УДК 929:51(091) **Мірошниченко О.В.**

НАУКОВА ПРАЦЯ ПРОФЕСОРА БУКРЕЄВА Б.Я. В ОБЛАСТІ ТЕОРІЇ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

В статті розглядається історія виникнення важливого розділу математики – теорії спеціальних функцій. Представлені імена відомих математиків, які започаткували дану теорію. Висвітлюється внесок професора Київського університету св. Володимира Букреєва Б.Я. в розвиток теорії автоморфних функцій

Ключові слова: *дослідження, теорія, спеціальні функції, автоморфні функції, Київський університет.*

Аналіз історичних подій, фактів розвитку наукових досліджень наповнює історію математики інтересом до минулого і практичною цікавістю до застосування цих досліджень сьогодні. Для того, щоб зрозуміти, яким шляхом йшла наука до певних відкриттів, необхідно переглянути і згадати визначні особистості, що були причетні до цікавих і складних подій в історії математики. Все більше і більше приділяється зараз увага дослідженню історії різних розділів математики через розуміння життєвого і наукового шляху відомої особистості – науковця. Але не всі цікаві і важливі для сьогодення розділи математики отримали повноцінне висвітлення всіх проблем. Таким нам бачиться розділ математики - теорія спеціальних функцій. І тому, актуально переглянути історію виникнення цієї теорії, згадати імена відомих математиків, які започаткували цю теорію, і висвітлити внесок відомого діяча науки, яскравого представника української наукової еліти, професора Київського університету св. Володимира Букреєва Бориса Яковича в розвиток теорії спеціальних функцій, теорію автоморфних функцій.

Будучи у відрядженні за кордоном у Берлінському університеті і Шарлоттенбургському політехнікумі з метою продовження наукової роботи, Букреєв Б.Я. слухав лекції, які допомогли йому визначитися з темою дисертаційної роботи і наукового напряму для подальших досліджень [6]. Він зацікавився теорією автоморфних функцій. В обстановці творчого підйому Борис Якович працював над своєю докторською дисертацією і за два роки закінчив її, користуючись порадами, які йому надавав його улюблений київський університетський вчитель і вчений В.П.Єрмаков. Цей період їх наукової співпраці збагачено інтенсивним листуванням, яке було на велику користь молодому Букреєву і приносило відраду за отриману віддачу і самому Єрмакову.

Саме в цей час роботами французького математика Анрі Пуанкаре (1881-1884рр.) було започатковано основи нового наукового математичного напрямку, що нині класифікується як теорія автоморфних функцій. Нині автоморфними в області D називаються функції $f(z)$ $(z \in D)$, значення яких залишаються інваріантними (незмінними) відносно деякої групи $z' = T_n(z)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ перетворень аргументу z, тобто мають місце рівності $f(z') = f(T_n(z))$. Тут групу перетворень $T_n(z)$ можна задавати з допомогою довільних функціональних залежностей у площині комплексної змінної z. Автоморфні функції можна розглядати як узагальнення всіх відомих періодичних функцій, без застосування яких є просто немислимими ніякі математичні дослідження [3]. До простіших автоморфних функцій слід зарахувати увесь широкий клас періодичних функцій [2]. В цьому відношенні простішими автоморфними функціями можна вважати всі відомі тригонометричні, гіперболічні та еліптичні функції. У другій половині XIX століття ці простіші автоморфні функції були вже досить таки вивченими. Цілком природно, що в подальшому процесі наукового розвитку постало питання пошуку та дослідження автоморфних функцій. Першим, хто наочно довів існування автоморфних функцій на групах, відмінних від звичайних лінійних перетворень, був німецький математик Герман Шварц. Винайдені ним у 1877 році модулярні функції були автоморфними на групах дробово-лінійних перетворень, що переводять деякий круг сам у себе. В подальшому групи перетворень з такими властивостями було названо фуксовими групами, а автоморфні функції на цих групах – фуксовими функціями. У загальному випадку автоморфних функцій попередня властивість перетворення круга самого в себе не виглядала обов'язковою. Тому, як зазначав Букреєв у своїй роботі [1], згадане відкриття модулярної функції Шварца це не тільки окремий спосіб отримання автоморфних функцій спеціального типу, а й перший важливий крок до їх загального вивчення. Другий важливий крок у цьому напрямку було здійснено в роботі німецького математика Імануела Фукса (1880р.), який вперше висунув і реалізував ідею пошуку автоморфних функцій, виходячи з розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Загальну теорію і методи вивчення автоморфних функцій було закладено в роботах французького математика Анрі Пуанкаре в 1881-1883 роках. Ним, зокрема було доведено, що нетривіальні (тобто відмінні від деякої сталої) автоморфні функції можуть існувати тільки на базі розривних груп. Проблема визначення умов, за яких група перетворень стає розривною, виявилася тоді надто складною. Зусиллями Пуанкаре і в цьому напрямку було досягнуто важливих успіхів. Досліджуючи диференціальні рівняння 2-го порядку класу Фукса (це спеціальний тип лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами), він встановив, що їх розв'язки породжують автоморфні, точніше фуксові, або клейнові функції тоді і лише тоді, коли (залежно від кількості особливих точок рівняння) їх параметри задовольняють певним співвідношенням. Відмітимо, що диференціальним рівнянням 2-го порядку класу Фукса (нульового рангу) називається рівняння $w''+p(z)w'+q(z)w=0$, всі особливі точки якого є регулярними або правильними [4]. Пуанкаре першим досліджував питання про структуру області визначення та аналітичний вираз автоморфної функції. Спираючись на встановлену ним інтерпретацію геометрії Лобачевського на комплексній площині, він застосував геометричний підхід при визначенні сітки фундаментальних областей (в термінах Букреєва – полігонів), на які поділяється вся комплексна площина (область визначення автоморфної функції) відповідно до властивостей групи перетворень на цій площині.

Винайдений геометричний підхід дозволив Пуанкаре встановити взаємно-однозначну відповідність між областями відносно простої геометричної форми – багатокутниками у площині Лобачевського - та областями значно складнішої форми – фундаментальними областями групи перетворень автоморфної функції у комплексній площині z. Шукаючи можливі структури автоморфних функцій, Пуанкаре ввів абстрактні (з не окресленими властивостями) розривні групи перетворень і далі, спираючись на властивість інваріантності цих функцій, запропонував їх аналітичні вирази у вигляді розкладень в збіжні ряди спеціального типу (в, так звані, тета-ряди Пуанкаре) [5]. Заглибившись у суть проблеми і ознайомившись з науковими здобутками попередників, Букреєв виробив власну конструкцію дослідження автоморфних функцій, яка складалася з двох положень. Перша: до кожної автоморфної функції можна підійти цілком природним шляхом; і її можна отримати в результати повторення операцій аналітичного продовження до прямого та оберненого конформних відображень деякої області на півплощину. Друга: існує незаперечний зв'язок між автоморфними функціями та розв'язками деяких диференціальних рівнянь.

В першому положенні своєї концепції Букрєєв виходив з таких мотивів.

Ще в першій половині XIX століття такі відомі математики як Ейлер, Лежандр, Абель, Якобі та інші досліджували еліптичні функції (тобто, простіші автоморфні) як обернені до еліптичних інтегралів. Ідею про можливість дослідження автоморфних функцій в якості обернених до деяких прямих функцій можна спробувати перенести з еліптичних функцій на споріднені з ними але складніші. Букрєєв задається питанням: чи не можна спершу дослідити ці прямі функції, а потім, виходячи зі здобутих знань, повернутись до визначення умов, при яких обернені функції стануть автоморфними? Тут варто було б врахувати, що дослідження зв'язків між прямою та оберненою функціями безпосередньо пов'язано з дослідженням властивостей конформних відображень (області на область), що визначаються цими функціями. За спостереженнями Букрєєва перші ж зустрічі з автоморфними функціями на практиці були пов'язані із задачами про конформні відображення. Христофелем та Шварцем було розв'язано задачу (1867-1869рр.) про конформне відображення верхньої півплощини t на внутрішність n-кутника $A_1, A_2, ..., A_n$ у площині z так, що дійсна вісь площини t взаємно - однозначно відображується на контур n-кутника, а деякі точки $a_1, a_2, ..., a_n$ цієї осі відображуються у його вершини $A_1, A_2, ..., A_n$. Функція $z = \Phi(t)$, що визначає таке відображення, була знайдена у вигляді відомого інтеграла Хрістофеля-Шварца ([2], с. 399). Якщо ламана $A_1, A_2, ..., A_n$ не має самоперетинів, то знайдене відображення є взаємно-однозначним, обернена функція $t = F(z)$ задає в цьому випадку зворотне відображення n-кутника з площини z у верхню півплощину t. Характерним тут є те , що вершинам у площині z відповідають у загальному випадку точки розгалуження на дійсній осі площини t. Така властивість перетворення вершин (кутових точок) n-кутника у точки розгалуження привернула, мабуть, Букрєєва до припущення, що при повторних аналітичних продовженнях функції $z = \Phi(t)$ (з верхньої півплощини t у нижню і навпаки) через відрізки між точками $a_k (k = 1, 2, ..., n)$ в решті решт отримаємо повну аналітичну функцію, на множині значень якої обернена функція $t = F(z)$ стане автоморфною щодо певної групи перетворень.

При аналізі зв'язків між властивістю автоморфності функції Якобі та властивостями еліптичного інтеграла повз увагу Букреєва, мабуть, не пройшов той факт, що цей інтеграл є розв'язком диференціального рівняння, особливі точки якого якраз і є точками розгалуження функції $\Phi(t)$. Припущення Букреєва щодо ролі кутових точок границі області при відображенні на півплощину знову ж таки підтвердилось при аналізі конформних відображень у відомій задачі Шварца ([2], с. 406). Шварцем було розглянуто задачу про конформне відображення на верхню півплощину t, так званого, кругового трикутника у площині z. Вершини цього трикутника містились на колі одиничного радіуса $(|z|=1)$, а сторони були дугами кіл, ортогональних до цього кола.

Обговорюючи розглянуте перше положення концепції Букреєва, слід зауважити, що подібних поглядів на виходи до автоморфних функцій при розв'язуванні деяких задач на конформні відображення областей та обернення функцій ще раніше дотримувались німецькі математики Фрідріх Шоткі (1877р.) та Фелікс Клейн (1883р.), з позиції конформних перетворень в своїх роботах вони теж приходили до автоморфних функцій. Але за свідченнями самого Букрєєва, ці роботи були ще тільки окремими дослідженнями в цьому напрямку, в них дуже мало приділялося уваги загальним питанням теорії автоморфних функцій, і саме головне,- встановленню зв'язків, що їх єднають з розв'язками диференціальних рівнянь.

Друге положення концепції Букреєва про перспективність дослідження автоморфних функцій на базі їх зв'язків з деякими типами диференціальних рівнянь в той час (дев'яності роки XIX століття) було вже достатньо теоретично обґрунтованим. Дослідження Фукса (1880) незаперечно засвідчили, що знайдені ним групи перетворень можуть породжуватись тільки тоді, коли коефіцієнти цього рівняння мають особливі точки. Завершеного вигляду ця ідея Фукса про властивості частки двох розв'язків диференціального рівняння знайшла у роботі Пуанкаре. Він з'ясував умови (1884), при виконанні яких група перетворень, пов'язаних з часткою двох розв'язків диференціального рівняння класу Фукса стає розривною, а перетворення з допомогою функції $t = t(z)$ взаємно-однозначним. Тим самим Пуанкаре встановив також умови існування автоморфної функції, інваріантної на групі перетворень, пов'язаних з диференціальним рівнянням. Він започаткував термінологію, за якою групам перетворень і автоморфним функціям, що пов'язані з певними типами диференціальних рівнянь було присвоєно назви цих рівнянь.Так, зокрема, з'явилися назви фуксових груп і фуксових функцій.

В дослідженнях по вивченню автоморфних функцій Букреєв вирішив поєднати обидва підходи своєї концепції, щоб поєднати переваги кожного з них. Підхід з боку конформних перетворень відкривав можливості впливу на автоморфні функції і диференціальні рівняння завдяки геометричній інтерпретації. Свою концепцію дослідження автоморфних функцій Букреєв реалізув в 1889 році у докторській дисертації «О фуксовых функциях нулевого ранга с симметрическим основным полигоном» [1]. Просуваючись по шляху від конформних відображень і їх аналітичних продовжень до груп дробово-лінійних перетворень, відповідних диференціальних рівнянь і автоморфних функцій, він оформив свою працю у формі трьох глав. В першій главі він розглянув деяку область S, обмежену кусково – гладким контуром L у комплексній площині z і поставив задачу про відображення цієї області на верхню півплощину комплексної площини t.

Працюючи над задачею, Борис Якович Букреєв творчо розвинув ідеї Шоткі та Карла Веєрштрасса і дослідив загальні питання побудови прямої та оберненої функцій, $t = F(z)$ та $z = \Phi(t)$, що визначають взаємно – однозначне перетворення області S у площині z на верхню півплощину площини t і навпаки. При дослідженні прямого та оберненого перетворень він широко застосовував, як виявилось, дуже ефективний для таких задач метод розкладання функцій в степеневі ряди. За свідченням Букреєва навіть визнані спеціалісти, такі як Шоткі і Клейн, перспективності розкладань в ряди при розв'язуванні цих задач недооцінили. У другій главі дисертації Б.Я.Букреєв конкретизує геометричні властивості контуру L. У третій главі, виходячи з властивостей розглянутих областей S, породжених ними груп перетворень і автоморфних функцій, Букреєв виводить лінійні диференціальні рівняння другого порядку, для яких ці автоморфні функції є частками двох лінійно – незалежних розв'язків. Тим самим він встановлює безпосередню відповідність між типами областей S та типами диференціальних рівнянь, операції з якими породжують один і той самий клас автоморфних функцій. Досліджуючи структуру цих диференціальних рівнянь, Букреєв не тільки довів, що вони є рівняннями класу Фукса, але і встановив геометричний зміст їх деяких параметрів. В усіх дослідженнях він суттєво спирався на метод розкладення функцій в ряди. Щодо автоморфних функцій це робилося вперше.

Б.Я.Букреєв був першим, хто провів таке глибоке комплексне дослідження автоморфних функцій, ув'язавши в єдине ціле все їх теоретичне підґрунтя: теорію груп, теорію диференціальних рівнянь, теорію аналітичних функцій і конформних відображень.

Наукові уподобання Букреєва в області функції комплексної змінної та автоморфних функцій благотворно впливали на наукові смаки його талановитих учнів та колег таких як М.Ф.Кравчук, І.Я.Штаєрман, П.М.Покровський та інших. Можна ще раз підкреслити важливість і значимість розробок Б.Я.Букрєєва. Предметом його досліджень стала теорія спеціального класу фуксових функцій, а основний метод дослідження – розкладання функцій в ряди - був уперше застосований Борисом Яковичем в теорії фуксових функцій. Дисертація, яку він захистив по цій тематиці, була першим дослідженням в Російській імперії, в якому були одержані вагомі наукові результати в одній із найновіших областей математики XIX століття.

Доречно звернути увагу на те, що на сьогодні згадана праця залишається фундаментальною роботою в області теорії спеціальних функцій.

Література

1.Букреєв Б.Я., О фуксовых функциях нулевого ранга с симметрическим основным полигоном,Универс. Изв., Киев, №5,1889 (докт.дисс.)

2.Маркушевич А.И., Краткий курс теории аналитических функцій. Изд. 4-е, М., Наука, 1978, 416с.

3. Форд Р., Автоморфные функции (пер.с анг), ОНТИНКТП, М.- Л. 1936, 340с.

4.Айкс Е.Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения.- Харьков,1939,140с.

5.УиттекерЭ.Т.,Ватсон Дж.Н., Курс современного анализа, ч.1,2, М.,1963 231с.

6. Історія Київського університету. 1834 – 1959. – К., 1959. – 629 с.

Мирошниченко Е.В. Научная работа профессора Букреева Б.Я. в области теории специальных функций.

В статье рассматривается история возникновения важного раздела математики – теории специальных функций. Представлены имена известных математиков, которые стояли у истоков данной теории. Освещается вклад профессора Киевского университета св. Владимира Букреева Б.Я. в развитие теории автоморфных функций

Ключевые слова: *исследования, теория, специальные функции, автоморфные функции, Киевский университет.*

Miroshnychenko E.V. Advanced study of professor Bukreev B.Y. in area of theory of the special functions

History of origin of important division of mathematics - theories of the special functions is examined in the article. The names of the known mathematicians that stood at the sources of this theory are presented. A contribution is illuminated to development of theory of automorphic functions of professor of the Kyiv university st.Volodymyr BukreevB.Y..

***Keywords**: researches, theory, special functions, automorphic functions, University of Kyiv.*

Рецензент: **Д'яконіхін А.В.,** канд. істор. наук, доцент

Стаття подана
17.03.2012