

УДК 539.3

DOI: <http://dx.doi.org/10.20535/2219-380414201670647>

Янчевський І. В.<sup>1</sup>, професор, д. ф -м. н.

## ІДЕНТИФІКАЦІЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ, ЩО ДІЮТЬ НА ПРУЖНОДЕФОРМОВАНИЙ ЕЛЕМЕНТ КОНСТРУКЦІЇ

**En**

The technique of identification as functions of time of  $R$  non-stationary loads acting on the construction element is presented in the article. It is assumed that deformation of the element is elastic; its geometry, the type of mount and properties of the material/materials are given; spatial distribution for loads is known. As initial data there are  $S$  variables which describe change in time of some deformation parameter and are accessible for experimental measurements. Changes in time of these variables are caused by action of required loads.

To solve the problem unknown dependences are approximated by set of step functions as Heaviside functions. Factors of approximation  $q$  are to be calculated. Using  $S \times R$  so-called “functions of influence” the set of  $S$  registered variables is presented as superposition of these functions in view of factors  $q$ . It is necessary to note that “functions of influence”, which determine change in time of the  $s$ -th ( $s=1 \dots S$ ) measured variable at acting exclusively the  $r$ -th ( $r=1 \dots R$ ) load in the form of step unit function, can be defined experimentally or by methods of mathematical modeling, i.e. they are considered to be known.

The developed algorithm of factors  $q$  calculation is based on the method of the least squares. As a result of simple mathematical transformations the problem is reduced to a system of linear algebraic equations (SLAE) with block structure of a computation matrix. To decrease errors in initial data on solution regularized Tikhonov's algorithm is used. The parameter of regularization is calculated on the basis of the principle of relative discrepancy. Having solved the SLAE at the final stage approached profiles of required functions are restored.

The algorithm was tested for identification of the concentrated non-stationary

---

<sup>1</sup> Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,  
кафедра теоретичної механіки

load which acts axisymmetrically on a round plate with rigidly jammed contour. Experimental investigation of vibration of this plate can be found in literature. The received results (the identified load) coincide with measured values with comprehensible accuracy.

The presented technique can be used to solve a wide class of “boundary inverse problems” in mechanics of solids including identification of influences of other physical nature (kinematic, thermal, etc.).

## **Ru**

Изложена методика идентификации временных зависимостей нестационарных воздействий, распределенных на заданной области конструктивного элемента произвольной геометрии, по значениям величины, которая является более доступной для измерений. В предположении того, что реакция элемента линейно зависит от искомых воздействий, рассматриваемая задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов, посредством которых эти воздействия аппроксимируются кусочно-постоянными функциями. Для решения полученной системы используется регуляризирующий алгоритм, обеспечивающий устойчивость результата к случайным ошибкам в исходных данных и погрешностям вычислений. Конкретные расчеты, свидетельствующие об эффективности методики, проведены для восстановления силового воздействия по экспериментальным данным.

## **Вступ**

Розвиток сучасної техніки нерозривно пов'язаний з проектуванням нових деталей і конструктивних елементів, які задовольняють необхідному комплексу механічних характеристик. На цьому етапі, окрім надійних методів розрахунку, важливим є наявність повної та достовірної інформації про діючі у процесі експлуатації цих елементів зовнішні навантаження. У низці випадків її отримання можливе виключно з використанням технології непрямих вимірів, коли ідентифікація навантаження здійснюється через реєстрацію інших величин (деформацій, різниці потенціалів, тощо). Проблеми ідентифікації навантажень за їх непрямыми проявами присвячені численні теоретичні та експериментальні дослідження [1–3], у переважній більшості яких розглянуті питання ідентифікації просторового розподілу статичного навантаження або, у випадку нестационарних процесів, залежності від часу зосередженого навантаження імпульсного типу. Методи ідентифікації комплексного навантаження, зокрема такого, що представляє собою систему декількох нестационарних сил, до теперішнього часу розроблені недостатньо повно і багато питань, у т.ч. щодо можливості такої ідентифікації, залишаються відкритими. Саме цій проблематиці і присвячена дана робота.

## **Постановка задачі**

Маємо конструктивний елемент, геометрія якого, варіант кріплення та механічні характеристики матеріалу/матеріалів задані. Деформації еле-

мента є пружними і обумовлені дією  $R$  зовнішніх навантажень, розподіл яких по просторових координатах відомий, а закони їх зміни у часі  $\tilde{Z}^{(r)}(t)$  ( $r = \overline{1, R}$ ) підлягають ідентифікації. Для цього використовуються  $S$  функцій  $\tilde{V}^{(s)}(t)$  ( $s = \overline{1, S}$ ), які відображають зміну у часі певного деформаційного параметра, обумовленого дією  $\tilde{Z}^{(r)}(t)$  ( $r = \overline{1, R}$ ).

### Метод розв'язання

Для розв'язання задачі залежності  $\tilde{Z}^{(r)}(t)$  апроксимуються кусково-постійними функціями  $Z^{(r)}(t)$ , які в межах  $n$ -го часового інтервалу між моментами  $t = T_{n-1}$  і  $t = T_n$  приймають постійне значення  $\tilde{q}_n^{(r)}$ :

$$\tilde{Z}^{(r)}(t) \approx Z^{(r)}(t) = \sum_{n=1}^N \tilde{q}_n^{(r)} [H(t - T_{n-1}) - H(t - T_n)], \quad (1)$$

де  $T_n$  – фіксовані моменти часу, які задовольняють умові  $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N = T_{\text{inv}}$ ;  $T_{\text{inv}}$  – час дослідження;  $H(t)$  – функція Хевісайда.

Напевно, що рівність (1) може бути переписана у вигляді сукупності східчастих функцій  $\bar{Z}(t) = H(t)$ , тобто у вигляді:

$$Z^{(r)}(t) = \sum_{n=1}^N q_n^{(r)} H(t - T_{n-1}) \bar{Z}(t - T_{n-1}). \quad (2)$$

При цьому між фігуруючими в (1) і (2) коефіцієнтами  $\tilde{q}_n^{(r)}$  й  $q_n^{(r)}$  справедливе співвідношення  $\tilde{q}_n^{(r)} = \sum_{k=1}^n q_k^{(r)}$ .

Якщо ввести в розгляд  $S \cdot R$  функцій  $\bar{V}^{(s,r)}(t)$  ( $s = \overline{1, S}$ ;  $r = \overline{1, R}$ ), які визначають зміну у часі  $s$ -ої вимірюваної величини при прикладанні виключно  $r$ -го навантаження у вигляді східчастого одиничного впливу ( $Z^{(r)}(t) = \bar{Z}(t)$ ), то тоді, відповідно до принципу суперпозиції, задані величини  $\tilde{V}^{(s)}(t)$  будуть приблизно дорівнювати сумі цих функцій з врахуванням зсуву у часі  $T_{n-1}$  і коефіцієнтами  $q_n^{(r)}$ , які приймають сенс вагових коефіцієнтів:

$$\tilde{V}^{(s)}(t) \approx \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N q_n^{(r)} H(t - T_{n-1}) \bar{V}^{(s,r)}(t - T_{n-1}). \quad (3)$$

Функції  $\bar{V}^{(s,r)}(t)$  можуть бути визначені або експериментально (якщо можлива реалізація близького за конфігурацією до  $\bar{Z}(t)$  навантаження), або методами математичного моделювання. І через те, що для сучасної практики як експериментальних досліджень, так і комп'ютерного моделю-

вання, замість безперервних величин  $\tilde{V}^{(s)}(t)$  і  $\bar{V}^{(s,r)}(t)$  зазвичай мають місце дискретні, які представляють собою масиви значень відповідних функцій для рівновіддалених точок з кроком  $\Delta t$  досліджуваного часового інтервалу, то замість виразу (3) більш доречний наступний варіант його запису:

$$\tilde{V}_m^{(s)} \approx \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N q_n^{(r)} H(m - M_{n-1}) \bar{V}_{m-M_{n-1}}^{(s,r)} \quad (s = \overline{1, S}), \quad (4)$$

де  $\tilde{V}^{(s)}$ ,  $\bar{V}^{(s,r)}$  – матриці-стовпці висотою  $M_N$  з елементами  $\tilde{V}_m^{(s)} = \tilde{V}^{(s)}(m\Delta t)$ ,  $\bar{V}_m^{(s,r)} = \bar{V}^{(s,r)}(m\Delta t)$  ( $m = \overline{1, M_N}$ ;  $M_n = E(T_n/\Delta t)$ ,  $E(x)$  – ціла частина аргументу).

Таким чином, задача наближеного відновлення  $\tilde{Z}^{(r)}(t)$  (1) зводиться до відшукування таких коефіцієнтів  $q_n^{(r)}$  ( $r = \overline{1, R}$ ;  $n = \overline{1, N}$ ), які б найкращим чином забезпечували виконання рівності (4) у припущенні того, що  $\tilde{V}^{(s)}$ ,  $\bar{V}^{(s,r)}$ ,  $\Delta t$  і  $T_n$  відомі. Останні або задаються керуючись апріорною інформацією про гладкість розв'язку, або вибираються на підставі аналізу отриманих результатів.

У даній роботі методика обчислення коефіцієнтів  $q_n^{(r)}$  побудована на методі найменших квадратів – коефіцієнти  $q_n^{(r)}$  приймаються такими, щоб мінімізувати квадратичні функції  $J_n$ , які вводяться в розгляд на кожному часовому інтервалі  $n$ :

$$J_n = \sum_{s=1}^S \left( \sum_{m=M_{n-1}+1}^{M_n} \left( \tilde{V}_m^{(s)} - \sum_{r=1}^R \sum_{k=1}^n q_k^{(r)} \bar{V}_{m-M_{k-1}}^{(s,r)} \right)^2 \right) = \sum_{s=1}^S \left\| \left( \tilde{V}_{(n)}^{(s)} - \sum_{r=1}^R \sum_{k=1}^n q_k^{(r)} \bar{V}_{(n-k+1)}^{(s,r)} \right) \right\|_2^2.$$

Тут величини з нижнім індексом у дужках позначають підматриці відповідних стовпців –  $\mathbf{X}_{(n)} = [\mathbf{X}_{M_{n-1}+1} \quad \mathbf{X}_{M_{n-1}+2} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{M_n}]^T$  ( $\mathbf{X} = \bar{V}^{(s,r)}$ ,  $\tilde{V}^{(s)}$ );  $\|\mathbf{X}\|_2$  – евклідова норма  $\mathbf{X}$ .

Задача відшукування  $\min_{q_n^{(r)}} J_n$  ( $r = \overline{1, R}$ ;  $n = \overline{1, N}$ ) еквівалентна розв'язанню рівнянь  $\partial J_n / \partial q_n^{(r)} = 0$ . У результаті нескладних математичних перетворень із сукупності отриманих  $N \cdot R$  рівнянь формується система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка у матричному вигляді може бути записана в такий спосіб:

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{Y},$$

де  $\mathbf{A}$  – квадратна ( $R \times R$ ) – матриця блокової структури, блоки якої є нижніми трикутними матрицями Теплиця розміром  $N \times N$ ;  $\mathbf{q}$  і  $\mathbf{Y}$  – блокові стовпцеві матриці, висота кожного з  $R$  блоків яких дорівнює  $N$ . Таким чином під записом  $\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{Y}$  розуміється

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \dots & \mathbf{A}_{1,R} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{R,1} & \dots & \mathbf{A}_{R,R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_R \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Елементи зазначених матриць визначаються рівностями:

$$\{\mathbf{A}_{p,r}\}_{n,k} = \sum_s \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^{(s,p)\text{T}} \bar{\mathbf{V}}_{(n-k+1)}^{(s,r)}; \quad \{\mathbf{q}_r\}_n = q_n^{(r)}; \quad \{\mathbf{Y}_r\}_n = \sum_s \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^{(s,r)\text{T}} \tilde{\mathbf{V}}_{(n)}^{(s)}$$

$$(s = \overline{1, S}; \quad p, r = \overline{1, R}; \quad n = \overline{1, N}; \quad k = \overline{1, n}).$$

Структура матриці  $\mathbf{A}$  дозволяє реалізувати процедуру покрокового обчислення елементів  $\{\mathbf{q}_r\}_n$  за допомогою рекурентної формули з постійною матрицею та змінною правою частиною, яка враховує обчислені на попередніх кроках значення  $\{\mathbf{q}_r\}_k$  ( $k = \overline{1, n-1}$ ). Однак стовпець  $\mathbf{Y}$  містить випадкові помилки вимірювання і погрішності обробки та передачі даних. Тому отриманий на підставі такої рекурентної формули результат, незважаючи на деякий згладжувальний ефект від кусково-постійної апроксимації (див. (1)), швидше за все, буде позбавлений фізичного змісту. Побудова стійкого до помилок у вхідних даних розв'язку потребує залучення спеціальних регуляризованих процедур, розвинених для розв'язання некоректних задач обчислювальної математики. У даній роботі для знаходження наближеного розв'язку (5) використовується прийом, який поєднує реалізацію узагальненого методу Крамера чи Гауса (для виділення з вихідної системи (5) СЛАР типу  $\hat{\mathbf{A}}_r \mathbf{q}_r = \hat{\mathbf{Y}}_r$  ( $r = \overline{1, R}$ ) відносно кожної підматриці  $\mathbf{q}_r$ ) і методу регуляризації А.М. Тихонова [4]. Слід зазначити, що перший етап враховує властивість комутативності вхідних у матрицю  $\mathbf{A}$  блоків ( $\mathbf{A}_{r,i} \mathbf{A}_{p,j} = \mathbf{A}_{p,j} \mathbf{A}_{r,i}$ ;  $i, j = \overline{1, R}$ ) і рівність елементів на діагоналях, паралельних головній (для зменшення кількості обчислювальних операцій). А на другому етапі задача  $\hat{\mathbf{A}}_r \mathbf{q}_r = \hat{\mathbf{Y}}_r$  підміняється розв'язанням регуляризованої СЛАР:

$$(\hat{\mathbf{A}}_r^{\text{T}} \hat{\mathbf{A}}_r + \alpha \hat{\mathbf{L}}^{\text{T}} \hat{\mathbf{L}}) \mathbf{q}_r = \hat{\mathbf{A}}_r^{\text{T}} \hat{\mathbf{Y}}_r, \quad (6)$$

яка впливає з умови  $\min_{\mathbf{q}} (\|\hat{\mathbf{A}}_r \mathbf{q}_r - \hat{\mathbf{Y}}_r\|_2^2 + \alpha \|\hat{\mathbf{L}} \mathbf{q}_r\|_2^2)$  ( $\hat{\mathbf{L}}$  – регуляризовуюча матриця).

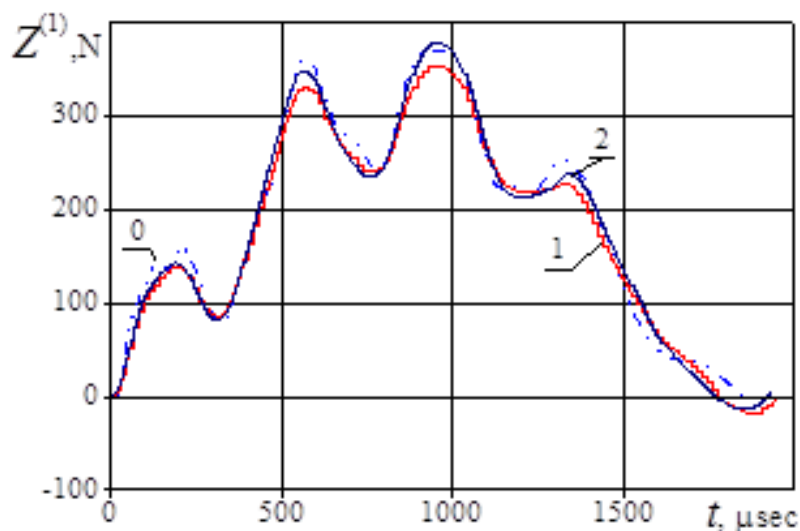
Важливим етапом методу Тихонова є підбір вхідного в розрахункову СЛАР (6) параметра регуляризації  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ). Зокрема, значення  $\alpha$  може бути обчислене на підставі принципу нев'язки [4].

Розв'язавши систему (6) і маючи у своєму розпорядженні значення  $q_n^{(r)}$  ( $r = \overline{1, R}$ ;  $n = \overline{1, N}$ ), на заключному етапі відновлюється наближений

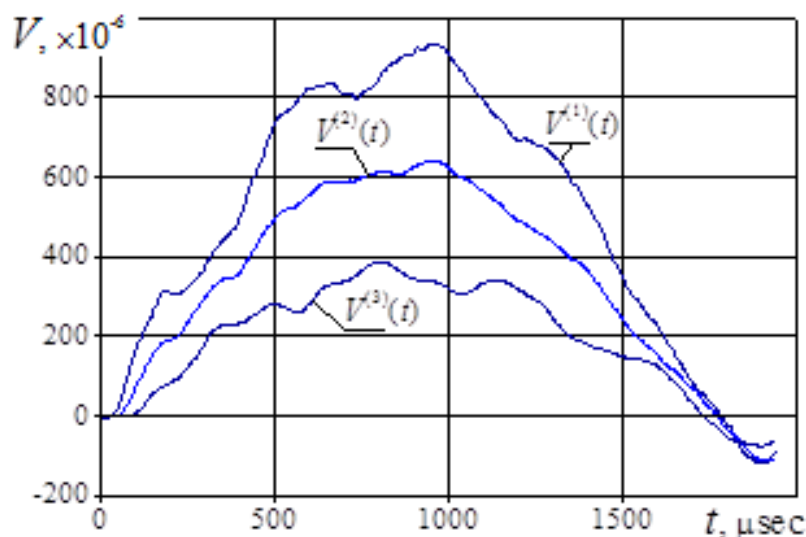
профіль шуканих функцій  $Z^{(r)}(t)$  з урахуванням співвідношення  $\tilde{q}_n^{(r)} = \sum_{k=1}^n q_k^{(r)}$  та рівності (1).

### Чисельні результати

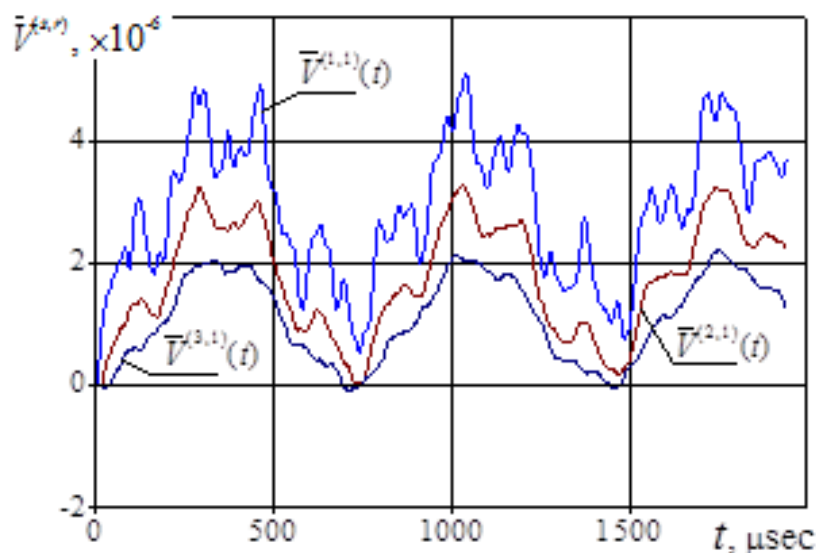
Наведений алгоритм був протестований для ідентифікації зосередженого нестационарного навантаження, що діє вісесиметрично на круглу пластину з жорстко защемленим контуром, експериментальні дослідження коливальних явищ можна знайти в роботі [5]. Пластина була виготовлена з алюмінієвого сплаву з матеріальними властивостями  $E=70$  ГПа,  $\rho=2700$  кг/м<sup>3</sup> і  $\nu=0.33$  (модуль Юнга, густина і коефіцієнт Пуассона, відповідно), а геометричні її параметри становили 60 мм (радіус) і 2 мм (товщина). Використання для реалізації навантаження інструментального молотка дозволило авторам [5] записати фактичну історію зміни контактної навантаження за часом, графік якої зображений нижче на рис. 1, а у вигляді штрихової кривої 0. За допомогою тензометричного вимірювального комплексу авторами [5] також отримані криві  $V^{(1)}(t)$ ,  $V^{(2)}(t)$  і  $V^{(3)}(t)$  (рис. 1, б), які зображують відповідні цьому навантаженню деформації пластини в окружному напрямку  $\varepsilon_\theta(t)$  в точках, які віддалені від її центру на відстані 10 мм, 20 мм і 30 мм, відповідно. Задача ідентифікації в цьому випадку полягає у відновленні контактної навантаження (як функції  $Z(t) = Z^{(R)}(t)$ ,  $R=1$ ) за значеннями деформацій  $V^{(s)}(t)$  ( $s = \overline{1, S}$ ;  $S=3$ ).



а) конфігурації «фактичного» та відновленого навантажень



б) закони зміни відносних деформацій



в) «передатні функції»

Рис. 1. Ідентифікація навантаження за експериментальними даними

Для її розв'язання, відповідно до викладеного у даній роботі алгоритму, на першому етапі за допомогою СЕ-програмного комплексу була розв'язана пряма задача з метою побудови «передатних функцій»  $\bar{V}^{(s,R)}(t)$ . Ці функції визначають деформації пластини  $\varepsilon_{\theta}(t)$  в точках 10 мм ( $s=1$ ), 20 мм ( $s=2$ ) і 30 мм ( $s=3$ ) при прикладанні до її центру зосередженого навантаження у вигляді функції Хевісайда ( $Z^{(R)}(t) = \bar{Z} = 1$ ).

Результати СЕ-аналізу представлені на рис. 1,в. Слід зауважити, що при обчисленні  $\bar{V}^{(s,R)}(t)$  здійснювався контроль результатів на предмет їх збіжності. Крок за часом прийнятий рівним 2 мкс, який використовувався у публікації [5]. Маючи як функції  $V^{(s)}(t) = \tilde{V}^{(s)}(t)$  (отримані методом оцифровки графіків), так і функції  $\bar{V}^{(s,R)}(t)$  (отримані методом СЕ), на дру-

гому етапі здійснювалося розв'язання СЛАР (5) відносно вагових коефіцієнтів  $q_n^{(R)}$ , які й визначають конфігурацію шуканого навантаження  $Z^{(R)}(t)$  (див. (1)). Результат ідентифікації представлений кривою 2 на рис. 1,а. Кривою 1 на цьому рисунку зображені результати відновлення контактного навантаження на підставі показань виключно першого тензодатчика, розташованого на відстані 10 мм від центру пластини ( $S = 1$ ).

Із зіставлення кривих 1 і 2 з кривою 0 можна зробити висновок, що як у першому випадку ( $S = 3$ ), так і у другому ( $S = 1$ ), отримано добре узгодження ідентифікованого навантаження з фактичним (штрихова крива). При цьому для даного конкретного розрахункового прикладу з прийнятною точністю результати ідентифікації можуть бути отримані на підставі даних лише з однієї вимірювальної точки ( $S = 1$ ), що суттєво скорочує кількість обчислювальних операцій і, відповідно, час на розрахунок.

### Висновки

У даній роботі представлена методика ідентифікації як функції часу нестационарних навантажень, що діють на конструктивний елемент довільної геометрії. У якості вхідних даних виступають величини, які вважаються доступними для натурних вимірів, а їх зміна у часі обумовлена дією шуканих навантажень. Викладена методика дозволяє звести задачу до розв'язання СЛАР, елементи матриці якої можуть бути визначені експериментально або за допомогою МСЕ. Якість ідентифікації залежить не стільки від точності розв'язання цієї системи, скільки від вірогідності та точності відтворення/моделювання динамічних процесів у досліджуваному конструктивному елементі, проведених з метою побудови матриці. Якість ідентифікації залежить також й від кількості реєструємих величин  $S$ , яку, у загальному випадку, рекомендується приймати не меншою кількості  $R$  ідентифікуємих функцій.

Слід зазначити, що викладена методика може бути використана при розв'язанні широкого класу «граничних обернених задач» механіки деформівного твердого тіла [6], у т.ч. при відновленні впливів іншої фізичної природи.

### Список використаної літератури

1. Соловьев, А. Н. Прямые и обратные задачи для конечных упругих и электроупругих тел / А.Н. Соловьев // Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ.-мат. наук. РГУ, Ростов-н/Д (РФ), 2005. – 296 с.
2. Янчевский, И. В. К проблеме восстановления временной зависимости нестационарного воздействия, приложенного к упругодеформируемому элементу конструкции / И.В. Янчевский // Проблемы машиностроения. – 2015. – Т. 18, № 2. – С. 43-55.



3. *Maia, N. M. M.* Recent advances on force identification in structural dynamics / N.M.M. Maia, Y.E. Lage, M.M. Neves // In book "Advances in vibration engineering and structural dynamics", ed. by F. Beltran-Carbajal. – 2012. – Ch. 6. – P. 103-132.
4. *Тихонов, А. Н.* Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский [и др.]. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
5. *Wu E.* Two methods for determining impact-force history on elastic plates / E. Wu, T.-D. Tsai, C.-S. Yen // Experimental Mechanics. – 1995. – Vol. 35, Iss. 1. – P. 11-18.
6. *Ватульян, А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 223 с.