

УДК 621.396.9

О. В. Збруцький, Г. Є. Янкелевич

## ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ КОРИСТУВАЧА В СУПУТНИКОВИХ НАВІГАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

### Вступ

В супутникових навігаційних системах (СНС) координати користувача, супутників та різниці між годинниками супутника та користувача пов'язані між собою системою рівнянь псевдо-відстаней між супутниками та користувачем [1]:

$$P_i = \sqrt{(x_{ci} - x_k)^2 + (y_{ci} - y_k)^2 + (z_{ci} - z_k)^2} + c \cdot \Delta t, \quad (1)$$

де  $P_i$  – псевдо-відстань між кожним з чотирьох супутників  $i = 1, 2, \dots, 4$  та користувачем,

$x_{ci}, y_{ci}, z_{ci}$  – координати супутників,

$x_k, y_k, z_k$  – координати користувача,

$\Delta t$  – різниця між годинниками супутника та користувача,

$c$  – швидкість світла.

Зазначені рівняння є нелінійними, тому обчислювати координати користувача, різницю між годинниками супутника та користувача по відомим значенням координат супутників та псевдо-відстаней за допомогою цих рівнянь не зручно. Для обчислення координат  $x_k, y_k, z_k$  та різниці  $\Delta t$  в СНС використовують лінеаризовані шляхом розкладання в ряд Тейлора та відкидання членів другого порядку малості рівняння (1). Система лінеаризованих рівнянь має вигляд

$$P_{ij} = R_{Tij} + \frac{x_{kj} - x_{ci}}{R_{Tij}} \Delta x_j + \frac{y_{kj} - y_{ci}}{R_{Tij}} \Delta y_j + \frac{z_{kj} - z_{ci}}{R_{Tij}} \Delta z_j + c \cdot \Delta t_j, \quad (2)$$

де  $R_{Tij}$  – відстань від кожного з чотирьох супутників до передбачуваної позиції користувача,

$x_{kj}, y_{kj}, z_{kj}$  – координати передбачуваної позиції користувача,

$\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j$  – поточні різниці координат між передбачуваною та реальною позицією користувача,

$j$  – номер кроку ітерації при визначенні координат користувача та різниці між годинниками супутника та користувача.

$$x_{kj+1} = x_{kj} + \Delta x_j, \quad y_{kj+1} = y_{kj} + \Delta y_j, \quad z_{kj+1} = z_{kj} + \Delta z_j, \quad (3)$$

$$R_{Tij} = \sqrt{(x_{kj} - x_{ci})^2 + (y_{kj} - y_{ci})^2 + (z_{kj} - z_{ci})^2}.$$

Виконавши необхідні перетворення, з системи рівнянь (2) можна знайти величини:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta z_j \\ c \cdot \Delta t_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{kj} - x_{c1}}{R_{T1j}} & \frac{y_{kj} - y_{c1}}{R_{T1j}} & \frac{z_{kj} - z_{c1}}{R_{T1j}} & 1 \\ \frac{x_{kj} - x_{c2}}{R_{T2j}} & \frac{y_{kj} - y_{c2}}{R_{T2j}} & \frac{z_{kj} - z_{c2}}{R_{T2j}} & 1 \\ \frac{x_{kj} - x_{c3}}{R_{T3j}} & \frac{y_{kj} - y_{c3}}{R_{T3j}} & \frac{z_{kj} - z_{c3}}{R_{T3j}} & 1 \\ \frac{x_{kj} - x_{c4}}{R_{T4j}} & \frac{y_{kj} - y_{c4}}{R_{T4j}} & \frac{z_{kj} - z_{c4}}{R_{T4j}} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_{1j} - R_{T1j} \\ P_{2j} - R_{T2j} \\ P_{3j} - R_{T3j} \\ P_{4j} - R_{T4j} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Для знаходження псевдо-відстаней  $P_{ij}$  використовується метод ітерацій, а саме задаються початкові значення координат  $x_{kj}, y_{kj}, z_{kj}$  та різниць  $\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j$ . По формулі (3) обчислюють відстань  $R_{Tij}$ , по формулі (2) –  $P_{ij}$ . Замість обчислень на кожному кроці ітерацій можна вимірювати  $P_{ij}$ . Далі по формулі (4) знаходяться величини  $\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j, c \cdot \Delta t_j$ , які підставляються в формули (3). Потім зазначеним чином уточнюються значення  $x_{kj}, y_{kj}, z_{kj}, R_{Tij}$  і  $P_{ij}$ , які підставляються в (4), звідки знаходяться нові, більш точні значення величини  $\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j, c \cdot \Delta t_j$ . Далі процес ітерацій повторюється доки модулі різниць  $\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j$  не будуть менші наперед заданої величини, якою визначається допустима похибка обчислення координат користувача.

Виконання наведеної методики визначення координат користувача потребує значних обчислювальних затрат.

### Постановка задачі

Визначити метод знаходження координат користувача з належною точністю без використання наведеного процесу ітерацій, тобто з меншими обчислювальними затратами.

## Математичні засади

Для вирішення поставленої задачі рівняння (1) перепишемо наступним чином

$$(P_i - c \Delta t)^2 = (x_{ci} - x_k)^2 + (y_{ci} - y_k)^2 + (z_{ci} - z_k)^2. \quad (5)$$

В цих рівняннях відомими величинами є псевдо-відстані  $P_i$ , які одержані в результаті вимірів GPS-приймачів користувача, та координати  $x_{ci}, y_{ci}, z_{ci}$  супутників. Необхідно розрахувати координати користувача  $x_k, y_k, z_k$  та різницю між годинниками супутника та користувача  $\Delta t$ . З метою зменшення похибок обчислювання замість малої величини  $\Delta t$  обчислюється величина  $c \Delta t$ .

В системі рівнянь (5) віднімемо одне рівняння від іншого, виключаючи повтори. Після перетворень одержимо систему з шести рівнянь виду

$$\begin{aligned} 2(P_1 - P_3)c \Delta t - 2(x_{c1} - x_{c3})x_k - 2(y_{c1} - y_{c3})y_k - 2(z_{c1} - z_{c3})z_k &= \\ &= P_1^2 - P_3^2 - (x_{c1}^2 - x_{c3}^2) - (y_{c1}^2 - y_{c3}^2) - (z_{c1}^2 - z_{c3}^2), \\ 2(P_1 - P_2)c \Delta t - 2(x_{c1} - x_{c2})x_k - 2(y_{c1} - y_{c2})y_k - 2(z_{c1} - z_{c2})z_k &= \\ &= P_1^2 - P_2^2 - (x_{c1}^2 - x_{c2}^2) - (y_{c1}^2 - y_{c2}^2) - (z_{c1}^2 - z_{c2}^2), \\ 2(P_2 - P_3)c \Delta t - 2(x_{c2} - x_{c3})x_k - 2(y_{c2} - y_{c3})y_k - 2(z_{c2} - z_{c3})z_k &= \\ &= P_2^2 - P_3^2 - (x_{c2}^2 - x_{c3}^2) - (y_{c2}^2 - y_{c3}^2) - (z_{c2}^2 - z_{c3}^2), \\ 2(P_1 - P_4)c \Delta t - 2(x_{c1} - x_{c4})x_k - 2(y_{c1} - y_{c4})y_k - 2(z_{c1} - z_{c4})z_k &= \\ &= P_1^2 - P_4^2 - (x_{c1}^2 - x_{c4}^2) - (y_{c1}^2 - y_{c4}^2) - (z_{c1}^2 - z_{c4}^2), \\ 2(P_2 - P_4)c \Delta t - 2(x_{c2} - x_{c4})x_k - 2(y_{c2} - y_{c4})y_k - 2(z_{c2} - z_{c4})z_k &= \\ &= P_2^2 - P_4^2 - (x_{c2}^2 - x_{c4}^2) - (y_{c2}^2 - y_{c4}^2) - (z_{c2}^2 - z_{c4}^2), \\ 2(P_3 - P_4)c \Delta t - 2(x_{c3} - x_{c4})x_k - 2(y_{c3} - y_{c4})y_k - 2(z_{c3} - z_{c4})z_k &= \\ &= P_3^2 - P_4^2 - (x_{c3}^2 - x_{c4}^2) - (y_{c3}^2 - y_{c4}^2) - (z_{c3}^2 - z_{c4}^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Можна бачити, що ця система рівнянь лінійна відносно змінних  $x_k, y_k, z_k, c \Delta t$ . Визначимо кількість лінійно незалежних рівнянь в цій системі. При цьому будемо вважати, що похибки визначення координат кожного з супутників та псевдо-дальностей відповідно рівнозначні. Для визначення кількості лінійно незалежних рівнянь знайдемо ранг матриці системи (6) та ранг розширеної матриці системи (6) [2].

Матриця системи (6) має вигляд:

$$A_3 = 2 \begin{bmatrix} (P_1 - P_2) & -(x_{c1} - x_{c2}) & -(y_{c1} - y_{c2}) & -(z_{c1} - z_{c2}) \\ (P_1 - P_3) & -(x_{c1} - x_{c3}) & -(y_{c1} - y_{c3}) & -(z_{c1} - z_{c3}) \\ (P_2 - P_3) & -(x_{c2} - x_{c3}) & -(y_{c2} - y_{c3}) & -(z_{c2} - z_{c3}) \\ (P_1 - P_4) & -(x_{c1} - x_{c4}) & -(y_{c1} - y_{c4}) & -(z_{c1} - z_{c4}) \\ (P_2 - P_4) & -(x_{c2} - x_{c4}) & -(y_{c2} - y_{c4}) & -(z_{c2} - z_{c4}) \\ (P_3 - P_4) & -(x_{c3} - x_{c4}) & -(y_{c3} - y_{c4}) & -(z_{c3} - z_{c4}) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Оскільки ранг матриці дорівнює найбільшому числу лінійно незалежних рядків або стовпців, то можна показати, що ранг матриці (7) дорівнює чотирьом.

Розширена матриця системи (6) має вигляд:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 2(P_1 - P_2) & -2(x_{c1} - x_{c2}) & -2(y_{c1} - y_{c2}) & -2(z_{c1} - z_{c2}) & b_1 \\ 2(P_1 - P_3) & -2(x_{c1} - x_{c3}) & -2(y_{c1} - y_{c3}) & -2(z_{c1} - z_{c3}) & b_2 \\ 2(P_2 - P_3) & -2(x_{c2} - x_{c3}) & -2(y_{c2} - y_{c3}) & -2(z_{c2} - z_{c3}) & b_3 \\ 2(P_1 - P_4) & -2(x_{c1} - x_{c4}) & -2(y_{c1} - y_{c4}) & -2(z_{c1} - z_{c4}) & b_4 \\ 2(P_2 - P_4) & -2(x_{c2} - x_{c4}) & -2(y_{c2} - y_{c4}) & -2(z_{c2} - z_{c4}) & b_5 \\ 2(P_3 - P_4) & -2(x_{c3} - x_{c4}) & -2(y_{c3} - y_{c4}) & -2(z_{c3} - z_{c4}) & b_6 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\text{де } b_1 = P_1^2 - P_2^2 - (x_{c1}^2 - x_{c2}^2) - (y_{c1}^2 - y_{c2}^2) - (z_{c1}^2 - z_{c2}^2),$$

$$b_2 = P_1^2 - P_3^2 - (x_{c1}^2 - x_{c3}^2) - (y_{c1}^2 - y_{c3}^2) - (z_{c1}^2 - z_{c3}^2),$$

$$b_3 = P_2^2 - P_3^2 - (x_{c2}^2 - x_{c3}^2) - (y_{c2}^2 - y_{c3}^2) - (z_{c2}^2 - z_{c3}^2),$$

$$b_4 = P_1^2 - P_4^2 - (x_{c1}^2 - x_{c4}^2) - (y_{c1}^2 - y_{c4}^2) - (z_{c1}^2 - z_{c4}^2),$$

$$b_5 = P_2^2 - P_4^2 - (x_{c2}^2 - x_{c4}^2) - (y_{c2}^2 - y_{c4}^2) - (z_{c2}^2 - z_{c4}^2),$$

$$b_6 = P_3^2 - P_4^2 - (x_{c3}^2 - x_{c4}^2) - (y_{c3}^2 - y_{c4}^2) - (z_{c3}^2 - z_{c4}^2).$$

Також можна показати, що для матриці (8) ранг дорівнює чотирьом. Таким чином, в системі рівнянь (6) є тільки чотири незалежних, і цю систему можна записати так:

$$A \begin{bmatrix} c \\ t \\ x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = B.$$

Матриці  $A$ ,  $B$  утворюються шляхом викреслювання з матриці  $A_3$ , довільних двох рядків та використанням величин  $b_i$  з індексами, що дорівнюють номерам залишених рядків. Оскільки ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, то ця система має єдине рішення

$$\begin{bmatrix} c \cdot t \\ x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = A^{-1}B, \quad (9)$$

$$\text{де } A = 2 \begin{bmatrix} (P_1 - P_2) & -(x_{c1} - x_{c2}) & -(y_{c1} - y_{c2}) & -(z_{c1} - z_{c2}) \\ (P_2 - P_3) & -(x_{c2} - x_{c3}) & -(y_{c2} - y_{c3}) & -(z_{c2} - z_{c3}) \\ (P_1 - P_4) & -(x_{c1} - x_{c4}) & -(y_{c1} - y_{c4}) & -(z_{c1} - z_{c4}) \\ (P_3 - P_4) & -(x_{c3} - x_{c4}) & -(y_{c3} - y_{c4}) & -(z_{c3} - z_{c4}) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_6 \end{bmatrix}.$$

Можна також використовувати інші чотири рівняння з системи (6), але система (9) сформована так, щоб дані кожного з супутників використовувалися рівномірно. При цьому  $\det A \neq 0$ , що забезпечується належним розташуванням супутників.

Для подальшого зменшення обчислювальних затрат доцільно різницю квадратів в виразах коефіцієнтів матриці  $B$  замінити на добуток суми та різниці відповідних величин.

### Висновки

Отримана лінійна система алгебраїчних рівнянь для обчислення координат користувача  $x_k, y_k, z_k$  та значення поправки  $c \cdot t$ , дозволяє скоротити обчислювальні затрати.

### Список використаної літератури

1. Антонович К. М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии. В 2 т. Т. 2. // К. М. Антонович /– М. ФГУП «Картгеоцентр», 2006. – 360 с.
2. Корн Г. Справочник по математике.// Г. Корн, Т. Корн /– М. «Наука», 1973.– 832с.