УДК 539.3

Чемерис О. М.

КОЛИВАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ МЕМБРАН

Вступ

Цільні та з отвором еліптичні мембрани зустрічаються в різного типу діафрагм, пружин, підвісок. Методика рішення задач по визначенню частот власних коливань для таких мембран приведені в роботах [1] - [2]. В роботі [3] на основі методів Релея-Рітца та коллокацій знайдено частотний параметр при значенні величини ексцентриситету 0.8, який в [4] не визначався. Результати обчислень частотного параметра для цільної еліптичної мембрани при різних значеннях ексцентриситету приведені в роботі [4], які також ввійшли в довідник [5]. Інших результатів по визначенню частотного параметра цільної еліптичні мембрани в літературі не виявлено. Відсутні також дані по визначенню частотного параметру еліптичної мембрани з отвором.

Мета досліджень

В роботі ставиться задача визначення частотних параметрів цільної еліптичної мембрани при симетричних коливаннях при різних значеннях ексцентриситету. Складання частотного рівняння для визначення частот коливань мембрани з отвором та визначення частотного параметра при різних значеннях ексцентриситету внутрішнього та зовнішнього еліпсів.

Дослідження

Рівняння коливань розтягнутої мембрани матиме такий вигляд:

$$N\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

де w – нормальні переміщення точок пластинки,

m – маса пластинки на одиницю площі,

N – погонна розтягуючи сила,

t – час.

Якщо ω колова частота коливань, то w змінюється з часом як $\cos\omega t$ і рівняння (1) матиме вигляд,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w+k_1^2 w=0 \tag{2}$$

Між прямокутними x, y та еліптичними ортогональними координатами ξ, η існує залежність:

$$x + iy = h\cosh(\xi + i\eta), \quad (x = h\cosh\xi \cdot \cos\eta, \quad y = h\sinh\xi \cdot \sin\eta),$$

де $2h$ – відстань між фокусами еліпса,

a, b – півосі еліпса,

$e = \sqrt{1-(b/a)^2}$ – його ексцентриситет.

В даному випадку маємо для різних h систему еліпсів $x^2/\cosh^2\xi + y^2/\sin^2\xi = h^2$ (рис. 1, *a*), які перетинаються системою гіпербол ($x^2/\cosh^2\eta - y^2/\sin^2\eta = h^2$). При c=1 еліпс переходить в лінію (рис. 1, *b*), а при $e = 0$ еліпс переходить в коло (рис. 1, *c*).

В еліптичній системі координат рівняння (2) при $k_1^2 h = 2q$ матиме вигляд:

$$\begin{gathered} \partial^2 w/\partial\xi^2 + \partial^2 w_1/\partial\eta^2 + 2k^2(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)w_1 = 0 \\ w(\xi,\eta) = \psi(\xi)\cdot\varphi(\eta) \end{gathered} \tag{3}$$

Рівняння (3) матиме вигляд:

$$\varphi \cdot d^2\psi/d\xi^2 + \psi \cdot d^2\varphi/d\eta^2 + 2q(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)\cdot\psi\xi = 0.$$

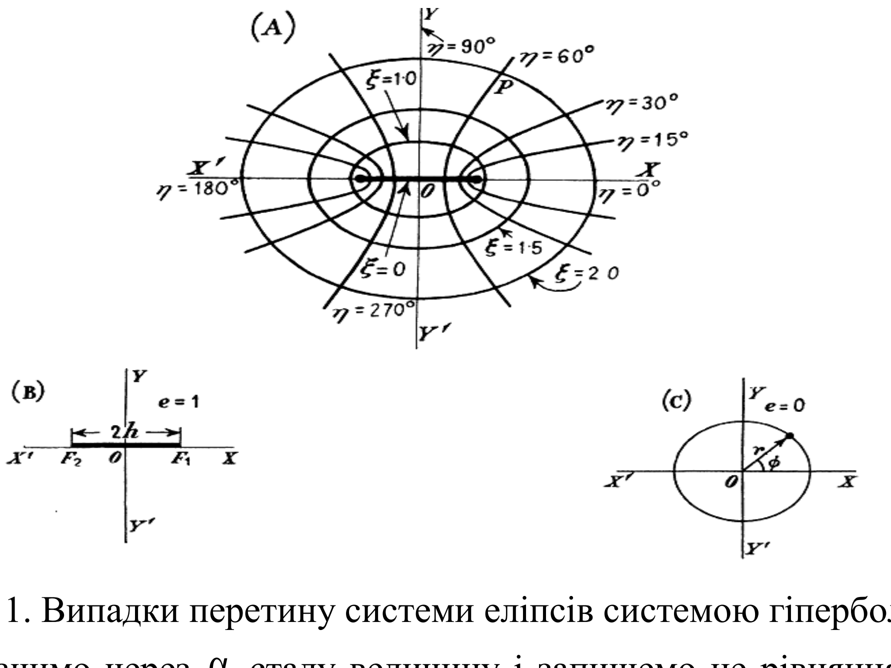

Рис. 1. Випадки перетину системи еліпсів системою гіпербол

Позначимо через α сталу величину і запишемо це рівняння в такій формі:

$$d^2\psi/d\xi^2 + (2q\cos 2\xi)\cdot\psi = -d^2\varphi/d\eta^2 + (2q\cos 2\eta)\cdot\varphi = a. \tag{4}$$

Із даного співвідношення маємо систему канонічних рівнянь Матье

$$d^2\varphi/d\eta^2 + (\alpha - 2q\cosh 2\eta)\cdot\varphi = 0, \tag{5}$$

$$d^2\psi / d\xi^2 - (\alpha - 2q\cos 2\xi)\cdot\psi = 0. \tag{6}$$

Рішення (5) складають звичайні функції Матьє $ce_m(\eta, q)$ $se_m(\eta, q)$. Рівняння (6) і його рішення називають модифікованими $Ce_m(\eta, q)$, $Se_m(\eta, q)$. Це рівняння можна отримати шляхом заміни η на $i\eta$ в (5).

$$ce_m(i\eta, q) = Ce_m(\eta, q),\ se_m(i\eta, q) = Se_m(\eta, q)$$

Частинне рішення (6) складають звичайні $ce_m(\xi, -q)$, $se_m(\xi, -q)$ та модифіковані функції:

$Ce_m(\xi, -q)$, $\quad Se_m(\varsigma - q)$,

$$Ce_o(\xi_o, q) = 1 - \frac{q}{2}\mathrm{ch}2\xi_o + \frac{q^2}{32}\cdot\mathrm{ch}4\xi_o - \frac{q^3}{128}\left(\frac{1}{9}\cdot\mathrm{ch}2\xi_o - 7\mathrm{ch}2\xi_o\right) +$$
$$+\frac{q^4}{73828}\left(\mathrm{ch}8\xi_o - 320\mathrm{ch}4\xi_o\right),$$

$$\mathrm{ch}\xi_0 = \frac{1}{e}, \qquad e = \sqrt{1-(b/a)^2}, \qquad \omega = \frac{2\sqrt{q}}{ea}\cdot\sqrt{\frac{N}{m}};$$

$$Ce_1(\xi_o, q) = \mathrm{ch}\xi_o - \frac{q}{8}\mathrm{ch}\,3\xi_o + \frac{q^2}{64}\left(\frac{1}{3}\mathrm{ch}5\xi_o - \mathrm{ch}3\xi_o\right) - \frac{q^3}{512}\left(\frac{1}{3}\mathrm{ch}3\xi o - \frac{4}{9}\mathrm{ch}5\xi_o + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{18}\mathrm{ch}7\xi_o\right) + \frac{q^4}{4096}\left(\frac{11}{9}\mathrm{ch}3\xi_o + \frac{1}{6}\mathrm{ch}5\xi_o - \frac{1}{12}\mathrm{ch}7\xi_o + \frac{1}{180}\mathrm{ch}9\xi_0\right),$$

$$Se_1(\xi_o, q) = \mathrm{sh}\xi_o - \frac{q}{8}\mathrm{sh}3\xi_o + \frac{q^2}{64}\cdot\left(\frac{1}{3}\mathrm{sh}5\xi_o + \mathrm{sh}3\xi_o\right) - \frac{q^3}{512}\left(\frac{1}{3}\mathrm{ch}3\xi + \frac{4}{9}\mathrm{ch}5\xi_o\right) + \tag{7}$$
$$+\frac{1}{18}\mathrm{ch}7\xi_o + \frac{q^4}{4096}\left(-\frac{11}{9}\mathrm{sh}3\xi_o + \frac{\mathrm{sh}5\xi_o}{6} + \frac{\mathrm{sh}7\xi_o}{12} + \frac{1}{180}\mathrm{sh}9\xi_o\right),$$

$$Ce_2(\xi_o, q) = \mathrm{ch}2\xi_o - \frac{q}{8}\left(\frac{2}{3}\mathrm{ch}4\xi_o - 2\right) + \frac{q^2}{384}\mathrm{ch}6\xi_o - \frac{q^3}{512}\left(\frac{1}{45}\mathrm{ch}8\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{43}{27}\mathrm{ch}4\xi_o + \frac{40}{3}\right) + \frac{q^4}{4096}\left(\frac{1}{540}\mathrm{ch}10\xi_o + \frac{293}{540}\mathrm{ch}6\xi_o\right),$$

$$Se_2(\xi_o, q) = \mathrm{sh}2\xi_o - \frac{q}{12}\mathrm{sh}4\xi_o + \frac{q^2}{384}\mathrm{sh}6\xi_o - \frac{q^3}{512}\left(\frac{1}{45}\mathrm{ch}8\xi - \frac{5}{27}\mathrm{ch}4\xi_o\right) +$$
$$+\frac{q^4}{4096}\left(-\frac{37}{540}\mathrm{sh}6\xi_o + \frac{\mathrm{sh}10\xi_o}{540}\right).$$

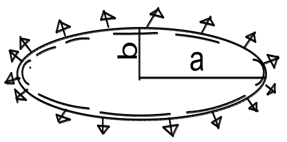

Рис. 2.

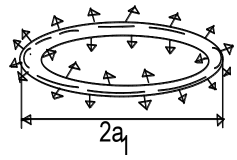

Рис. 3.

Цільна еліптична мембрана (*Рис.* 2) *закріплена по зовнішній границі* Рішення рівнянь коливань мембрани в даному випадку буде

$$w(\xi,\eta) = A_m Ce_m(\xi,q)ce_m(\eta,q) + B + B_m Se_m(\xi,q)se_m(\eta,q) + q\,,$$

де A_m, B_m - сталі величини. Підставляємо дане рішення в граничну умову

$$w(\xi_o,\eta) = 0.$$

Знаходимо для m-ої симетричної форми коливань рівняння

$$Ce_m(\xi_o,q) = 0\,. \qquad (8)$$

Аналогічно для m-ої несиметричної форми коливань маємо рівняння

$$Se_m(\xi_o,q) = 0\,.$$

***Таблиця* 1.**

Найменші корні q_o, q_1, q_1^1 *рівняння* (8)

e	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.866**	**0.9**
q_o	0.059	0.137	0.253	0.421	0.665	1.061	2.5	4.118	5.171
q_1	0.15	0.371	0.617	0.994	1.521	2.269	–	–	–
q_1^1	0.136	0.32	0.592	0.984	1.512	2.208	3.088	3.768	4.168

Найменші корні q_o, q_1, q_1^1 рівняння (8) при $m=0$, $m=1$ наведені в табл. 1.

При обчисленні q_1 в формулі $C_1(\xi_o,q)$ враховані всі складові, при обчисленні q_1^1 в формулі $C_1(\xi_o,q)$ не врахований останній доданок з співмножником q^4. В роботі [2] приведено обчислення q_1^1 при e=0.8 і знайдено значення 3.144, що мало відрізняється від 3.088. В табл. 2 приведено значення частотного параметра $k_i = 2\sqrt{q}\,/\,e(i=0,1)$.

Частотний параметр k обчислено по даним, приведеним в роботі [4]. В роботі [4] проведено наближене обчислення частотного параметра k_0 при e=0.866, який дорівнює 3.5 - 3.56. Частотні параметри табл. 2 для несиметричних коливань k_1, k_1^1 відповідають відповідно значенням q_1 і q_1^1.

***Таблиця* 2.**

Частотні параметри для несиметричних коливань

e	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.866**	**0.9**
k	2.1	–	2.162	–	2.708	–	3.75	–	5.33
k_0	2.43	2.47	2.52	2.6	2.72	2.94	3.95	4.12	5.17
k_1	3.87	3.89	3.93	3.99	4.1	4.3	–	–	–
k_1^1	3.87	3.69	3.85	3.97	4.1	4.25	4.39	4.48	5.34

Еліптична мембрана з отвором (рис. 3), що представляє собою фокальний еліпс. Нехай a_1 – півдіаметра внутрішнього отвору мембрани фокального еліпса (рис. 3). Рішення рівнянь коливань мембрани в даному випадку для симетричних коливань можна записати в формі

$$w(z,q) = A\cdot Ce_1(z,q) + B\cdot Fe_1(z,q),$$

де A, B – сталі величини,

$Fe_1(q,z)$ – функція Матьє другого роду[2].

Граничні умови $w(\xi_1,q)=0,\quad w(\xi_2,q)=0$

Частотне рівняння

$$Ce_1(\varepsilon_1,q)\cdot Fe_1(\varepsilon_2,q) - Ce_1(\varepsilon_2,q)\cdot Fe_1(\varepsilon_1,q) = 0,$$

$$\begin{aligned} Fe_1(z,q) = {} & \mathrm{sh}z - \frac{1}{8}q\,\mathrm{sh}3z + \frac{1}{64}q^2\left(5\mathrm{sh}3z + \frac{1}{3}\mathrm{sh}5z\right) - \\ & -\frac{1}{512}q^3\left(-\frac{35}{3}\mathrm{sh}3z + \frac{8}{3}\mathrm{sh}5z + \frac{8}{3}\mathrm{sh}7z\right) + \\ & + \frac{1}{4096}q^4\left(-\frac{17}{3}\mathrm{sh}3z - \frac{343}{54}\mathrm{sh}5z + \frac{61}{108}\mathrm{sh}7z + \frac{1}{180}\mathrm{sh}9z\right) + \\ & + \left(q - \frac{3}{64}q^3 - \frac{3}{256}q^4 + \frac{31}{36864}q^5\right)\cdot z\cdot Ce_1(z,q), \end{aligned} \tag{1}$$

де $\rho = a_1/a$, $\varepsilon_1 = \mathrm{arch}(1/e)$, $\varepsilon_2 = \mathrm{arch}(1/\rho^2\cdot e))$.

Корні частотного рівняння q та значення частотного параметра k приведені в табл. 3 при різних співвідношеннях діаметрів еліпсів та значень ексцентриситету більшого еліпсу.

***Таблиця* 3.**

Корні частотного рівняння та значення частотного параметра

a_1/a	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**
$e=0.1$	*q*=0.044	0.041	0.039	0.367	*k*=4.195	4.05	3.95	12.12
$e=0.2$	0.197	0.188	0.171	0.166	4.438	4.336	4.135	4.074
$e=0.3$	0.502	0.482	0.437	0.417	4.723	4.628	4.407	4.305
$e=0.4$	0.971	0.939	0.867	2.577	4.927	4.845	4.656	8.027
$e=0.5$	1.522	1.491	1.426	1.392	4.935	4.884	4.777	4.719
$e=0.6$	–	2.115	2.079	2.04	–	4.848	4.806	4.761
$e=0.7$	2.861	2.855	2.851	2.798	4.833	4.828	4.824	4.779
$e=0.8$	3.773	3.772	3.762	3.766	4.856	4.855	4.855	4.852

Висновки

1. Проведені порівняльні розрахунки для визначення симетричних коливань цільних мембран в різною величиною ексцентриситету $(e=0.1-0.8)$.
2. Визначені значення частотного параметра симетричних коливань мембран з отвором при різних значеннях ексцентриситету $(e=0.2-0.9)$.
3. Подальші дослідження пов'язані з визначенням частотного параметра при несиметричних коливаннях

Список використаної літератури

1. *Mathieu E.* Memorie sur le movement vibratorie d'une membrane de form elliptique, J. de math, pures et appliqués (Liouville), 1868. v.13.p. 137.
2. *Мак Лахлан* Теория и приложения функций Матье. ИЛ,1954.
3. *Collatz l.* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Akad. Verlad. Lpz. 1949.
4. *Meixner J.*, Schafke F. W. Methiensche Funktionen und Spharoidfunktionen, Springer ,1954.
5. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания пластинок. Справочное пособие. –К.: Наукова думка, 1964, -287с.