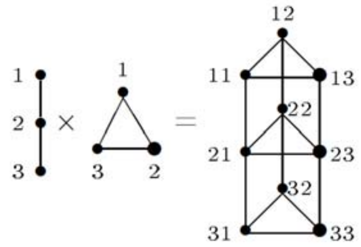
б) Если $G=G_1\times G_2$, где m,n – число вершин в графах G_1 и G_2 соответственно, то когда один из графов имеет, гамильтонов путь, а второй – гамильтонов цикл, то граф G будет гамильтоновым. В частности, если одно из чисел m или n четное, то если оба

Докажем только пункт *а)*. Пусть $u_1,u_2,...,u_{n(u)}$ – вершины, смежные с вершиной u в графе G_1, а $u_1,u_2,...,u_{n(u)}$ – вершины, смежные с вершиной v в графе G_2. Тогда, в соответствии с определением декартового произведения, вершина (u,v) в графе $G=G_1\times G_2$ будет смежной с вершинами $(u,v_1),(u,v_2),...,(u,v_{n(u)}),(u_1,v),(u_2,v),...,(u_{n(u)},v)$ и ни с какими другими вершинами. Очевидно, что степень вершины (u,v) равна $n(u)+n(v)$.

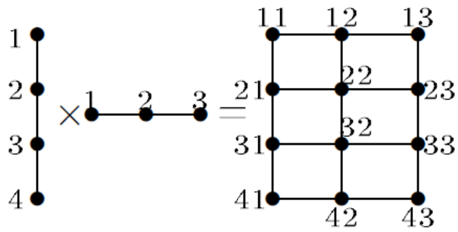
Доказательство пункта б) оставляем читателю.■

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие эту теорему.

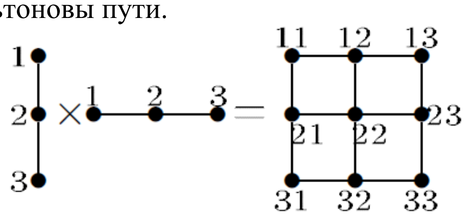
Пример, а) В графе, полученном в результате применения операции декартового произведения существует гамильтонов цикл 11,12,13,23,22,32,33,31,21,11.



б) в полученом графе гамильтонов цикл имеет вид 11, 12, 13, 23, 22, 32, 33, 43, 42, 41, 31, 21, 11.



в) в полученом графе гамильтонового цыкла нет, хотя графы-аргументы имеют гамильтоновы пути.



С операцией декартового произведения связана обратная задача, которую называют декомпозицией графов.

Пусть $G=(V,E)$ – граф *n*-го порядка. Задача декомпозиции графа G состоит в построении графов $G_1,G_2,...,G_k$ таких, что
$G=G_1\times G_2\times ...\times G_t$.

Графы $G_i, i=1,2,...,t$ называются **множителями**, а представление графа G в виде (1) называется **разложение графа** G. Не каждый граф может иметь разложение на множители. Если порядок графа является простым числом, то такой граф, очевидно, не разложим.

Граф G называется простым графом, если из того, что $G=G_1\times G_2$ вытекает $G_1=G_0^0$ или $G_1=G_0^0$. Множество графов $\{G_1,G_2,...,G_k\}$ называется **оптимальной факторизацией** или **оптимальным разложением** графа G, если в разложение (1) все графы G_i простые и $G_i\neq G_0^0, i=1,2,...,t$.

Сабидусси показал, что произвольный конечный связный граф с точностью до изоморфизма имеет единственное оптимальное разложение [7], а В. Имрих и И. Петерин построили эфективный (линейный) алгоритм, который находит оптимальное разложение [8].

Оценка степени связности графа

1.2. Степень связности графа

Рассмотрим вопрос о том, сколько ребер можно удалить из связного графа $G=(V,E)$ так, чтобы после выполнения этих операций полученный граф оставался связным. Введем такое определение.

Определение 3. Степенью связности связного графа, называется максимальное число d его ребер, удаление которых из графа не выводит, из класса, связных графов, а, удаление $d+1$-го ребра приводит, к несвязному графу.

Известно, что граф, полученный в результате применения операции удаление ребра в связном графе, будет связным, если это ребро принадлежит некоторому циклу этого графа. В качестве следствия из этого факта получаем такое утверждение.

***Теорема** 7. Степень d связности связного графа $G=(V,E)$ равна, его цикломатическому числу $|E|+|V|+1$.*

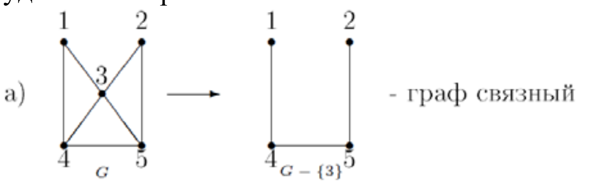
Доказательство следует из того, что связный граф остается связным, если из него удалить не более $|E|+|V|+1$ ребер. Удаление такого числа ребер приводит к остовному дереву графа G.

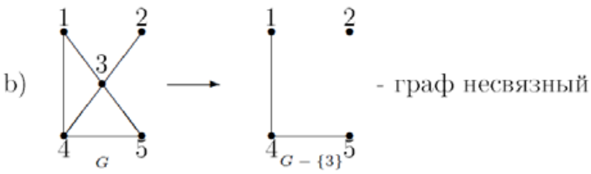
Следствие 1. Число возможных операций удаления ребра в связном графе $G=(V,E)$, не выводящих результат из класса связных графов, равна цикломатическому числу этого графа $d=|E|+|V|+1$.

Непосредственно из предыдущей теоремы получаем справедливость такого утверждения.

***Теорема** 8. Граф, полученный в результате применения операции удаление вершины, в связном графе, будет связным, если все ребра, инцидентные этой вершине, принадлежат некоторым циклам этого графа или эта вершина является концевой.*

Пример 1. Рассмотрим граф G, из которого удаляется вершина 3:





В случае а) все ребра вершины 3, т. е. ребра (1,3), (2,3), (4,3), (5,3) принадлежат циклам (1,3,4), (2,3,5), (4,3,5), (5,3,2), (5,3,4).

В случае б) ребро (3,2) не принадлежит ни одному циклу в этом графе.

В качестве следствия из предыдущей теоремы вытекает такие простые соотношения:

а) Если $n(u)=1$, то степени связности графо G и $G-u$ – равны, где u – вершина графа G.

b) Степень связности графа, полученного после применения m операций удаления вершины в связном графе $G=(V,E)$, равна

$$d' = d-(k_1-1)-\ldots-(k_m-1),$$

где d – степень связности графа G, k_i – степень вершины u_i, которая удаляется из графа, $i=1,2,\ldots,m.$

1.3. Проектирование топологии и проблема декомпозиции

Выясним в каком виде должен быть представлен результирующий граф, спроектированный с использованием операции декартового произведения, для того чтобы решение задачи декомпозиции было по возможности простым. Ответ на этот вопрос вытекает из определения самой операции декартового произведения.

Не ограничивая общности, будем рассматривать декартовое произведение двух графов и представлять вершины построенного графа $G=G_1\times G_2$ в виде пары (i,j), где i,j – номера вершин u_i и v_j графов G_1 и G_2, соответственно. Введем отношение R на множестве вершин:

$$(i,j)R(i',j') \Leftrightarrow j=j'.$$

Очевидно, что отношение R будет отношением эквивалентности. Рассмотрим граф, обозначаемый далее через G/R и построенный следующим образом: пусть $V_1,\ldots,V_k$ – классы эквивалентности множества вершпн графа $G=(V,E)$ по отношению R, тогда

а) стянем все вершины в каждом классе эквивалентности $V_i, i=1,2,\ldots,k$, в одну вершину, применяя операцию отождествления вершин;

б) множества V_i, стянутые в одну вершину, принимаются за множество вершин графа G/R;

в) две вершины V_i и V_j в графе G/R смежны тогда и только тогда, когда каждая вершина из класса V_i смежна с соответствующей вершиной из класса $V_j, i,j=1,2,\ldots,k.$

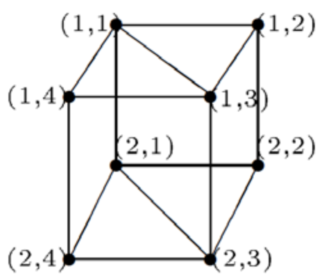
***ТЕОРЕМА* 9.** Граф G/R *изоморфен графу* G_2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку каждая копия графа G_1, участвующего в произведении $G=G_1\times G_2$, стягивается в в вершину, то между вершинами графов G_2 и G/R устанавливается взаимно-однозначное соответствие $\varphi(v_s)=V_s$, $s=1,2,\ldots,|V^1|$, где V^1 – множество G/R.

Покажем, что отображение φ сохраняет отношение смежности. Если V_i и V_j смежны в графе G/R, то это согласно определения декартового произведения возможно только тогда, когда вершины u_i и v_j смежны в G_2. Обратное утверждение очевидно. Следовательно G_2 и G/R изоморфны.

Заметим, что если отношение R определяется равенством $i=i'$, то в силу коммутативности операции декартового произведения графов, граф G/R изоморфен графу G_1.

Пример 3. Пусть имеем граф вида

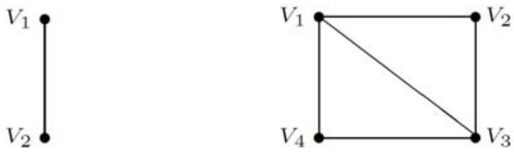


Если отношение R имеет вид

$$(i,j)R(i',j') \Leftrightarrow i = i',$$

то граф G/R имеет вид (граф показан слева на нижеприведенном рисунке):

$$G/R = (V_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3)\},$$
$$V_2 = \{(2,1),(2,2),(2,3)\}, E = \{(V_1,V_2)\})$$



Если отношение R имеет вид

$$(i,j)R(i',j') \Leftrightarrow j = j',$$

то граф G/R имеет вид (граф справа на вышеприведенном рисунке):

$$G/R = (V_1 = \{(1,1),(2,1)\}, V_2 = \{(1,2),(2,2)\},$$
$$V_3 = \{(1,3),(2,3)\}, V_4 = \{(1,4),(2,4)\},$$
$$E = \{(V_1,V_2),(V_1,V_3),(V_1,V_4),(V_2,V_3),(V_3,V_4)\})$$

Из приведенного решения задачи декомпозиции вытекает, что при проектировании топологии графа с помощью операции декартового произведения необходимо сохранять информацию о вершинах в виде соответствующих кортежей вершин графов, участвующих в этом произведении.

Заметим, что из того, что число m вершин в графе $G = G_1 \times G_2$, где G_1 и G_2 имеют n и k вершин соответственно, связано соотношением $m = n \cdot k$, то отсюда получаем такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2. а) Если число m простое, то граф G неразложим в декартовое произведение своих подграфов; б) Если $G = G_1 \times G_2$, то в нем имеется n изоморфных между собой n изоморфных графу G_2 подграфов и k изоморфных между собой и изоморфных графу G_1 подграфов.

Применим описанную алгебру к исследованию различных топологий КС и охарактеризуем эти топологии.

2. Характеристики различных топологий КС

Рассмотрим некоторые часто используемые графы при выборе топологии КС (см. [3]) и охарактеризуем эти топологии с точки зрения определенной выше алгебры AG. Для этого введем еще одно понятие, которое будет использоваться при анализе топологий КС.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Вершина связного графа называется точкой сочленения, если удаление этой вершины, из графа, приводит, к несвязному графу.*

Очевидно, что в дереве любая внутренняя вершина является точкой сочленения. Из этого определения очевидным образом следует, что некоторая вершина будет точкой сочленения, если она смежна с концевой вершиной.

1) *Одноканальная магистраль (дерево).* Для представления КС с этой топологией саму магистраль будем рассматривать как компьютер, т. е. изображать вершиной графа. Тогда граф, лежащий в основе этой топологии имеет вид дерева, показанного ниже на рисунке 1, где $s_1, s_2, \ldots, s_r$ – серверы, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – компьютеры, M – магистраль.

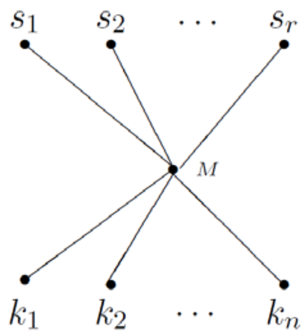


Рис. 1

Данный граф является деревом и имеет одну внутреннюю вершину (магистраль) степени $n(M) = r + n$ и $r + n$ концевых вершин. Как видно из рисунка, важным свойством данной топологии является то, что она устойчива относительно удаления любого числа конечных вершин и неустойчива относительно удаления внутренней вершины (магистрали) и удаления хотя бы одного ребра. Следовательно, при использовании этой топологии необходимо использовать надежные линии связи и надежную магистраль.

2) *Многоканальная магистраль (трехдольный граф).* Усовершенствованием одноканальной магистрали в смысле повышения надежности КС, является многоканальная магистраль. Граф, лежащий в основе этой топологии, является трехдольным графом (см. рисунок 2), где $s_1, s_2, \ldots, s_r$ – серверы, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – компьютеры, $M_1, \ldots, M_m$ – магистрали.

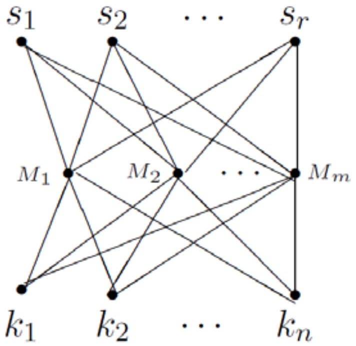


Рис. 2

Степень связности данного графа равна
$d = |E| - |V| + 1 = rm + nm - r - n - m + 1 =$
$= (r + n - 1)(m - 1).$

Если данную топологию сравнивать с предыдущей (в предыдущей топологии $m = 1$ и $d = 0$), то степень надежности данной КС увеличивается в $m - 1$ раз. Как видно из приведенного рисунка, выход со строя любых $m - 1$ магистралей оставляет КС живой (в этом случае КС редуцируется к одноканальной магистрали). Аналогичное утверждение справедливо и для ребер.

3) *Куб.* Граф, лежащий в основе этой топологии, является шестигранником (см. Рисунок 3).

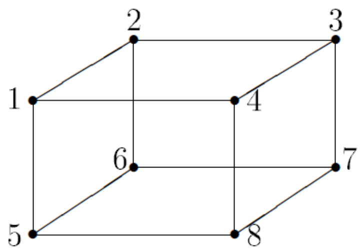


Рис. 3

Степень связности для этого графа равна $d = 12 - 8 + 1 = 5$. Данная топология устойчива к удалению любых двух вершин и любых двух ребер.

Заметим, что в данном графе можно удалить все вершины, принадлежащие одной грани, и результирующий граф будет связным.

4) Гипершестигранник. Граф, лежащий в основе этой топологии, является гипершестигранником (см. рисунок 4).

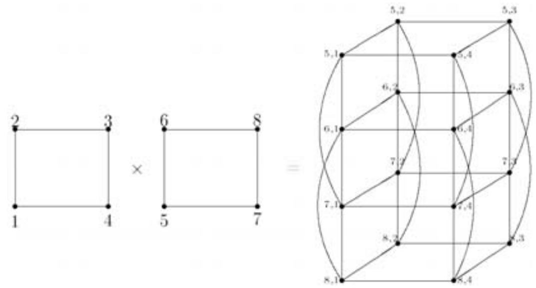


Рис. 4

Из вида этого графа получаем, что в нем допустимо удаление любых двух смежных вершин. А отсюда получаем, что удаление любых двух граней (т. е. вершин этих граней) и любых двух ребер не нарушает связности гипершестигранника.

Максимальное число ребер, которые можно удалить из этого графа равно $d = |E| - |V| + 1 = 32 - 16 + 1 = 21$. Из этой оценки следует, что этот граф гораздо более устойчив по отношению к операции удаления ребра, чем шестигранник.

5) Решетка. В основе этой топологии лежит n-мерная решетка (см. рисунок 5, двумерность решетки взята для простоты).

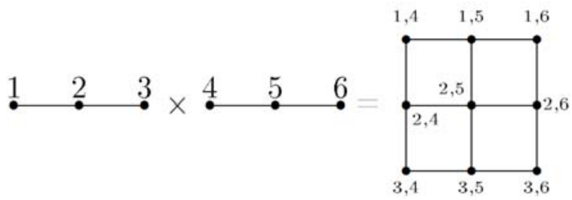


Рис. 5

Из этого графа видно, что в нём допустимо удаление любой вершины.

3. Заключение

Представленная в данной работе алгебра графов применялась при исследовании свойств различных топологий в процессе проектирования компьютерной сети. Основное преимущество такого подхода состоит в том, что представление топологии сети в виде алгебраического выражения позволяет определить какие элементы должны учавствовать в построении сети, структура этих элементов и устойчивость сети к неисправностям в случае выхода из строя составляющих ее элементов.

Список использованых источников

[1] Hajder M., Dymora P. Algorithmical and topological methods of fault tolerace assurance. Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Sklodowskiej. - Annales Informatica, Kazimierz Dolny 2004 - 143-153.
[2] Krivoi S., Hajder M., Dymora P., Mazurek M. The matrix method of determining the fault tolerance degree of a computer network topology *KDS-2005. - Boolgaria. - Varna.* -2005. -P. 412 - 419.
[3] Hajder M., Loutskij G., Streciwilk W. Informatyka. Rzeszow: WsIZ. - 2002. - 714 s. (на польском языке)
[4] Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов *М: Мир. - 1979. - 535 с.*
[5] Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. Москва: Мир. - 1984. - 454 с.
[6] Сергієнко І. В, Кривий С. Л., Провотар О. І. Алгебраїчні аспекти інформаційних технологій (ч. 1). Київ: Наукова думка. - 2011. - 400 с.
[7] *Sabidussi G.* Graph multiplication. // Mathem. Z. - 1960. - 72. - P. 446-457.
[8] *Imrich* II. *Peterin I.* Recognizing Cartesian product in linear time. // Comput. complexity.
- 2005. - 2. - P. 1 - 19.

Сведения об авторе

Кривий Сергій Лук'янович – д. ф.-м. наук, професор кафедри інформаційних систем Національного університету ім. Т.Шевченко.
E-mail: krivoi@i.com.ua