

ГИСТОГРАММНЫЙ СПОСОБ ГЕНЕРИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ

С.В. Ленков¹, А.В. Селюков², В.О. Браун¹, В.Н. Цыцарев¹, Ю.В. Березовская³

¹Военный институт Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
ул. Ломоносова, 81, Киев, 03680, Украина; e-mail: lenkov_s@ukr.net

²Государственное предприятие «Научный центр точного машиностроения»,
ул. Бориспольская, 9, Киев, 02099, Украина; e-mail: selukov@3g.ua

³Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
ул. Владимирская, 60, Киев, 01601, Украина; e-mail: kjv@univ.kiev.ua

Разработан способ ускоренного генерирования случайных чисел с заданным законом распределения, названный гистограммным. Приведены результаты исследований гистограммного датчика случайных чисел. Даны рекомендации по использованию гистограммных датчиков случайных чисел.

Ключевые слова: случайные числа, гистограмма, датчики, быстродействие, закон распределения

Введение

При исследовании надежности сложных технических систем часто единственным методом эффективного решения задачи остается метод имитационного статистического моделирования [1, 2]. Применение метода статистического моделирования неизбежно предполагает использование различных датчиков (генераторов) случайных чисел, с помощью которых генерируются случайные реализации наработки до отказа отдельных элементов исследуемой технической системы. Статистические модели разрабатываются, как правило, для решения различных оптимизационных задач надежности, в которых требуется многократное получение оценок показателей надежности и качества системы, для которой требуется найти оптимальные значения ее параметров. Поэтому наряду с требованиями точности и адекватности датчиков случайных чисел к ним предъявляются также и требования по быстродействию.

Цель статьи

В [3, 4] разработаны датчики случайных чисел для наиболее часто используемых в задачах надежности законов распределения.

Целью настоящей статьи является разработка нового способа ускоренного генерирования случайных чисел с заданным законом распределения, который мы назвали *гистограммным способом*.

Основная часть

Обычно случайные числа с заданным законом распределения генерируются методом обратной функции, согласно которому вначале генерируется случайная

величина (с. в.) ρ , подчиненная равномерному распределению в интервале $[0,1]$. Затем получается с. в. ξ , имеющая заданное распределение, путем решения уравнения

$$F_{\xi}(\xi) = \rho, \quad (1)$$

где $F_{\xi}(t)$ — функция распределения с. в. ξ .

Если уравнение (1) удается решить в аналитическом виде, то с. в. ξ получается непосредственно из выражения

$$\xi = F_{\xi}^{-1}(\rho), \quad (2)$$

где $F_{\xi}^{-1}(t)$ — функция, обратная по отношению к функции $F_{\xi}(t)$.

К сожалению, уравнение (1) не всегда можно решить аналитически, и для его решения приходится применять какие-либо численные методы, что, естественно, требует определенных затрат машинного времени.

Идея гистограммного способа генерирования с. в. заключается в замене функции распределения (ФР) $F_{\xi}(t)$ ее линейной аппроксимацией, заданной на некотором множестве дискретных точек ее аргумента, то есть ее гистограммой.

Вместо функции $F(t)$ в (1) и (2) нам удобнее использовать функцию надежности (ФН) $P(t)$, которая с функцией $F(t)$ связана соотношением $P(t) = 1 - F(t)$. Гистограмма ФН $P(t)$ в памяти компьютера представляется совокупностью значений (массивом) $\{P_i\}$, где $P_i = P(t_i)$. Будем полагать, что гистограмма построена на множестве равноотстоящих точек аргумента $\{t_i = i \cdot \Delta; i = \overline{1, N_{\Delta}}\}$, где Δ — интервал дискретности; N_{Δ} — число точек, в которых построена гистограмма (рис. 1). Граничное значение области определения гистограммы T_{\max} будем определять из уравнения

$$P(T_{\max}) = \gamma, \quad (3)$$

где γ — малая величина, подбираемая экспериментально.

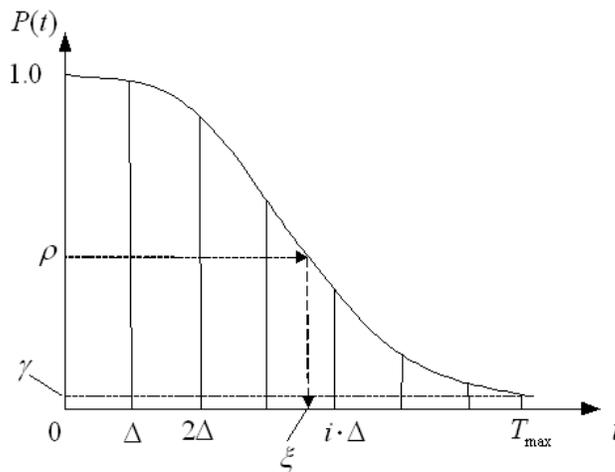


Рис.1. К пояснению принципа работы гистограммного генератора случайных чисел

Количество точек аппроксимации N_{Δ} задается из соображений обеспечения требуемой точности датчика. Величина Δ после определения T_{\max} вычисляется по формуле $\Delta = \frac{T_{\max}}{N_{\Delta}}$.

Для получения с. в. ξ , подчиненной $P(t)$, нужно сделать следующее:

- 1) получить равномерно распределенную в интервале $[0, 1]$ с. в. ρ , и
- 2) рассчитать приближенное значение с. в. ξ по формуле:

$$\xi = t_{i+1} - \frac{\rho - P_{i+1}}{P_i - P_{i+1}} \Delta, \quad i = \overline{0, N_{\Delta} - 1}. \quad (4)$$

В (4) предполагается, что $P(t_0) = P(0) = 1$.

Очевидно, что точность приближения закона распределения с. в. ξ к заданному закону распределения $P(t)$ будет зависеть от точности аппроксимации $\{P_i\}$, которая, в свою очередь, зависит от γ и N_{Δ} . Экспериментально установлено, что вполне приемлемая для практики точность гистограммного датчика обеспечивается при $\gamma \approx 0.001$ и $N_{\Delta} \approx 30$.

Далее приводятся результаты исследований характеристик гистограммного датчика в сравнении с соответствующими «точными» датчиками. В качестве «точных» датчиков для сравнительного анализа были взяты датчики диффузионного немонотонного (DN) и экспоненциального (E) распределений. Эти датчики подробно описаны в [4] и называются соответственно $DNGEN$ и $EGEN$. Построенные нами для этих же распределений гистограммные датчики названы соответственно $DNGEN_G$ и $EGEN_G$.

Датчик $DNGEN$ генерирует с. в., подчиняющиеся DN -распределению, ФР которого имеет следующий вид [3,4]:

$$DN(t; \mu, \nu) = \Phi\left(\frac{\frac{t}{\mu} - 1}{\nu \sqrt{\frac{t}{\mu}}}\right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right) \Phi\left(-\frac{\frac{t}{\mu} + 1}{\nu \sqrt{\frac{t}{\mu}}}\right), \quad (5)$$

где

$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ — нормированная функция нормального распределения;

μ и ν — параметры распределения: μ — параметр масштаба, совпадающий с математическим ожиданием, ν — параметр формы (коэффициент вариации).

Датчик $EGEN$ генерирует с. в., подчиняющиеся E -распределению с ФР

$$E(t; \mu) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right). \quad (6)$$

E -распределение является однопараметрическим с коэффициентом вариации $\nu = 1$.

Для исследования датчиков была разработана программа для ПК, с помощью которой генерируются заданным датчиком последовательности случайных чисел (выборки) заданного объема. Программа разработана в системе программирования Delphi [5], в которой имеется встроенная функция `Random`, предназначенная для генерирования с. в. с равномерным распределением в интервале $[0,1]$. По полученным

выборкам в программе вычисляются оценки математического ожидания $M[\bullet]$ и коэффициента вариации $V[\bullet]$ оценок параметров распределения, для которого генерируются с. в. Вычисляются также оценки коэффициента парной корреляции между выборками $K[X, Y]$, где $X = \{x_i\}$ и $Y = \{y_i\}$ — две различные выборки одной и той же с. в.

С помощью разработанной программы получаются и отображаются на экране ПК гистограммы распределений относительного числа попаданий с. в. в различные интервалы области ее определения. Эти гистограммы предназначены только для визуализации генерируемых с. в. и никак не связаны с гистограммами ФН, используемыми при генерации с. в. гистограммным способом.

Расчеты были произведены для параметров DN -распределения $\mu=1$ и $\nu=0.5$, и параметра E -распределения $\mu=1$. Относительные ошибки ε_μ и ε_ν вычислялись по формулам:

$$\varepsilon_\mu = (\mu - \bar{\mu}) \times \frac{100}{\mu},$$

$$\varepsilon_\nu = (\nu - \bar{\nu}) \times \frac{100}{\nu},$$
(7)

где $\bar{\mu}$ и $\bar{\nu}$ — выборочные оценки параметров μ и ν соответственно.

На рис. 2 показана гистограмма, построенная для равномерно распределенных случайных чисел, получаемых с помощью функции `Random`. На рис. 3 приведены такие же гистограммы для случайных чисел, полученных при помощи «точных» и гистограммных датчиков (объем выборки $N=1000$).

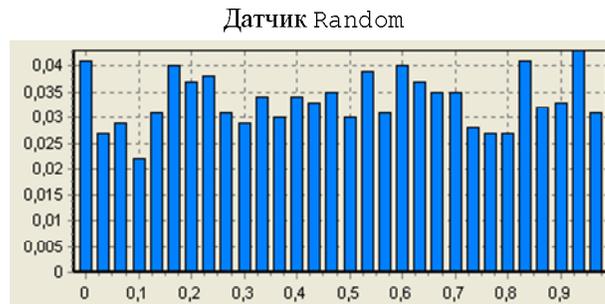


Рис. 2. Гистограмма равномерно распределенных случайных чисел в интервале $[0,1]$

В табл. 1 представлены оценки $M[\bullet]$ и $V[\bullet]$ показателей μ и ν (и соответствующие ошибки ε), полученные по результатам моделирования 30 выборок объемом $N=1000$ каждая.

Следует отметить, что указанные в табл. 1 значения являются случайными реализациями соответствующих оценок, которые изменяются от эксперимента к эксперименту в пределах ошибок ε .

По полученным результатам можно сделать вывод о том, что точные и гистограммные датчики примерно одинаковы по характеристикам точности. Поэтому замена «точных» датчиков их гистограммными аналогами в статистических моделях не приводит к сколько-нибудь заметному ухудшению точности результатов моделирования.

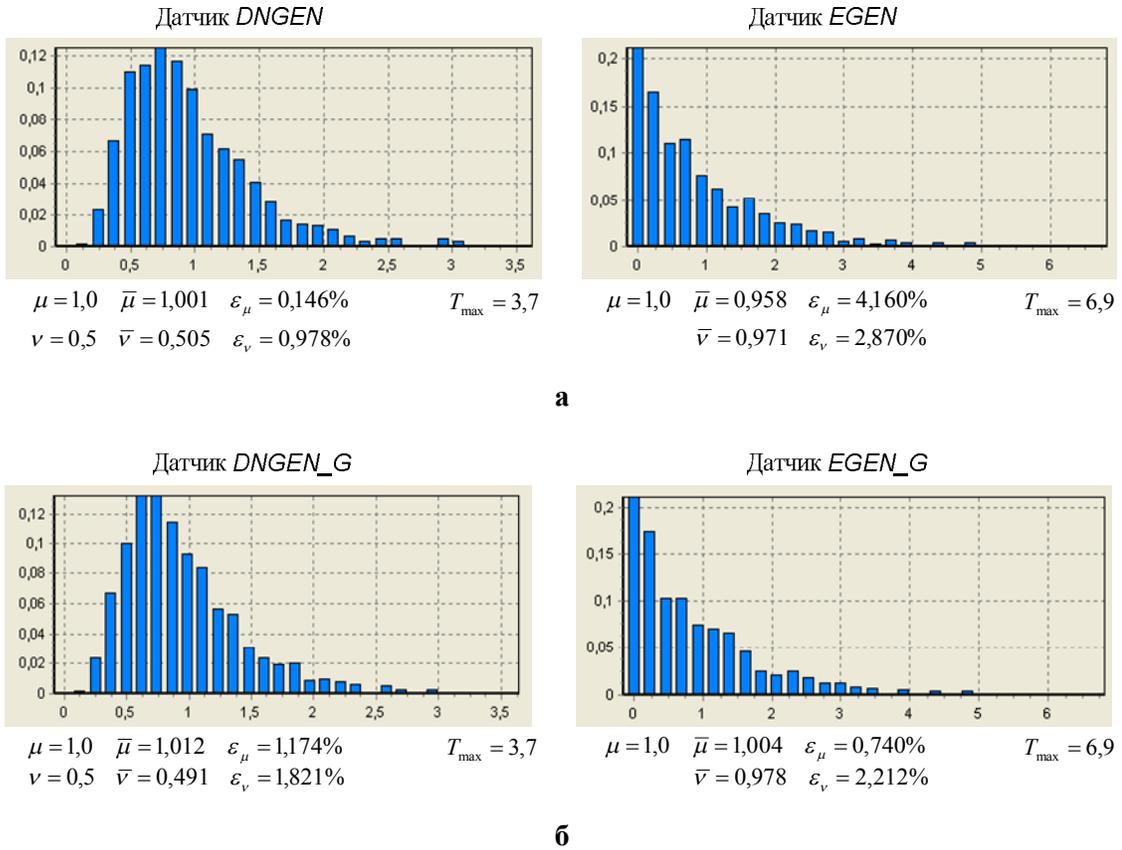


Рис. 3. Примеры гистограмм распределения случайных чисел, генерируемых с помощью «точных» и гистограммных датчиков: а – «точные» датчики; б – гистограммные датчики ($N_{\Delta} = 30$)

Таблица 1.

Характеристики датчиков случайных чисел

Показатель	DN-распределение		E-распределение	
	DNGEN	DNGEN G	EGEN	EGEN G
Математическое ожидание среднего $M[\bar{\mu}]$	0.994	0.999	1.003	0.997
Математическое ожидание коэффициента вариации $M[\bar{\nu}]$	0.496	0.495	0.998	0.990
Относительная ошибка среднего $\varepsilon_{\mu}, \%$	0.511	0.021	0.318	0.277
Относительная ошибка коэффициента вариации $\varepsilon_{\nu}, \%$	0.658	0.868	0.161	0.908
Коэффициент вариации среднего $V[\bar{\mu}]$	0.018	0.015	0.033	0.025
Коэффициент вариации коэффициента вариации $V[\bar{\nu}]$	0.030	0.026	0.028	0.032
Коэффициент парной корреляции $K[X, Y]$	0.046	0.039	0.026	0.038

Для сравнительной оценки быстродействия «точных» и гистограммных датчиков были произведены расчеты по той же программе (с помощью которой получены данные табл. 1) для больших объемов генерируемых выборок, при которых затраты машинного времени на вычисления становятся ощутимыми. Результаты таких расчетов представлены в табл. 2 (данные получены для процессора AMD Athlon II X2 245, 2.90 ГГц).

Таблица 2.

Показатели быстродействия датчиков случайных чисел

Размер выборки N	Время счета для различных датчиков			
	<i>DNGEN</i>	<i>DNGEN G</i>	<i>EGEN</i>	<i>EGEN G</i>
0.1×10^6	13"	3"	3"	3"
0.5×10^6	1'8"	16"	15"	15"
10^6	2'16"	33"	30"	31"
5×10^6	11'29"	2'45"	2'29"	2'33"

По полученным данным хорошо видно, что применение гистограммных датчиков случайных чисел дает существенный выигрыш в скорости счета в случае «сложных» законов распределения. «Сложность» закона распределения здесь понимается в смысле потребности большого объема вычислений для генерирования с. в. К таким «сложным» законам распределения, по-видимому, можно отнести и *DN*-распределение. В случае «простых» законов распределения, к таковым можно отнести *E*-распределение, выигрыш при использовании гистограммного способа практически отсутствует.

Заключение

В заключение можно сделать общий вывод о том, что при разработке статистических моделей, в которых необходимо генерировать случайные величины, подчиняющиеся «сложным» законам распределения, целесообразно использовать гистограммные датчики случайных чисел.

Список литературы

1. Ушаков, И.А. Вероятностные модели надежности информационно-вычислительных систем [Текст] / И.А. Ушаков. — М. : Радио и связь, 1991. — 132 с.
2. Надежность и эффективность в технике [Текст] : справочник в 10 т. / Ред. совет: В.С. Авдеевский (пред.) и др. — М. : Машиностроение, 1986. — .
Т. 3 : Эффективность технических систем / Под ред. В.Ф. Уткина, Ю.В. Крючкова. — 1988. — 328 с.
3. Стрельников, В.П. Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем [Текст] : сборник научных трудов / В.П. Стрельников, А.В. Федухин. — К. : Логос, 2002. — 486 с.
4. Федухин, А.В. К вопросу о статистическом моделировании надежности / А.В. Федухин, Н.В. Сеспедес-Гарсия // Математичні машини і системи. — 2006. — № 1. — С. 156–163.
5. Архангельский, А.Я. Программирование в Delphi 6 [Текст] : монография / А.Я. Архангельский. — М. : Бином, 2002. — 1117 с.

**ГІСТОГРАМНИЙ СПОСІБ ГЕНЕРУВАННЯ ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ
ДОСЛІДЖЕННЯ НАДІЙНОСТІ**

С.В. Ленков¹, О.В. Селюков², В.О. Браун¹, В.М. Цыцарев¹, Ю.В. Березовська³

¹ Військовий інститут Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
вул. Ломоносова, 81а, Київ, 03680, Україна; e-mail: lenkov_s@ukr.net

² Державне підприємство «Науковий центр точного машинобудування»,
вул. Бориспільська, 9, Київ, 02099, Україна; e-mail: selukov@3g.ua

³ Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 60, Київ, 01601, Україна; e-mail: kjv@univ.kiev.ua

Розроблено спосіб прискореного генерування випадкових чисел із заданим законом розподілу, названий гістограмним. Наведено результати досліджень гістограмного датчика випадкових чисел. Надано рекомендації щодо використання гістограмного датчиків випадкових чисел.

Ключові слова: випадкові числа, гістограма, датчики, швидкодія, закон розподілу

**HISTOGRAM METHOD FOR GENERATING RANDOM NUMBERS IN RELIABILITY RESEARCH
TASKS**

Sergey V. Lenkov¹, Oleksandr V. Selyukov², Vadim O. Brown¹, Vadim M. Tsytaryev¹, Julia V. Berezovska³

¹ Military Institute, Taras Shevchenko National University of Kyiv,
81-A Lomonosov str., Kyiv, 03680, Ukraine; e-mail: lenkov_s@ukr.net

² Scientific center of precision engineering, State enterprise,
9 Boryspilska str., Kyiv, 02099, Ukraine; e-mail: selukov@3g.ua

³ Taras Shevchenko National University of Kyiv
64 Volodymyrs'ka str., Kyiv, 01601, Ukraine; e-mail: kjv@univ.kiev.ua

This paper focuses on development of rapid method for random numbers generation according to a given distribution. Developed method named «Histogram». The results of histogram method for generating random numbers research are presented. Recommendations on the use of histogram sensors are given.

Keywords: random numbers, histogram, sensors, processing speed, distribution law