

**ПРОФЕСОР БУКРЕЄВ Б.Я. ТА ЙОГО БАЧЕННЯ ІСТОРІЇ РОЗВИТКУ
ТЕОРІЇ ВИЗНАЧНИКІВ**

Стаття присвячена історії розвитку теорії визначників. Представлені міркування професора Букреєва Б.Я. щодо внеску в розвиток цієї теорії видатних математиків західної Європи в XVII – XIX століть.

Ключові слова: *лекції, визначник, результат, перестановка, Київський університет*

Борис Якович Букреєв у 1887 році був допущений до читання лекцій з теорії функцій в Університеті Святого Володимира. Він викладав там різні математичні дисципліни такі як основи диференціального і інтегрального числення з вправами, диференціальну геометрію, варіаційне числення, теорію і практику математичних інструментів, історію математики та багато іншого. Багато уваги вчений приділяв популяризації математичних знань.

В своїй викладацькій діяльності Б.Я.Букреєв звертав особливу увагу на основні визначення та викладання теорії ірраціональних чисел, теорії визначників[1]. В 1907 році вийшла його велика наукова праця «Теория иррациональных чисел по Кантору и Гейне». Велике значення в ті роки відіграли такі його наукові праці, як: «Курс определенных интегралов» у 1903 році, «Курс приложений дифференциального исчисления к геометрии» 1904 році, «Теория рядов» 1906 році, у 1912 році «Элементы алгебраического анализа» та у 1907 році «Элементы теории определителей»[2]. Ці твори широко відомі й досі та не втратили своєї наукової цінності.

Борис Якович вільно володів, писав свої праці та аналізував роботи відомих математиків українською, російською, німецькою та англійською мовами, знав італійську та шведську мови. Його наукові праці написані компактно і оригінально. Значний внесок в розвиток математичної культури відіграли його праці з різних розділів математики. Тому вважається за актуальне відслідкувати історію розвитку теорії визначників, яка має велике практичне значення і застосування на сучасному етапі розвитку математики[3].

Борис Якович Букреєв дає історичний екскурс в історію розвитку теорії визначників. Викладає чіткі представлення позначень, теорем, висновків, які дали дослідники цієї теми в минулому такі як Лейбниц, Лаплас, Безу, Вандермонд, Лагранж, Гаус. Простежимо за його думками.

На початку ХХ століття російська і українська математична наукова література були дуже бідні на праці з області теорії визначників. На той час великою бібліографічною рідкістю були праці професора Ярошенко «Теория определителей и ее приложения», яка була надрукована в Одесі в 1872 році, і опублікована в Києві в 1877 році праця «Теория определителей и теория форм. Части I и II.» професора М.Е.Ващенко – Захарченко, який був до речі, як казав сам Борис Якович, «дорогим учителем» Букреєва. Студенти Київського

університету мали змогу частіше за все користуватися невеликими керівництвами викладачів університету, такими як праця професора Шапошникова. Букреєв відмічав, що в цих роботах багато дуже суттєвих питань автори не висвітлюють. Матеріал в окремих главах в курсах з аналітичної геометрії, алгебраїчного аналізу, з аналізу нескінченно малих викладається вельми зжато. Тому Букреєв Б.Я. вважав за доцільне розробити і надрукувати той курс «Лекції по введенню в вищу математику для студентів першого курсу», який він читав для студентів математиків на протязі перших двох семестрів, що в свою чергу обумовило скорочений вигляд лекцій. Але це скорочення тільки позірне. Курс лекцій було видано в Києві за підтримкою Правління Університету Св. Володимира в 1906 році.

Цей курс лекцій складено з одинадцяти глав, в яких розглянуто: попередні відомості, визначники, основні визначення та елементарні властивості, мінори, додаткові мінори, розклад визначника за визначниками нижчого порядку, теорема Лапласа, множення визначників та прямокутних матриць, взаємні визначники, симетричні, косі симетричні та ортогональні визначники, ранг матриці, розв'язання систем лінійних рівнянь, результат і дискримінант, визначник Вронського, функціональний визначник Якобі, визначник Гессе. В усіх главах є достатніми подробицями розглянуті всі найбільш важливі питання теорії визначників. Видно, що перші вісім глав викладають основу теорії визначників, останні три присвячені деяким застосуванням. Перші дев'ять глав налаштовані на читача якому, ще невідомі основи диференціального числення. В останніх двох главах подані короткі відомості про результати, дискримінанти та про деякі спеціальні визначники які більш вживаються на практиці, такі як визначник Вронського, функціональний визначник Якобі та визначник Гессе. Для того, щоб зрозуміти ці глави, необхідно вміти диференціювати функцію і мати поняття про основні властивості алгебраїчних рівнянь.

При складанні курсу Букреєв Б.Я. користувався головним чином лекціями Кронекера, курсом Паскаля, курсом Скотта та старовинним курсом Бальцера[4], крім того він надає корисні історичні відомості, до яких він відправляє читачів, студентів, які мають прагнення вивчати теорію більш глибоко. Борис Якович Букреєв відмічає, що відкриття визначників належить Лебницю. В одному з листів до Лопіталю Лейбниць згадує, що в своїх алгебраїчних вишукуваннях йому довелося користуватися числами замість букв. Причому з цими числами він поступав так, немов це були букви. Відомий математик Лопіталь був дуже здивований з цього приводу. Листування з цієї проблеми між двома математиками відбувалося в далекому 1693 році. Лейбниць розглядав систему трьох лінійних алгебраїчних неоднорідних рівнянь з двома змінними, коефіцієнти позначав парами двох цифр, перша з яких вказувала рівняння, в яке коефіцієнт входить, а друга - те невідоме, при якому коефіцієнт знаходиться:

$$10 + 11x + 12y = 0$$

$$20 + 21x + 22y = 0$$

$$30 + 31x + 32y = 0$$

Таке позначення є прототипом позначення, яке застосовується в теперішній час: всі коефіцієнти однієї і тієї ж системи лінійних рівнянь позначають однією і тією ж буквою. При цій букві в якості нижніх індексів ставлять дві цифри, які мають той самий зміст наповнення що й у Лейбниця. Таким чином попередню систему можна зобразити тепер таким чином:

$$a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0$$

$$a_{20} + a_{21}x + a_{22}y = 0$$

$$a_{30} + a_{31}x + a_{32}y = 0$$

Не зважаючи на те, що новий спосіб позначення коефіцієнтів рівняння зустрічається у Лейбниці в багатьох місцях, а сам автор мав про нього високу думку, ніяких новітніх кроків в сенсі застосування цього способу запису коефіцієнтів для подальшого розвитку теорії виключення невідомих з системи рівнянь, а значить і теорії визначників в роботах Лейбниці не знаходимо. Математики того часу, сучасники Лейбниці і навіть Лопіталь цим питанням не цікавилися. Ідея була забута майже на шістьдесят років. Відновив дослідження цих теорій Крамер, взагалі він це зробив незалежно від Лейбниці. Крамер заново відкриває закон складання визначників. Результати він опублікував в своїй роботі в 1750 році. Для визначення знаків різних членів визначника Крамер вводить поняття про обертання в пермутаціях індексів, якими ми користуємося в сучасній математиці з тією ж самою ціллю. В своїй праці Крамер дає формули розв'язку системи лінійних рівнянь, які по сьогоднішній час відомі під назвою формул Крамера[4]. Цими формулами дуже швидко опанували, а через деякий час їх стали вже вивчати в школі. В 1764 році з'явилася праця Безу, в якій правило Крамера має інший вигляд. Безу був незадоволений, головним чином, правилом знаків. Зміни, які він зробив, зводяться до об'єднання закону утворення членів з законом знаків в одне спільне правило і до встановлення зв'язку між формулами розв'язку системи $n+1$ рівнянь з $n+1$ змінними і формулами розв'язку системи n рівнянь з n змінними (тобто зворотного закону складання формул). Якщо ми маємо систему n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими, коефіцієнти у яких в першому рівнянні a, b, c ; у другому - a', b', c' ; в третьому - a'', b'', c'' , то далі ми можемо поступити таким чином: скласти дві перестановки (Букреєв називає їх «пермутації») ab та ba і написати різницю $ab - ba$. Далі з цими перестановками і буквою c складемо всі можливі перестановки, пам'ятаючи, що потрібно міняти знак всякий раз, коли c змінює своє місце в ab і аналогічно в ba . Тоді отримаємо: $abc - acb - cab - bac - bca - cba$. В подальшому з цими перестановками і буквою d складемо всі можливі комбінації, змінюючи знак кожен раз, коли d змінює своє місце в цих перестановках. Цей процес продовжуємо до тих пір, поки не вичерпаємо всі коефіцієнти першого рівняння. Потім залишаємо букви, які займають перші місця в кожному члені, без змін і візьмемо букви, які стоять на другому місці з однією рисою, потім беремо букви, які стоять на третьому місці з двома рисками і т.ін. Отриманий вираз прирівнюємо нулю і отримуємо результат. Таким Букреєв представляє правило Безу[3].

Згадані математики Лебниць, Крамер, Безу не намагаються ввести будь які символи для скороченого позначення знайдених функцій, а також відокремити питання про вивчення цих функцій від питання про розв'язок системи лінійних рівнянь. Вищезгадану тенденцію ми знаходимо в праці Вандермонда (1772р.), яку можна розглядати як перший досвід логічного, послідовного викладення теорії визначників. Вандермонд вніс деякі зміни в спосіб Лейбниці позначати коефіцієнти. Наприклад, замість пари 23 він пише $\frac{3}{2}$; замість $aa - \frac{a}{a}$. Букреєв Б.Я. вважав, що він ввів дуже простий символ для позначення визначників, який мало в чому поступається сучасному позначенню. Борис Якович аналізує всі запропоновані позначення для визначників. Він відмічає, що замість $\frac{12}{12}$ ми би зараз написали $A_{12} \times A_{22} - A_{21} \times A_{12}$. Причому замість букви А можна було б поставити будь яку іншу букву. Букреєв підкреслює, що достатньо тільки одного погляду на символи, які запропоновані Вандермондом, щоб зрозуміти правило знаків у різних членів. Вандермонд пояснив, що члени можна утворювати не тільки за допомогою перестановок нижніх букв, але і за допомогою перестановок з верхніх букв, і вивів дві теореми[2]. Одна теорема представляє собою відому теорему про зміну знака визначника при транспозиції двох паралельних рядків. До речі, зараз би ми сказали не «паралельні рядки», а сказали «при перестановці будь яких двох рядків або стовпчиків». Інша теорема має своєю метою показати, що єдина зміна, яку може отримати визначник після тієї чи іншої перестановки індексів, тобто букв одного і того ж ряду – це зміна знака визначника. Із інших теорем Вандермонда Букреєв Б.Я. звертає увагу на розклад визначника в суму добутоків із визначників нижчого порядку, що представляє собою частинний випадок більш узагальненої теореми, яку довів Лаплас. Вандермонд виводить свою теорему для випадку визначника парного порядку.

В подальшому своєму аналізі Букреєв Б.Я. звертає увагу на появу в 1772 році праці Лапласа. Коефіцієнти в лінійних рівняннях Лаплас позначає символами $1_{a,1_b,1_c}$, далі: $2_{a,2_b,2_c}$. Він вводить для визначника особливий термін «resultant»; замість терміна Крамера «derangement» застосовує термін «variation», а визначники 2-го та 3-го порядків символічно позначає таким чином: $(1_{a,2_b})$, $(1_{a,2_b,3_c})$. Теореми, які доведені Вандермондом, Лаплас доводить іншим шляхом і теж виводить формули розв'язання системи лінійних неоднорідних рівнянь[2]. Викладення матеріалу у Лапласа, зауважує Букреєв Б.Я., довершено і тому входить до сучасних лекцій без будь-яких змін.

Віддає належне Борис Якович і ряду праць Лагранжа, які з'явилися в 1773 році і відносилися до механіки, геометрії, теорії чисел. Згадані праці були опубліковані в записках Берлінської Академії наук. В працях Лагранжа Букреєв знайшов низку тотожностей, в яких можна розгледіти різні властивості визначників другого, третього, четвертого порядків. Наприклад, така властивість: квадрат визначника третього порядку теж є визначник. Міркування Лагранжа не мають ніякого відношення до задач про виключення змінних з

системи лінійних рівнянь. Результати, отримані Лагранжем тільки набагато пізніше були зв'язані з теорією визначників.

Букреев також дає відомості про роботу Гауса в області теорії визначників. Він відмічає, що Гаус має зовсім інше підґрунтя для своїх міркувань для визначення властивостей визначників. Його праці відносяться до 1801 року. Гаус вивчає квадратичні форми двох і трьох змінних, вводить назву «*numerus determinans*» для деякого виразу, який складено з коефіцієнтів форми, від якого залежать головні властивості і який сьогодні ми називаємо дискримінантом форми. Термін «*determinant*», тобто визначник веде свій початок від Гауса, такий висновок робить Б.Я. Букреев. Потім цей термін взяв для використання Коші, а за ним і інші вчені.

Історичні нариси і відступи в лекціях Букреева Б.Я будуть в великій нагоді для істориків, дослідників, які займаються питаннями математичної символіки[1].

Вже було відмічено, Букреев Борис Якович складав лекції для своїх студентів чітко, доступно, просто і паралельно надає історичні відомості, якими можуть користуватися ті допитливі студенти, які бажають продовжувати свою наукову, педагогічну діяльність в подальшому. В цьому сенсі праця Букреева з теорії визначників має значення не тільки як підручник з лекцій для студентів першого курсу, а і як робота, де доступно простежена історія розвитку теорії визначників, позначень, які прийняті в сучасних лекціях, і не останнє місце – роль великих математиків минулого, які приклали чимало зусиль в напрямку розвитку цієї теорії.

Література

1. Історія Київського університету. 1834 – 1959. – К., 1959. – 629 с.
2. Букреев Б.Я. Элементы теории определителей, Книжн. Магазин В.А. Просяниченко, Киев, 1907, 98 с.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – Москва: Наука, 1968. – [изд. 9-е] – 431 с.
4. Г. Вилейтнер История математики от Декарта до середины XIX столетия, Изд-во Наука, М., - 1966, 508 с.

Мирошниченко Е.В. Профессор Букреев Б.Я. и его видение истории развития теории определителей.

Статья посвящена истории развития теории определителей. Представлены рассуждения профессора Букреева Б.Я. относительно вклада в развитие этой теории выдающимися математиками западной Европы в XVII – XIX столетиях.

Ключевые слова: лекции, определитель, результат, перестановка, Киевский университет.

Miroshnychenko E.V. Professor Boukreev B.J. and his vision of the history of the theory of determinants.

The article is devoted to the history of the theory of determinants. We present arguments professor Bukreeva B.J. relative contribution to the development of the theory of the outstanding mathematicians of Western Europe in the XVII - XIX centuries.

Keywords: lecture, the determinant of the result, rearrangement, the University of Kiev.

Рецензент: Д'яконіхін А.В., канд. істор. наук, доцент.

Стаття подана
9.03.2012