УДК 519.852: 004.424.27.021

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 4 (2014), No. 3, pp. 233-238

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ СИЛ

Б.И. Юхименко

Одесский национальный политехнический университет
просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: pm1987pm@gmail.com

В работе приведена модификация метода ветвей и границ для решения задачи размещения производительных сил для случая, когда выбираем экономически выгодный объем производства и приведенных возможных объемов. Заслуживает внимание способ получения исходного варианта решения, а также способ оценивания подмножеств вариантов.

Ключевые слова: мощность, размещение, метод, алгоритм, скорость сходимости.

Введение

Одной из актуальных проблем в организационном управлении является проблема размещения производительных сил. Определение оптимальных объемов производства, а зачастую и места их размещения, связано с решением ряда экономических и математических задач. Решение этих задач возможно лишь при помощи математических методов и компьютерных технологий, применяемых в последнее время во многих жизнедеятельных ситуациях.

В работе [1] приведен ряд модулей математического описания задачи размещения производительных сил. Конкретная математическая модель может быть собрана из этих модулей в зависимости от того, что считается критерием оптимизации, и какая информация представляется о возможных пунктах и объемах производства в каждом. Следуя приведенной систематизации проблемы, можно построить не одну математическую модель, адекватно описывающую задачу размещения производительных сил, учитывая мотивацию решаемой проблемы, цели и условия размещения.

Цель статьи и постановка заданий

Методы реализации моделей зависят от класса задач оптимизации, которому относится полученная модель. Чаще всего классические методы не приспособлены для конкретной модели, а в некоторых случаях практически нереализуемы.

В данной работе приводится описание модифицированного алгоритма метода ветвей и границ, реализующего модель задачи размещения производительных сил, как задачи частично целочисленного линейного программирования с булевыми переменными.

Актуальность и новизна разработки заключается в том, что для конкретной модели разработан уникальный алгоритм, легко реализуемый в среде пакета Matlab [2].

Основная часть

Рассматривается случай размещения производительных сил, когда критерием оптимизации являются суммарные затраты на строительство или реконструкцию предприятий производителей, производственные расходы, определяемые с учетом объемов производства, и транспортные расходы на доставку готовой продукции для полного удовлетворения спроса потребителей. Считается известными возможные пункты производства, их месторасположения и для каждого пункта даётся перечень объемов производства, один из которых может быть выбран, как самый выгодный. Введем обозначения. Имеем:

- m возможных экономически обоснованных пунктов производства $i=\overline{1,m}$;
- в каждом i-ом пункте производства можно выбрать один объем из заданного списка a_i^k ($k=\overline{1,p_i}$; p_i - длина списка в i-ом пункте);
- n пунктов потребления $j=\overline{1,n}$;
- в каждом j-ом пункте потребления объем потребности заранее известен, обозначим через b_j;
- $\|c_{ij}\|_{i=\overline{1,m};\,j=\overline{1,n}}$ транспортные расходы на перевозку единицы продукции из каждого возможного пункта производства в каждый пункт потребления;
- k_i^k и $s_i^k \cdot a_i^k$ величина капиталовложений и производственные расходы соответственно объему производства (s_i^k - себестоимость единицы продукции при объеме производства a_i^k).

Искомые величины, необходимые для формального представления математической модели, двух типов:

- непрерывные x_{ij}, означающие объемы перевозок из любого пункта производства в любой пункт потребления ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$);
- булевые переменные y_i^k для математического представления комбинаторной процедуры выбора объема производства из списка.

При перечисленных условиях и согласно введенным обозначениям математическая модель имеет вид

$$Z=\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{P_i}s_i^k a_i^k y_i^k+E\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{P_i}k_i^k y_i^k\right\}, \tag{1}$$

где E – коэффициент эффективности капитальных вложений.

При ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le\sum_{k=1}^{P_i}a_i^k y_i^k, i=\overline{1,m}; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{m}b_{j,}j=\overline{1,n}; \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{Pi} y_i^k = 1, i = \overline{1,m}; \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}; \quad (5)$$

$$y_i^k \in \{0,1\}, i = \overline{1,m}; k = \overline{1,p_i}. \quad (6)$$

Правые части ограничений (2) совместно с ограничениями (4) и дополнительными требованиями искомым величинам y_i^k (требование (6)) предопределяют объем производства в пункте производства, которого обозначили через i. Через те же булевые переменные y_i^k записывается величина капиталовложений и производственные затраты, входящие части в целевой функции.

Модель (1)-(6) представляет задачу частично целочисленного линейного программирования, имеет конечное число решений по отношению к переменным y_i^k и может решаться методом ветвей и границ [3]. Метод является переборным методом, относится к классу NP полных алгоритмических проблем. Успешность метода зависит от алгоритмического способа получения оценок множества вариантов и способа разбиения множества на подмножества. Общая методика алгоритмизации метода заключается в расширении-сужении множества вариантов с целью приведения модели задачи к легкореализуемой математической модели. К примеру, для получения оценки множества вариантов задачи целочисленного линейного программирования решается соответствующая задача линейного программирования. Что касается вопроса разбиения конечного множества вариантов на подмножества, то используется идея последовательного построения решения [4]. Последовательная конкретизация значений компонент вектора решений предопределяет подмножество вариантов с конкретными значениями отдельных компонентов. К примеру, если конкретизируется компонента, скажем x_5, то множества вариантов разбивается на два подмножества (случай задачи с булевыми переменными). Одно подмножество содержит все варианты со значением компонента $x_5 = 1$, а второе – все варианты с $x_5 = 0$.

Признак оптимальности метода ветвей и границ призван не только для проверки на оптимальность найденного варианта решения, но и для уменьшения количества пересматриваемых вариантов. В принципе он не зависит от алгоритмического способа оценивания множества вариантов, но его эффективность в смысле отбрасывания не перспективных вариантов зависит от точности получаемых оценок, т.е. от уровня приближенности оценки подмножества вариантов от значений целевой функции его вариантов.

В случае алгоритмизации метода ветвей и границ для реализации модели (1) - (6) множество вариантов решения будут вектора $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, размерность которых (число m) определяется количеством предприятий-производителей, а значения – это выбираемые объемы производства из соответствующих по номеру списков объемов. Вариант решения задачи размещения формируется последовательно, переходя от одного предприятия к другому, выбирая при этом предпочтительный объем производства для каждого предприятия.

Дерево решений интерпретирует последовательное построение решения. На каждом ярусе дерева перечисляются значения конкретизируемой переменной, соответствующие объему производства согласно списку. Для дальнейшего ветвления выбирается вершина на ярусе, которая соответствует предпочтительному объему производства для данного предприятия.

Например. Пусть рассматриваются три предприятия производителя со списком объемов производства a_1^1, a_1^2, a_1^3; a_2^1, a_2^2 и $a_3^1, a_3^2, a_3^3, a_3^4$. Дерево решений для получения одного варианта приведено на рис 1.

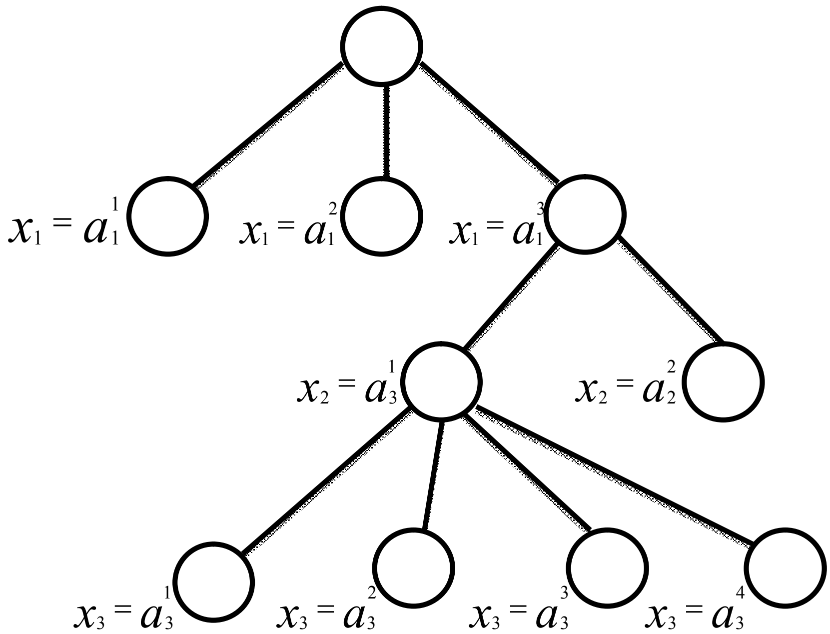

Рис. 1. Дерево решений

На первом ярусе интуитивно приняли предпочтительным объемом производства a_1^3, на втором - a_2^1 и на третьем скажем a_3^3. Вариант решения в таком случае будет вектор $X = \left(a_1^3, a_2^1, a_3^3\right)$.

Предпочтение отдается объему, для которого суммарные расходы минимальные. Расходы состоят из капиталовложений и производственных, соответствующих оцениваемому объему на конкретном ярусе. Транспортные расходы определяются путем решения транспортной задачи, считая, что в данном пункте производства имеется оцениваемый объем производства, а для всех остальных предприятий берутся максимально возможные объемы производства.

Пусть на i_0-ом ярусе выбирается предпочтительный вариант, среди всех объемов, перечисляемых на ярусе $k = \overline{1, p_{1_0}}$.

Согласно введённым обозначениям транспортные расходы определяются путем решения транспортной задачи в постановке

$$Z_{i_0}^k = \min \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_i^{p_i}, i = \overline{1, m}; i \ne i_0;$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_{i_0}^{k};$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,m};$$

$$x_{ij} \ge 0 \text{, для всех } i \text{ и } j.$$

Если решены все транспортные задачи, когда $k = \overline{1, p_{1_0}}$ и если $Z_{i_0}^{k_0} = \min\limits_{k=1,p_{i_0}} \left\{ Z_{i_0}^{k} + K_{i_0}^{k} + S_{i_0}^{k} \cdot a_{i_0} \right\}$, то объем $a_{i_0}^{k_0}$ является предпочтительным объемом. Дальнейшему разбиению подлежит подмножество вариантов, содержащее $x_{i_0} = a_{i_0}^{k_0}$.

Согласно классическому методу ветвей и границ признак оптимальности формируется на основе оценок подмножеств вариантов. Кроме того, передвигаясь по дереву решений вниз, невозможно получить улучшение значения целевой функции, тем самым, и оценок подмножеств. Последовательная конкретизация значений переменных уменьшает количество вариантов в их подмножествах.

В случае алгоритмизации метода ветвей и границ для рассматриваемой задачи размещения производительных сил оценку подмножеств вариантов решения предполагается провести следующим образом.

Пусть оценивается вершина дерева r_1 на уровне r, соответствующая объему производства $a_r^{r_1}$, который не был выбран при построении варианта решения. Транспортные расходы, которые были определены при наилучших условиях, имеются, т.е. $Z_r^{r_1}$.

Производственные расходы и капиталовложения тоже подсчитаны для конкретного объема и составляют $\left(K_r^{r_1} + S_r^{r_1} \cdot a_r^{r_1}\right)$. Для остальных уровней производственные расходы и капиталовложения $i = \overline{1,m}$ и $i \ne r$ выбираются как минимальные для каждого уровня. Таким образом, оценка подмножества вариантов, которое содержит конкретизируемую переменную x_{r_1} как величину $a_r^{r_1}\left(x_{r_1} = a_r^{r_1}\right)$, определяется по формуле

$$\xi\left(a_r^{r_1}\right) = \left\{ \sum_{\substack{i=1_r \\ i \ne r}}^{m} \min_{\substack{k=\overline{1,p_i} \\ k \ne r_1}} \left(K_i^k + S_i^k \cdot a_i^k\right) + \left(K_r^{r_1} + S_r^{r_1} \cdot a_r^{r_1} + Z_r^{r_1}\right) \right\}.$$

При наличии оценок всех подмножеств, которые не входили в прохождении по дереву при определении варианта, можно проверить полученный вариант на оптимальность. Если вариант не оптимальный, то выбирается вершина, как обычно, с наилучшей оценкой.

Выводы

Приведенный алгоритм довольно эффективен в вычислительном смысле. Процедура получения оценок подмножеств вариантов практически приведена к минимальным вычислениям. Практически производится суммирование уже определенных численных величин, которые либо известны изначально, либо определены при выборе предпочтительного варианта. Также следует отметить, что определение величины транспортных расходов на одном ярусе дерева решений может производиться не для каждого объема производства. Если конкретизируемый объем производства не является «узким» местом в ограничениях, то его увеличение не приведет к изменению суммарных транспортных расходов. Решать повторно при другом объеме производства нет необходимости. Скорость сходимости алгоритма делает его приемлемым даже при больших объемах задачи размещения производительных сил.

Алгоритм может быть улучшен в смысле скорости сходимости, если привести эффективную процедуру нумерации предприятий производителей. Экспериментально было показано [5], что выборка компонента при последовательной конкретизации компонент вектора решений в задачах целочисленного линейного программирования с булевыми переменными улучшает скорость сходимости достаточно много.

Алгоритм апробирован и будет применен для определения оптимальных мощностей атомных станций Украины.

Список литературы

1. Юхименко, Б.И. Формализация задач размещения производительных сил. / Б. И. Юхименко // Информатика и математические методы в моделировании. – 2012. – С. 337-343.
2. Чен, К. Matlab в математических исследованиях / К. Чен, П. Джимблин, А. Ирвинг – М.: Мир, 2001. – 346 с.
3. Корбут, А. А. Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, 1969. – 320 с.
4. Михалевич, В. С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. / В.С. Михалевич // Кибернетика. – 1965. - №1. – С. 45-55; №2 – С. 85-88.
5. Юхименко, Б. И. Сравнительная характеристика алгоритмов метода ветвей и границ для решения задач целочисленного линейного программирования / Б. И. Юхименко, Ю. Ю. Козина // Труды Одесского политехнического университета. – 2005. – вып. 2 – С. 199-204.

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ГІЛОК І МЕЖ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ПРОДУКТИВНИХ СИЛ

Б. І. Юхименко

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: pm1987pm@gmail.com

У роботі наведена модифікація методу гілок і меж для вирішення задачі розміщення продуктивних сил для випадку, коли вибираємо економічно вигідний обсяг виробництва і наведених можливих обсягів. Заслуговує уваги спосіб отримання початкового варіанту рішення, а також спосіб оцінювання підмножин варіантів.
Ключові слова: потужність, розміщення, метод, алгоритм, швидкість збіжності

MODIFICATION OF A BRANCH AND BOUND METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM OF PLACEMENT OF PRODUCTIVE RESOURCES

B.I. Yukhimenko

Odesa National Polytechnic University,
1 Shevchenko Str., Odesa, 65044, Ukraine; e-mail: pm1987pm@gmail.com

In this paper, the authors present a modification of a branch and bound method for solving the problem of placement of productive resources for the case of selecting an economic production output from specified possible outputs. Worthy of notice are the method to obtain an initial solution as well as the method to assess the subsets of solutions.
Keywords: capacity, placement, algorithm, rate of convergence.