УДК 389.1:681.2.088
DOI: http://dx.doi.org/10.20535/2219-380413201571540
Гречко Г. П. [1], *доцент*

ВІДНОВЛЕННЯ ПОСТІЙНОГО КОРИСНОГО СИГНАЛУ, ПОРУШЕНОГО АПЕРІОДИЧНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

[1] *Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»*

En It was determined the exact analytical description of a constant valueof useful signal, that was obtained as a result of measurement of the actual signal. It's consist of the sum of the useful signal and the perturbations signal, that are an aperiodic processes. The constant value of useful signal is defined through the derivatives up to the fourth order of the perturbations process inclusively in the point $t > 0$ of the measured signal.

Ru Определено точное аналитическое описание постоянной величины полезного сигнала, полученного в результате измерения реального сигнала, состоящего из суммы самого полезного сигнала и сигнала возмущений, которые являются апериодическими процессами. Постоянная величина полезного сигнала определяется через производные до четвертого порядка процесса возмущений (включительно), взятых в точке $t > 0$ измеряемого сигнала.

Вступ

В галузі вимірювання параметрів механічних величин, таких як сила, тиск, кутова швидкість та прискорення сили тяжіння Землі тощо значне місце займають задачі, пов'язані з вимірюванням постійної (сталої) величини корисного сигналу, яка спотворюється зовнішніми випадковими збуреннями, що носять коливальний або аперіодичний характер. Такі випадки виникають, коли вимірювання здійснюються відповідними приладами, що встановлені, переважно, на рухомих об'єктах при їх стоянці. Збурення виникають при дії на об'єкт працюючих установлених на ньому агрегатів, поривів вітру, або під час пересування по ньому членів екіпажу. Стосується це також, наприклад, роботи вагових систем та ваг, які вмонтовані в різні технологічні лінії при фасуванні продуктів та при визначенні ваги залізничних вагонів під час їх руху, а також при проведенні гравіметричних вимірювань, гірокомпасуванні тощо. Оскільки пераховані задачі мають значне практичне значення, то їм приділяється велика увага практиків і науковців.

У цьому напрямку відома робота [1], в якій відмічається, що для вимірювань найбільш придатні частотні давачі завдяки своїй високій точності та ряду інших переваг, основними з яких є:

– відсутність втрат інформації, обумовлених дією навантаження;
– простота лінії зв'язку з системою обробки результатів вимірювань;
– велика завадозахищеність по відношенню промислових завад;
– простота обробки та реєстрації вихідних сигналів.

Але акцент у цій роботі зосереджений, в основному, на дослідженні періодичних збурень. Дослідженню аперіодичних сигналів безпосередньо стосується монографія [2]. Характерною ознакою цих двох робіт є те, що для визначення сталої величини корисного сигналу застосовуються апроксимації виміряних сигналів з допомогою тригонометричних поліномів, що призводить до значних методичних похибок. Подальший розвиток цього напрямку вимірювань іде за рахунок удосконалення апаратних засобів при допомозі їх комп'ютеризації. Велика практична значимість цих досліджень обумовлює їх актуальність.

Постановка задачі

Мета статті полягає в одержанні точного аналітичного описання сталої величини корисного сигналу за результатами вимірювання вихідного сигналу збурень в точці $t > 0$ та його похідних у цій точці.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо наступну задачу. Нехай

$$F(t) = f_c + x(t), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Тут f_c – постійне невідоме число, яке характеризує сталу величину постійного корисного сигналу, а $x(t)$ є розв'язок деякого диференціального однорідного рівняння виду [3]

$$\ddot{x}(t) + 2h\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \; t > 0; \; x_0(0) = x_0; \; \dot{x}(0) = x_1. \tag{2}$$

Відносно нього відомо, що $h > 0$ і корені його характеристичного рівняння

$$\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -q_1,$$
$$\lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -q_2$$

дійсні $(h > \omega_0)$ і при цьому $0 < q_1 < q_2$. Ці початкові умови характеризують аперіодичні процеси.

Загальний розв'язок однорідного рівняння (2) має вигляд

$$x(3)(t) = Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t}, \qquad t \geq 0 \tag{3}$$

і, таким чином, має чотири невідомих коефіцієнти *A*, *B*, q_1 і q_2.

Функцію F можна трактувати як вихідний сигнал вимірювального пристрою, на вхід якого подається сигнал f_c, що спотворюється адитивною добавкою $x(t)$ механічних збурень.

Задача полягає в наступному: необхідно виділити постійний корисний сигнал f_c у точці $t_0 > 0$ функції F та її перші чотири похідні:

$$F(t_0) = f_c + x(t_0);$$
$$F'(t_0) = x'(t_0); \quad F''(t_0) = x''(t_0);$$
$$F'''(t_0) = x'''(t_0); \quad F^{(4)}(t_0) = x^{(4)}(t_0).$$

Так як всі похідні функції F співпадають з відповідними похідними x, то фактично задача полягає в тому, щоб по значенням похідних, $x'(t_0)$, $x''(t_0)$, $x'''(t_0)$ і $x^{(4)}(t_0)$, які безпосередньо вимірюються в точці t_0, відновити $x(t_0)$. З урахуванням формули (3) маємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} x'(t_0) = x_1 = -q_1 Ae^{-q_1 t_0} - q_2 Be^{-q_2 t_0}, \\ x''(t_0) = x_2 = q_1^2 Ae^{-q_1 t_0} + q_2^2 Be^{-q_2 t_0}, \\ x'''(t_0) = x_3 = -q_1^3 Ae^{-q_1 t_0} - q_2^3 Be^{-q_2 t_0}, \\ x^{(4)}(t_0) = x_4 = q_1^4 Ae^{-q_1 t_0} + q_2^4 Be^{-q_2 t_0} \end{cases} \tag{4}$$

Введемо нові позначення

$$q_1 = u, \quad q_2 = v, \quad (0 < u < v), \quad e^{-q_1 t_0} = s, \quad Be^{-q_2 t_0} = r.$$

Тоді система (4) приймає вигляд

$$\begin{cases} x_1 = -us - vr, \\ x_2 = u^2 s + v^2 r, \\ x_3 = -u^3 s - v^3 r, \\ x_4 = u^4 s + v^4 r, \end{cases} \tag{5}$$

де u, v, r і s – невідомі величини, а x_1, x_2, x_3 і x_4 – виміряні значення похідних функції F. Крім того, із (3) випливає, що

$$x(t_0) = Ae^{-q_1 t_0} + Be^{-q_2 t_0} = s + r. \tag{6}$$

Отже, для обчислення $x(t_0)$ із системи (5) потрібно знайти $s + r$. Спочатку із перших рівнянь (5) одержимо

$$\begin{cases} x_1 u + x_2 = (v^2 - uv)r, \\ x_1 v + x_2 = (u^2 - uv)s \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = -\dfrac{x_1 u + x_2}{v(u - v)} \\ s = \dfrac{x_1 v + x_2}{u(u - v)}, \end{cases}$$

звідки

$$s + r = \frac{x_1 v^2 + x_2 v - x_1 u^2 - x_2 u}{uv(u - v)} = \frac{-x_1 (u + v) - x_2}{uv}. \tag{7}$$

Використовуючи решту рівнянь системи (5) визначимо так само s і r. Одержимо

$$\begin{cases} x_3 u + x_4 = -uv^3 r + v^4 r, \\ x_3 v + x_4 = -u^3 vs + u^4 s, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = -\dfrac{x_3 u + x_4}{v^3(u - v)} \\ s = \dfrac{x_3 v + x_4}{u^3 (u - v)}, \end{cases}$$

Тепер визначимо x_1 і x_2 через x_3 і x_4, знаючи r і s. Маємо

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3 v + x_4}{u^2(u-v)} + \dfrac{x_3 u + x_4}{v^2(u-v)}, \\ x_2 = \dfrac{x_3 v + x_4}{u(u-v)} - \dfrac{x_3 u + x_4}{v(u-v)}. \end{cases} \tag{8}$$

Із (8) легко знаходимо

$$x_1(uv)^2 = x_3[(u+v)^2 - uv] + x_4(u+v),$$

$$x_2(uv) = -x_3(u+v) - x_4.$$

Введемо ще нові позначення

$$u + v = m, \quad uv = n \quad (n > 0, \ m > 0)$$

і запишемо

$$x_1 n^2 = x_3(m^2 - n) + x_4 m,$$
$$x_2 n = -x_3 m - x_4.$$

Звідки

$$n = \frac{-x_3 m - x_4}{x_2} \tag{9}$$

і отже

$$x_1\left(\frac{-x_3 m - x_4}{x_2}\right)^2 = x_3\left(m^2 + \frac{x_3 m + x_4}{x_2}\right) + x_4 m.$$

Виконавши прості перетворення, одержимо

$$m^2(x_1x_3^2 - x_3x_2^2) + m(2x_1x_3x_4 - x_2x_3^2 - x_4x_2^2) +$$
$$+(x_1x_4^2 - x_2x_3x_4) = 0 \tag{10}$$

Розв'язавши квадратне рівняння (10), одержимо наступні значення для m

$$m_1 = \frac{-x_1x_4 + x_2x_3}{x_1x_3 - x_2^2}, \quad m_2 = \frac{-x_1x_3x_4 + x_4x_2^2}{x_1x_3^2 - x_3x_2^2}.$$

Підставимо значення m в (9) знаходимо для n

$$n_1 = \frac{x_2x_4 - x_3^2}{x_1x_3 - x_2^2}, n_2 = 0$$

З огляду на те, що $m, n > 0$, остаточно одержимо для m, n їх наступні значення

$$m = \frac{-x_1x_4 + x_2x_3}{x_1x_3 - x_2^2}, \qquad n = \frac{x_2x_4 - x_3^2}{x_1x_3 - x_2^2}.$$

За допомогою (7) легко знаходимо значення $x(t_0)$

$$x(t_0) = Ae^{-q_1t_0} + Be^{-q_2t_0} = s + r = \frac{x_1^2x_4 - 2x_1x_2x_3 + x_2^3}{x_2x_4 - x_3^2}.$$

Таким чином, для визначення невідомого корисного постійного сигналу f_c одержимо наступний вираз:

$$f_c = F(t_0) - x(t_0) = F(t_0) - \frac{x_1^2\, x_4 \; - \; 2x_1\, x_2 x_3 \; + \; x_2^3}{x_2\, x_4 \; - \; x_3^2},$$

або підставивши значення x_1, x_2, x_3 і x_4, остаточно одержимо

$$f_c = F(t_0) -$$

$$- \frac{[F'(t_0)]^2 F^{(4)}(t_0) \; - \; 2F'(t_0)\, F''(t_0)\, F'''(t_0) \; + \; [F''(t_0)]^3}{F''(t_0)\, F^{(4)}(t_0) \; - \; [F'''(t_0)]^2}.$$

Подальшим кроком дослідження цього питання слід вважати пошук швидких алгоритмів обчислення постійного корисного сигналу, використовуючи властивості степеневої функції [4].

Висновок

Одержано точну аналітичну формулу для знаходження постійного корисного сигналу, порушеного аперіодичними збуреннями, який обчислюється через похідні до четвертого порядку (включно), взяті в точці $t > 0$ виміряного сигналу процесу збурень.

Список використаної літератури

1. *Ракаев А. П.* Измерение постоянной составляющей механической величины частотними преобразователями. – Автореферат диссертации на соискание учёной степени к.т.н. – М. 1973. – 26 с.
2. *Цема М. И.* Измерение и обработка параметров монотонно затухаючих сигналов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 120 с.
3. *Андронов А. А.*, Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981. – 568 с.
4. *Хюн.* Измерение экспоненциальных сигналов методом фазовых траекторий.- Приборы для научных исследований, 1969, № 8. С. 84-86.