УДК 628.8

DOI: http://dx.doi.org/10.20535/2219-380415201696514

Ільчишина Д. І. [1]**,** *доцент, к.ф.-м.н.,* **Іванова О. М.** [2]**,** *старший викладач*

ПРО ВПЛИВ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ, ВИКЛИКАНИХ УДАРОМ, НА КОЕФІЦІЄНТ ПОНОВЛЕННЯ

En In the classical theory of the solid bodies collision the non-local dynamic effects caused by impact are not taken into account. These effects include non-local forces of inertia, surface Rayleigh waves, temperature influence, etc.

The present study evaluates the effect of Rayleigh surface waves arising from the collision of two identical bodies on the recovery rate.

Consideration is given to the processes that occur in both bodies. The strength of the dynamic interaction is determined with the assistance of the

[1] *Національний технічний університет України "Київський політехнічних інститут", кафедра приладів та систем керування літальними апаратами*

[2] *Національний технічний університет України "Київський політехнічних інститут", кафедра приладів та систем керування літальними апаратами*

N. A. Kilchevsky results obtained through Somilyana method in conjunction with the Laplace-Carson transformation.

In order to determine the influence of parameters characterizing the surface waves the principle of the least coercion (principle of Gauss) and Chebyshev's theorem on the least deviation from zero of the function on the given interval are applied to the recovery factor.

The gained result indicates a significant effect of Rayleigh waves for the whole collision process: part of the energy in a collision becomes the energy of wave.

Ru В настоящей работе производится оценка влияния поверхностных волн Релея, возникающих при соударении двух одинаковых тел, на коэффициент восстановления. Для определения влияния параметров, характеризующих поверхностные волны, на коэффициент восстановления применяется принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса). Полученный результат указывает на существенное влияние волн Релея на весь процесс соударения: часть энергии при соударении переходит в энергию волнообразования.

Вступ

Дослідження ударних процесів відноситься до найактуальніших проблем сучасної механіки, пов'язаних зі зміною поведінки конструкцій і приладів в умовах дії інтенсивних навантажень імпульсного характеру.

Теорія Г. Герца локального деформування пружних тіл при співударі ігнорує нелокальні динамічні ефекти, а також сили інерції, що супроводжують удар. Згідно з роботами М. О. Лаврентьєва [1] та наслідками з робіт О. М. Дінніка, вплив сил інерції при ударі може бути значним. М. О. Лаврентьєв, досліджуючи принцип дії кумулятивного заряду, відзначив, що за наявності тиску порядку 10^5 атмосфер, вплив інерційних сил в суцільному середовищі домінує над силовими впливами, що залежать від певних фізичних особливостей цього середовища. О. М. Діннік, обчислюючи за теорією Герца головні напруження в центрі зони контакту при співударі, показав, що при швидкості зближення стальних куль близько 1 м/с, напруження σ_z досягає $5\cdot 10^5\ \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}$, а $\sigma_x \approx \sigma_y = 0{,}8\sigma_z$. Еліпсоїд напружень у цьому випадку наближається до сфери, тобто до еліпсоїду напружень у маловяз'кій рідині. За таких умов [1] не можна нехтувати силами інерції.

Для врахування в теорії удару сил інерції, які не враховує класична теорія, М. О. Кільчевський [2] застосував метод Сомільяна в поєднанні з інтегральним перетворенням Лапласа-Карсона. Наближений розв'язок задачі показав, що зображення місцевого стиснення пропорційне зображенню сили динамічної взаємодії в степені 2/3, але коефіцієнт пропорціональності залежить від параметра перетворення. Невизначені елементи у виразі коефіцієнта перетворення знайдені на основі теорії поверхневих хвиль Релея, причиною виникнення яких є удар [4].

Постановка задачі

Метою даної роботи є оцінка впливу нелокальних динамічних ефектів, а саме поверхневих хвиль, що виникають при співударі двох однакових тіл, на коефіцієнт поновлення. Беруться до уваги хвильові процеси, що виникають в обох тілах. Сила динамічної взаємодії знайдена з залученням результатів отриманих М. О. Кільчевським і визначена її залежність від параметрів, що характеризують поверхневі хвилі. Ще Дж. Релей [3] відмічав, що поверхневі хвилі можуть суттєво впливати на процес удару. В роботі [4] досліджено виникнення хвиль Релея при співударі, знайдені аналітичні вирази сили динамічної взаємодії P та місцевого стиснення α в залежності від параметрів δ і ω, що характеризують викликані ударом поверхневі хвилі.

Дослідження впливу хвиль Релея на коефіцієнт поновлення при співударі пружних тіл

Критерієм оцінки тих чи інших теоретичних результатів можна вважати, зокрема, коефіцієнт поновлення, який є інтегральною енергетичною характеристикою процесу співудару.

Для визначення впливу параметрів δ і ω на коефіцієнт поновлення застосовується принцип Гауса (принцип найменшого примушення) і теорема П. Л. Чебишева про найменше відхилення від нуля функції на заданому інтервалі [5].

Сила динамічної взаємодії при співударі пружних тіл за наявності хвиль Релея

$$P = P_0(t) + \delta P_1(t) + \delta P_2(t) + \ldots \quad , \tag{1}$$

де δ – параметр, що означає наявність поверхневих хвиль [4].

Тут

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{V_0}{k}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2^2}{1\cdot 3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi\cdot V_0}}{mk^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{t}{4!} + \ldots\right);$$

$$P_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{V_0}{k}\right)^{\frac{3}{2}}\left[2\left(\frac{2^2}{1\cdot 3}t^{\frac{3}{2}} - \omega^2\frac{2^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}t^{\frac{7}{2}} + \right.\right.$$
$$\left. + \omega^4\frac{2^6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 11}t^{\frac{11}{2}} - \ldots\right) - \frac{6\sqrt{\pi\cdot V_0}}{mk^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{t^4}{4!} - \omega^2\frac{t^6}{6!} + \omega^4\frac{t^8}{8!} - \ldots\right) + \tag{2}$$

$$+\frac{63}{4}\frac{V_0}{m^2k^3}\left(\frac{2^7}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 13}t^{\frac{13}{2}}-\omega^2\frac{2^9}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 17}t^{\frac{17}{2}}+\right.$$

$$\left.+\omega^4\frac{2''}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 21}t^{\frac{21}{2}}-\ldots\right];$$

$$P_2(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{V_0}{k}\right)^{\frac{3}{2}}\left[3\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2^2}{1\cdot 3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\cdot\omega^2\frac{2^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}t^{\frac{7}{2}}+\ldots\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{15\sqrt{\pi\cdot V_0}}{mk^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{t^4}{4!}-2\omega^2\frac{t^6}{6!}+\ldots\right)+\ldots\right].$$

Для визначення параметрів δ і ω зручно застосувати принцип найменшого примушення (принцип Гауса), а в подальшому теорему П. Л. Чебишева про найменше відхилення від нуля функції на заданому інтервалі [5].

Згідно з принципом Гауса дійсному рухові системи відповідає такий рух, для якого примушення системи Z є мінімальним в довільний момент часу.

В даному випадку примушення

$$Z=\left(1-\delta\cos(\omega t)\right)^{\frac{8}{3}}\cdot P^{\frac{4}{3}}(t,\delta,\omega), \tag{3}$$

де сила динамічної взаємодії P має вигляд (2).

Функція Z дорівнює нулю на початку та в кінці процесу співудару, залишаючись весь час додатною. Отже, ця функція повинна найменше відхилятись від нуля на інтервалі, що дорівнює тривалості удару і залежить, в свою чергу, від параметрів δ і ω.

Зберігаючи у виразі $P(t)$ члени з t в степенях не вище за $7/2$, маємо для Z вираз [2]:

$$Z=\left(1-\delta\cos(\omega t)\right)^{\frac{8}{3}}\cdot\left[t^{\frac{3}{2}}(1+2\delta)-\frac{8}{25}\delta\omega^2t^{\frac{7}{2}}\right]^{\frac{4}{3}}. \tag{4}$$

Задача зводиться до визначення значень параметрів δ і ω, за яких функція $Z=Z(t,\delta,\omega)$ найменше відхиляється від нуля в кожній точці інтервалу $T(\delta,\omega)$, рівного тривалості удару. Прирівнюючи до нуля декілька перших членів ряду, що визначає $P(t)$ (2), наближено знаходимо

$$T\cong T_0\left(1-\frac{4}{5}\delta\right), \tag{5}$$

де T_0 – тривалість удару при відсутності впливу поверхневих хвиль.

На підставі теореми П. Л. Чебишева про найменше відхилення від нуля функції Z на інтервалі $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$, отримуємо систему рівнянь для визначення параметрів δ і ω:

$$\left[\frac{4}{35}\cdot\delta\cdot\varphi^2\cdot\left(1-\frac{4}{5}\cdot\delta\right)-\delta-\frac{1}{2}\right]\cdot\sin\varphi\cdot\left(1-\frac{4}{5}\cdot\delta\right)=0$$

$$\begin{gathered}\frac{2}{5}\cdot\delta\varphi\cdot\left[\frac{1}{3}(11-34\cdot\delta)-\frac{4}{7}\varphi^2\cdot\left(1-\frac{4}{5}\delta\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{22}{5}\delta\right)\cdot\sin\varphi\cdot\left(1-\frac{4}{5}\delta\right)+\right.\\ +\left[\frac{3}{2}+3\delta-\frac{21}{20}\cdot\delta\varphi^2\cdot\left(1-\frac{4}{5}\delta\right)^2\right]\cdot\left[\cos\varphi\cdot\left(1-\frac{4}{5}\delta\right)+\right.\\ \left.\left.+\frac{4}{5}\cdot\delta\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\left(1-\frac{4}{5}\delta\right)\right]\right]=0\end{gathered} \tag{6}$$

Тут

$$\delta=\frac{\chi^2}{2A}(M\xi+N\chi);\qquad \varphi=\omega\left(t_1+\frac{T_0}{2}\right); \tag{7}$$

M, N, ξ, χ, ω – амплітудні і параметри поверхневих хвиль; t_1 – точка на інтервалі $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$, де функція Z має максимум.

Перейдемо до безрозмірного часу $\tau=t\left(\frac{V_0}{m^2R^3}\right)^{\frac{1}{5}}$ замінимо частоту ω безрозмірного частотного Ω, тривалість удару T_0 безрозмірного τ_R^*, момент t_1 – безрозмірним τ_1.

Дослідження системи (6) дозволяє знайти спектр значень δ і ω, за яких Z найменше відхиляється від нуля на інтервалі $\left[-\frac{\tau_R^*}{2}, \frac{\tau_R^*}{2}\right]$.

Отримуємо:

$$\delta_n=\frac{1}{\frac{40}{63}n^2\pi^2-2},\quad \Phi_n=\frac{n\pi}{1-\frac{4}{5}\delta_n}, \tag{8}$$

де n = 1, 2, … .

Беручі до уваги (7), маємо:

$$\Omega_n\approx\frac{0,47n\pi}{1-\frac{4}{5}\delta_n}. \tag{9}$$

Для коливань найнижчої частоти (n = 1) знаходимо $\delta = 0,23$, $\Omega = 1,81$.

Оцінимо вплив хвиль Релея на величину коефіцієнта поновлення. Скористуємось рекомендаціями роботи [6]. Сила динамічної взаємодії $P(\tau, \delta, \Omega)$ [4]:

$$P(\tau, \delta, \Omega) = P_0(\tau) + \delta P_1(\tau, \Omega) + \delta^2 P_2(\tau, \Omega) + \ldots \quad , \tag{10}$$

де $P_0(\tau)$ відповідає випадкові відсутності поверхневих хвиль.

Вираз сили $P(\tau, \delta, \Omega)$ в розгорнутому вигляді у безрозмірних параметрах запишеться так:

$$P(\tau, \delta, \Omega) = \left(\frac{mV_0^2}{k}\right)\left[f_0(\tau) + \delta f_1(\tau, \Omega) + \delta^2 f_2(\tau, \Omega) + \ldots\right] . \tag{11}$$

Тут

$$f_0(\tau) = \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\tau^4}{4!} + \frac{21}{8}\cdot\frac{\tau^{\frac{13}{2}}}{\Gamma\left(\frac{15}{2}\right)} - 5\cdot\frac{\tau^8}{8!} + \ldots , \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f_1(\tau) = \Bigg\{ & \left[\frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} - \Omega^2\cdot\frac{\tau^{\frac{7}{2}}}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} + \Omega^4\cdot\frac{\tau^{\frac{11}{2}}}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} - \ldots\right] - \\ & -10\left[\frac{\tau^9}{9!} - \Omega^2\cdot\frac{\tau^{11}}{11!} + \Omega^4\cdot\frac{\tau^{13}}{13!} - \ \ldots\right] + \ldots \Bigg\} , \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} f_2(\tau, \Omega) = 2\cdot & \left[\frac{3}{4}\cdot\frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} - \frac{3}{2}\cdot\Omega^2\cdot\frac{\tau^{\frac{7}{2}}}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} + \ldots\right] - \\ & -\frac{1}{2}\left[\frac{\tau^4}{9!} - 2\cdot\Omega^2\cdot\frac{\tau^6}{6!} + \ \ldots\right] + \ldots \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Коефіцієнт поновлення ε дорівнює [6]:

$$\varepsilon = -1 + \int_0^{\tau_R^*} f(\tau, \delta, \Omega)\cdot d\tau \ . \tag{15}$$

Тут

$$\tau_R^* = \tau^*\cdot\left(1 - \frac{4}{5}\delta\right) \approx 2,61 \ , \tag{16}$$

де τ^* – безрозмірна тривалість удару за відсутності впливу поверхневих хвиль.

Згідно з (11)

$$\varepsilon = -1 + \int_0^{\tau_R^*} f_0(\tau)\cdot d\tau + \delta \cdot \int_0^{\tau_R^*} f_1(\tau,\ \Omega)\cdot d\tau + \delta^2 \cdot \int_0^{\tau_R^*} f_2(\tau,\Omega)\cdot d\tau + \ldots \quad . \tag{17}$$

Обмежуючись в (17) трьома членами, отримаємо у першому наближенні

$$\varepsilon \approx 0{,}67 \ .$$

Отриманий результат вказує на значний вплив хвиль Релея на весь процес співудару: частина енергії під час співудару переходить в енергію хвилеутворення.

Список використаної літератури

1. *Лаврентьев М. А.* Методы теории функций комплексного переменного // М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат/ М., Гостехиздат, 1958.
2. *Кильчевский Н. А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. // Н.А.Кильчевский/ К., «Наукова думка», 1976.
3. *Дж. Сретт* (Лорд Релей) Теория звука. / Дж. Сретт / М., ГИТТЛ, 1955.
4. *Кильчевский Н. А.* О поверхностных волнах, возникающих при соударении упругих тел// Н. А. Кильчевский, Д. И. Ильчишина/ Прикладная механика., 5, в. 7, 1969.
5. *Чебышев П. Л.* Собрание сочинений, т.2, //П. Л. Чебышев /М-Л., Изд. АН СССР, 1947.
6. *Ільчишина Д. І.* Поверхневі хвилі при контактному динамічному стисненні пружних тіл та узагальнення теорії Г.Герца, // Д. І. Ільчишина, Л. М. Шальда/ Труди VIII МНК «Гіротехнологія, навігація, керування», К., 2011.