

АНАЛОГОВА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ ЗУБЧАСТОЇ ПЕРЕДАЧІ

П. В. Дяченко

Черкаський державний технологічний університет,
бул. Шевченка 460, м. Черкаси, 18006, Україна, e-mail: dpv-orion@yandex.ru

Проведено адаптацію математичної моделі динаміки коливальних процесів одноступінчастої зубчастої передачі до вигляду, зручного для застосування аналогового моделювання. Початкову математичну модель подано у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат, визначених відповідною схемою динаміки механічної системи. Наведено вигляд базової математичної моделі з детальним описом параметрів, що її складають; показано перехід до моделі у частотному вигляді та загальну блок-схему аналогового моделювання, отриману на її основі.

Ключові слова: математична модель, аналогова модель, динаміка коливальних процесів, узагальнені координати, система диференціальних рівнянь.

Вступ

Проблема дослідження та моделювання динаміки коливальних процесів механічних систем, що містять механізми з зубчастими передачами, залишається актуальною і на сьогодні, у зв'язку зі зростаючими вимогами щодо якості таких систем. Збільшення швидкостей руху робочих органів, зниження матеріалоемності, підвищення динамічних навантажень внаслідок вібрацій і ударів, необхідність забезпечення надійної роботи обладнання та безпечних умов праці – чинники, що визначають актуальність задачі віброзахисту механічних систем.

Математичні моделі аналізу динаміки механічних систем, зазвичай являють собою системи лінійних диференціальних рівнянь, розв'язування яких, в залежності від постановки задачі та складності самої моделі, можна здійснювати використовуючи аналітичні або чисельні методи.

Динамічні процеси у механічних системах, за умови врахування великої кількості інерційно-пружних та демпфуючих параметрів, описуються у загальному випадку системами диференціальних рівнянь великої розмірності. Складність обчислень при розв'язуванні систем диференціальних рівнянь такого вигляду, застосовуючи відомі чисельні методи [3, 4], для деяких видів динамічного аналізу виявляється досить складною. До таких видів аналізу можна віднести наприклад, спектральний, або лінійний динамічний аналіз перехідних процесів у механічній системі. Одним з ефективних способів реалізації математичної моделі при дослідженні динаміки механічних систем, окрім аналітичного та чисельного, є спосіб що ґрунтується на використанні аналогового (електронного) моделювання [1]. Переваги такого способу моделювання порівняно з іншими стають очевидними при моделюванні різноманітних режимів динамічної навантаженості зубчастої передачі (наприклад, аналізу реакції передачі на зовнішній вплив, залежний від часу).

Електронне моделювання процесу полягає у його відтворенні на електронній моделі, що дає можливість дослідити як поведінку окремих елементів механічної системи, так і систему в цілому. Порівняно з іншими видами моделювання, аналогове

має ряд характерних властивостей та переваг, таких як висока швидкодія, робота у реальному часі, зручна і наочна форма введення-виведення даних, простота набору і програмування задачі, можливість під'єднання до складу моделюючого комплексу широкого набору приладів, власна безінерційність розв'язуючих елементів, відсутність впливу власних характеристик розв'язуючих елементів моделі на результати досліджень, можливість відтворення типових нелінійностей і шматково-лінійної апроксимації складних нелінійних залежностей, можливість спостерігати на екрані осцилографа коливання або реєструвати їх на вході будь-якого елемента системи і на його виході.

Існують два основних способи аналогового моделювання – за диференціальними рівняннями та за структурними схемами [6]. При постановці задачі аналогового моделювання обирається відповідний спосіб та складається схема моделювання, що являє собою електричне з'єднання типових функціонально-розв'язуючих елементів (головним чином операційних підсилювачів, перемножувачів, суматорів, інтеграторів).

Мета статті та постановка задачі

Метою даної статті є адаптація попередньо розробленої автором математичної моделі динаміки зубчастої передачі, для задач аналогового (електронного) моделювання протікаючих у ній коливних процесів.

Для досягнення поставленої у статті мети, розв'язуються такі *задачі*:

1. Початкова (базова) математична модель динаміки одноступінчастої евольвентної косозубої зубчастої передачі, шляхом еквівалентних перетворень приводиться до частотного вигляду;

2. На основі отриманої частотної моделі створюється загальна блок-схема аналогового моделювання, яка може бути реалізована засобами будь-якого моделюючого середовища.

Основна частина

Запропонована автором у роботі [2] математична модель динаміки одноступінчастої евольвентної косозубої зубчастої передачі, являє собою систему 14-ти лінійних диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат, складених на основі рівнянь Лагранжа другого роду, і має вигляд:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & J\ddot{\varphi} = -k_1(\varphi - \varphi_1) + M; \\
 2. \quad & J_{x1}\ddot{\phi}_1 = k_1(\varphi - \varphi_1) - c_3(t)r_{B1}R_1; \\
 3. \quad & J_{x2}\ddot{\phi}_2 = -k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + c_3(t)r_{B2}R_2; \\
 4. \quad & J_3\ddot{\phi}_3 = k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + M_3; \\
 5. \quad & J_{y1}\ddot{\phi}_1^y = -C'_{1z}(z_1 - l_1\phi_1^y)l_1 + C''_{1z}(z_1 + l_2\phi_1^y)l_2 + c_3(t)\xi R_3; \\
 6. \quad & J_{y2}\ddot{\phi}_2^y = -C'_{2z}(z_2 - l_1\phi_2^y)l_1 + C''_{2z}(z_2 + l_2\phi_2^y)l_2 - c_3(t)\xi R_4; \\
 7. \quad & J_{z1}\ddot{\phi}_1^z = -C'_{1y}(y_1 - l_1\phi_1^z)l_1 + C''_{1y}(y_1 + l_2\phi_1^z)l_2 + c_3(t)r_{B1}tg\beta_0 R_5;
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$8. J_{z2} \ddot{\phi}_2^Z = -C'_{2Y} (y_2 - l_1 \phi_1^Z) l_1 + C''_{2Y} (y_2 + l_2 \phi_2^Z) l_2 - c_3(t) r_{B2} \operatorname{tg} \beta_0 R_6;$$

$$9. m_1 \ddot{x}_1 = C_{1X} x_1 + c_3(t) (\operatorname{tg} \beta_0 + 1) R_7;$$

$$10. m_2 \ddot{x}_2 = C_{2X} x_2 + c_3(t) (\operatorname{tg} \beta_0 + 1) R_8;$$

$$11. m_1 \ddot{y}_1 = C'_{1Y} (y_1 - l_1 \phi_1^Z) + C''_{1Y} (y_1 + l_2 \phi_1^Z) + c_3(t) R_9; \tag{1}$$

$$12. m_2 \ddot{y}_2 = C'_{2Y} (y_2 - l_1 \phi_2^Z) + C''_{2Y} (y_2 + l_2 \phi_1^Z) - c_3(t) R_{10};$$

$$13. m_1 \ddot{z}_1 = C'_{1Z} (z_1 - l_1 \phi_1^Y) + C''_{1Z} (z_1 + l_2 \phi_1^Y) + c_3(t) R_{11};$$

$$14. m_2 \ddot{z}_2 = C'_{2Z} (z_2 - l_1 \phi_2^Y) + C''_{2Z} (z_2 + l_2 \phi_2^Y) - c_3(t) R_{12}.$$

У математичній моделі (1) враховано крутильні (радіальні), та лінійні (поперечно-осьові) коливання ділянок валів і зубчастих коліс у трьох площинах. Відповідність між рівняннями системи (1) та коливаннями, які вони описують, відображає таблиця 1, де ділянка валу 1 означає проміжок між привідним двигуном та зубчастим колесом 1, а ділянка валу 2 – між зубчастим колесом 2 та приєднаною масою зовнішнього навантаження відповідно.

Таблиця 1.

Відповідність між рівняннями системи (1) та описуваними коливаннями

| № | Ліва частина рівняння | Тип коливання | Елемент коливання | Вісь |
|-----|--------------------------|---------------|-------------------|-------|
| 1. | $J \ddot{\phi}$ | крутильні | Ділянка валу 1 | x_1 |
| 2. | $J_{x1} \ddot{\phi}_1$ | | Зубчасте колесо 1 | x_1 |
| 3. | $J_{x2} \ddot{\phi}_2$ | | Зубчасте колесо 2 | x_2 |
| 4. | $J_3 \ddot{\phi}_3$ | | Ділянка валу 2 | x_2 |
| 5. | $J_{y1} \ddot{\phi}_1^y$ | | Зубчасте колесо 1 | y_1 |
| 6. | $J_{y2} \ddot{\phi}_2^y$ | | Зубчасте колесо 2 | y_2 |
| 7. | $J_{z1} \ddot{\phi}_1^z$ | крутильні | Зубчасте колесо 1 | z_1 |
| 8. | $J_{z2} \ddot{\phi}_2^z$ | | Зубчасте колесо 2 | z_2 |
| 9. | $m_1 \ddot{x}_1$ | поздовжні | Зубчасте колесо 1 | x_1 |
| 10. | $m_2 \ddot{x}_2$ | | Зубчасте колесо 2 | x_2 |
| 11. | $m_1 \ddot{y}_1$ | поперечні | Зубчасте колесо 1 | y_1 |
| 12. | $m_2 \ddot{y}_2$ | | Зубчасте колесо 2 | y_2 |
| 13. | $m_1 \ddot{z}_1$ | | Зубчасте колесо 1 | z_1 |
| 14. | $m_2 \ddot{z}_2$ | | Зубчасте колесо 2 | z_2 |

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) може бути реалізований як у часовій, так і у частотній областях, залежно від постановки задачі та застосованого

методу розв'язання. Пошук розв'язку у часовій області являє собою задачу Коші для систем диференціальних рівнянь, а у частотній – пов'язаний з розв'язуванням спектральних задач лінійної алгебри – (повна або часткова проблема власних чисел матриці) [3, 4]. У першому випадку розв'язком системи диференціальних рівнянь (1) буде побудова функцій, які виражають часову залежність змінних, що описують стан системи (фазових координат), у другому – спектр власних частот і форм коливань механічної системи. Отримані частоти власних коливань можна використовувати як інформаційні частоти для визначення резонансних зон при вібродіагностиці та оцінці якості динамічної системи засобами комп'ютерного моделювання.

Прийняті у математичній моделі (1) позначення можна умовно розділити на групи, до складу яких входять вектор узагальнених координат, конструктивні, геометричні, інерційно-пружні, демпфуючі та динамічні параметри механічної системи. Зокрема, вектор узагальнених координат містить 14 компонент і має вигляд $q = \{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \phi_1^y, \phi_1^z, \phi_2^y, \phi_2^z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2\}^T$, де:

$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – кути повороту приєднаних мас та ділянок валів навколо осей x_1, x_2 ;

$\phi_1^y, \phi_1^z, \phi_2^y, \phi_2^z$ – кути повороту шестерні та колеса навколо осей y_1, y_2 та z_1, z_2 ;

$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ – лінійні переміщення шестерні та колеса вздовж осей x, y, z .

Конструктивні та масо-жорсткісні параметри механічної системи складають:

m_1, m_2 – маси зубчастих коліс;

k_1, k_2 – крутильні жорсткості валів;

C'_{1z}, C''_{1z} – жорсткості опор вхідного валу по осі z ;

C'_{1y}, C''_{1y} – жорсткості опор вхідного валу по осі y ;

C_{x1} – жорсткість опори вхідного валу по осі x ;

C'_{2z}, C''_{2z} – жорсткості опор вихідного валу по осі z ;

C'_{2y}, C''_{2y} – жорсткості опор вхідного валу по осі y ;

C_{x2} – жорсткість опори вхідного валу по осі x .

Геометричні параметри:

r_{b1}, r_{b2} – радіуси основних кіл зубчастих коліс;

ξ – поточна координата точки контакту зубців вздовж осей x ;

α_i – торцевий кут зачеплення; β_0 – кут нахилу зуба;

l_1, l_2 – довжини валів; $\delta\varphi + j$ – сума похибки кроку зачеплення та бічного зазору зачеплення.

Динамічні параметри:

J, J_3 – моменти інерції приєднаних мас двигуна, та навантаження відносно осі x ;

J_{x1}, J_{x2} – моменти інерції відносно осі x ділянок валів між зубчастими колесами та приєднаними масами відповідно;

J_{y1}, J_{y2} – моменти інерції зубчастих коліс відносно осі y ;

J_{z1}, J_{z2} – моменти інерції зубчастих коліс відносно осі z ;

M, M_3 – крутний момент двигуна, та момент опору механізму навантаження відповідно.

Демпфуючі параметри враховані у подальших модифікаціях базової математичної моделі.

Члени $R_1 - R_{12}$, що входять до системи рівнянь (1) являють собою циклічно повторювані функції, що враховують похибки зачеплення реальної зубчастої передачі, тобто зміщення точки контакту зубців по відповідних осях. Зокрема, похибки зачеплення мають вигляд:

$$R_1 = R_2 = R_7 = R_8 = (x_1 - x_2) - \text{по осі } x;$$

$$R_5 = R_6 = R_9 = R_{10} = \frac{1}{\sin \alpha_t} [(y_1 - y_2) + (\phi_1^z - \phi_2^z) r_{b1} \operatorname{tg} \beta_0] - \text{по осі } y;$$

$$R_3 = R_4 = R_{11} = R_{12} = \frac{1}{\cos \alpha_t} [(z_1 - z_2) + (\phi_1^y - \phi_2^y) \xi] + r_{b1} \varphi_1 - r_{b2} \varphi_2 + \operatorname{tg} \beta_0 (x_1 - x_2) + \delta \varphi + j$$

по осі z .

Сумарна похибка зачеплення A по всіх осях буде складатись з окремих похибок по кожній осі і набуде вигляду [2]:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\cos \alpha_t} [(z_1 - z_2) + (\phi_1^y - \phi_2^y) \xi] + r_{b1} \varphi_1 - r_{b2} \varphi_2 + \operatorname{tg} \beta_0 (x_1 - x_2) + \delta \varphi + j + \\ &+ \frac{1}{\sin \alpha_t} [(y_1 - y_2) + (\phi_1^z - \phi_2^z) r_{b1} \operatorname{tg} \beta_0] + (x_1 - x_2) = \\ &= A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta \varphi). \end{aligned}$$

На початковому етапі створення аналогової моделі динаміки зубчастої передачі введемо у диференціальні рівняння руху системи (1) лінійні та крутильні (радіальні) частоти, де $\omega^2 = \frac{c}{m}$ – лінійна частота, $\nu^2 = \frac{C_{кр}}{J}$ – крутильна частота, вважаючи жорсткість у цих виразах постійною. Враховуючи змінність жорсткості зачеплення в диференціальних рівняннях, подамо змінну жорсткість у вигляді $C_{3кр}(t) = C_{3кр}^{\max} f(t)$, де $f(t)$ – безрозмірна функція зміни крутильної жорсткості, використовуючи зв'язок між крутильними та лінійними жорсткостями $C_{3кр}(t) = r_{b1}^2 C_3$, де під $C_{3кр}$ та C_3 маються на увазі максимальні значення і вирази для частот. Введемо до розгляду частоти, які діють у системі з врахуванням характеру пружних деформацій та зміни жорсткості зачеплення $C_3(t) = C_3^*$.

Крутильні частоти коливань:

$$\begin{aligned} \nu^2 &= \frac{k}{J}; \nu_1^2 = \frac{k}{J_{x1}}; \nu_{x1}^2 = r_{b1}^2 \frac{C_3^*}{J_{x1}}; \nu_2^2 = \frac{k_1}{J_{x2}}; \nu_{x2}^2 = r_{b2}^2 \frac{C_3^*}{J_{x2}}; \nu_3^2 = \frac{k_1}{J_3}; \nu_{y1}^2 = l_1^2 \frac{C_{1z}'}{J_{y1}}; \\ \nu_{y1}^{\prime\prime 2} &= l_2^2 \frac{C_{1z}''}{J_{y1}}; \nu_{y1}^2 = r_{b1}^2 \frac{C_3^*}{J_{y1}}; \nu_{y2}^2 = l_1^2 \frac{C_{2z}'}{J_{y2}}; \nu_{y2}^{\prime\prime 2} = l_2^2 \frac{C_{2z}''}{J_{y2}}; \nu_{y2}^2 = r_{b2}^2 \frac{C_3^*}{J_{y2}}; \nu_{z1}^{\prime\prime 2} = l_1^2 \frac{C_{1y}'}{J_{z1}}; \\ \nu_{z1}^{\prime\prime 2} &= l_2^2 \frac{C_{1y}''}{J_{z1}}; \nu_{z1}^2 = r_{b1}^2 \frac{C_3^*}{J_{z1}}; \nu_{z2}^2 = l_1^2 \frac{C_{2y}'}{J_{z2}}; \nu_{z2}^{\prime\prime 2} = l_2^2 \frac{C_{2y}''}{J_{z2}}; \nu_{z2}^2 = r_{b2}^2 \frac{C_3^*}{J_{z2}}. \end{aligned}$$

Лінійні частоти коливань:

$$\omega_1^2 = \frac{C_3^*}{m_1}; \omega_{1x}^2 = \frac{C_{1x}}{m_1}; \omega_2^2 = \frac{C_3^*}{m_2}; \omega_{2x}^2 = \frac{C_{2x}}{m_2}; \omega_{1y}^2 = \frac{C_{1y}'}{m_1}; \omega_{1y}^{\prime\prime 2} = \frac{C_{1y}''}{m_1}; \omega_1^2 = \frac{C_3^*}{m_1}; \omega_{2y}^2 = \frac{C_{2y}'}{m_2}; \omega_{2y}^{\prime\prime 2} = \frac{C_{2y}''}{m_2};$$

$$\omega_{1z}^{\prime 2} = \frac{C_{1z}'}{m_1}; \omega_{1z}^{\prime\prime 2} = \frac{C_{1z}''}{m_1}; \omega_{2z}^{\prime 2} = \frac{C_{2z}'}{m_2}; \omega_{2z}^{\prime\prime 2} = \frac{C_{2z}''}{m_2}.$$

З урахуванням введених позначень, система диференціальних рівнянь (1) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= v^2(\varphi - \varphi_1) + \frac{M}{J}; \\ \ddot{\varphi}_1 &= -v^2(\varphi - \varphi_1) + \frac{k_{x1}^2}{r_{b1}} \cdot A \cdot f(t); \\ \ddot{\varphi}_2 &= v_2^2(\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{k_{x1}^2}{r_{b2}} \cdot A \cdot f(t); \\ \ddot{\varphi}_3 &= -v_3^2(\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{M_3}{J_3}; \\ \ddot{\phi}_1^y &= -\frac{v_{y1}^{\prime 2}}{l_1}(z_1 - l_1\phi_1^y) + \frac{v_{y1}^{\prime\prime 2}}{l_2}(z_1 + l_2\phi_1^y) + \frac{v_{y1}^2}{r_{b1}^2} \cdot \xi \cdot \frac{1}{\cos \alpha_t} \cdot A \cdot f(t); \\ \ddot{\phi}_2^y &= -\frac{v_{y2}^{\prime 2}}{l_1}(z_2 - l_1\phi_2^y) + \frac{v_{y2}^{\prime\prime 2}}{l_2}(z_2 + l_2\phi_2^y) - \frac{v_{y2}^2}{r_{b2}^2} \cdot \xi \cdot \frac{1}{\cos \alpha_t} \cdot A \cdot f(t); \\ \ddot{\phi}_1^z &= -\frac{v_{z1}^{\prime 2}}{l_1}(y_1 - l_1\phi_1^z) + \frac{v_{z1}^{\prime\prime 2}}{l_2}(y_1 + l_2\phi_1^z) + \frac{v_{z1}^2}{r_{b1}^2} \cdot \text{tg} \beta_0 \cdot \frac{1}{\sin \alpha_t} \cdot A \cdot f(t); \\ \ddot{\phi}_2^z &= -\frac{v_{z2}^{\prime 2}}{l_1}(y_2 - l_1\phi_2^z) + \frac{v_{z2}^{\prime\prime 2}}{l_2}(y_2 + l_2\phi_2^z) - \frac{v_{z2}^2}{r_{b2}^2} \cdot \text{tg} \beta_0 \cdot \frac{1}{\sin \alpha_t} \cdot A \cdot f(t); \\ \ddot{x}_1 &= \omega_{1x}^2 x_1 + \omega_1^2 \cdot f(t) \cdot (\text{tg} \beta_0 + 1) \cdot A; \\ \ddot{x}_2 &= \omega_{2x}^2 x_2 + \omega_2^2 \cdot f(t) \cdot (\text{tg} \beta_0 + 1) \cdot A; \\ \ddot{y}_1 &= \omega_{1y}^{\prime 2}(y_1 - l_1\phi_1^z) + \omega_{1y}^{\prime\prime 2}(y_1 + l_2\phi_1^z) + \omega_1^2 \cdot f(t) \cdot \frac{1}{\sin \alpha_t} \cdot A; \\ \ddot{y}_2 &= \omega_{2y}^{\prime 2}(y_2 - l_1\phi_2^z) + \omega_{2y}^{\prime\prime 2}(y_2 + l_2\phi_2^z) - \omega_2^2 \cdot f(t) \cdot \frac{1}{\sin \alpha_t} \cdot A; \\ \ddot{z}_1 &= \omega_{1z}^{\prime 2}(z_1 - l_1\phi_1^y) + \omega_{1z}^{\prime\prime 2}(z_1 + l_2\phi_1^y) + \omega_1^2 \cdot f(t) \cdot \frac{1}{\cos \alpha_t} \cdot A; \\ \ddot{z}_2 &= \omega_{2z}^{\prime 2}(z_2 - l_1\phi_2^y) + \omega_{2z}^{\prime\prime 2}(z_2 + l_2\phi_2^y) - \omega_2^2 \cdot f(t) \cdot \frac{1}{\cos \alpha_t} \cdot A. \end{aligned} \tag{2}$$

Прийнявши позначення:

$$B_1 = \frac{1}{r_{b1}}; B_2 = \frac{1}{r_{b2}}; B_3 = \frac{\xi}{r_{b1}^2 \cos \alpha_t}; B_4 = \frac{\xi}{r_{b2}^2 \cos \alpha_t}; B_5 = \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{r_{b1} \sin \alpha_t};$$

$$B_6 = \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{r_{b2} \sin \alpha_t}; B_7 = B_8 = \operatorname{tg} \beta_0 + 1; B_9 = B_{10} = \frac{1}{\sin \alpha_t}; B_{11} = B_{12} = \frac{1}{\cos \alpha_t},$$

отримуємо загальний вигляд частотної математичної моделі:

$$\ddot{\varphi} = v^2(\varphi - \varphi_1) + \frac{M}{J};$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -v^2(\varphi - \varphi_1) + v_{x1}^2 \cdot f(t) \cdot A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_1;$$

$$\ddot{\varphi}_2 = v_2^2(\varphi_2 - \varphi_3) + v_{x2}^2 \cdot f(t) \cdot A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_2;$$

$$\ddot{\varphi}_3 = -v_3^2(\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{M_3}{J_3};$$

$$\ddot{\phi}_1^y = -\frac{v_{y1}^2}{l_1}(z_1 - l_1\phi_1^y) + \frac{v_{y1}^2}{l_2}(z_1 + l_2\phi_1^y) + k_{y1}^2 \cdot f(t) \times$$

$$\times A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_3;$$

$$\ddot{\phi}_2^y = -\frac{v_{y2}^2}{l_1}(z_2 - l_1\phi_2^y) + \frac{v_{y2}^2}{l_2}(z_2 + l_2\phi_2^y) - v_{y2}^2 \cdot f(t) \times$$

$$\times A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_4;$$

$$\ddot{\phi}_1^z = -\frac{v_{z1}^2}{l_1}(y_1 - l_1\phi_1^z) + \frac{v_{z1}^2}{l_2}(y_1 + l_2\phi_1^z) + v_{z1}^2 \cdot f(t) \times$$

$$\times A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_5;$$

$$\ddot{\phi}_2^z = -\frac{v_{z2}^2}{l_1}(y_2 - l_1\phi_2^z) + \frac{v_{z2}^2}{l_2}(y_2 + l_2\phi_2^z) - v_{z2}^2 \cdot f(t) \times$$

$$\times A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_6;$$

$$\ddot{x}_1 = \omega_{1x}^2 x_1 + \omega_1^2 \cdot f(t) \cdot A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_7;$$

$$\ddot{x}_2 = \omega_{2x}^2 x_2 + \omega_2^2 \cdot f(t) \cdot A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_8;$$

$$\ddot{y}_1 = \omega_{1y}^2(y_1 - l_1\phi_1^z) + \omega_{1y}^2(y_1 + l_2\phi_1^z) + \omega_1^2 \cdot f(t) \times$$

$$\times A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_9;$$

$$\ddot{y}_2 = \omega_{2y}^2(y_2 - l_1\phi_2^z) + \omega_{2y}^2(y_2 + l_2\phi_2^z) - \omega_2^2 \cdot f(t) \times$$

$$\times A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_{10};$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= \omega_{1z}^{\prime 2}(z_1 - l_1\phi_1^y) + \omega_{1z}^{\prime\prime 2}(z_1 + l_2\phi_1^y) + \omega_1^2 \cdot f(t) \times \\ &\times A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_{11}; \\ \ddot{z}_2 &= \omega_{2z}^{\prime 2}(z_2 - l_1\phi_2^y) + \omega_{2z}^{\prime\prime 2}(z_2 + l_2\phi_2^y) - \omega_2^2 \cdot f(t) \times \\ &\times A(x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2; \phi_1^y; \phi_2^y; \phi_1^z; \phi_2^z; \varphi_1; \varphi_2; j; \delta\varphi) \cdot B_{12}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким чином отримано частотну математичну модель, яка у повній мірі охоплює фізичний процес роботи зубчастої передачі, і може бути розповсюджена як на косозубі, так і на прямозубі передачі. У останньому випадку у рівняннях системи (1), у виразах для потенціальної енергії, члени, які містять $tg\beta_0$ і враховують нахил зубців, будуть відсутні. Наведена модель враховує такі види похибок руху реальної зубчастої передачі, які виникають за рахунок:

- кутів закрутки валів приєднаних мас двигуна і робочої машини $(\varphi - \varphi_1) + (\varphi_2 - \varphi_3)$;

- непаралельності валів шестерні та колеса

$$(z_1 - l_1\phi_1^y) + (z_1 + l_2\phi_1^y) + (z_2 - l_1\phi_2^y) + (z_2 + l_2\phi_2^y);$$

- перекосу валів шестерні та колеса

$$(y_1 - l_1\phi_1^z) + (y_1 + l_2\phi_1^z) + (y_2 - l_1\phi_2^z) + (y_2 + l_2\phi_2^z);$$

- поздовжних (осьових) зміщень шестерні та колеса $x_1 + x_2$;

- похибки зачеплення (в напрямі лінії або площини зачеплення), переміщення в механічній системі мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\cos\alpha_t} [(z_1 - z_2) + (\phi_1^y - \phi_2^y)\xi] + r_{b1}\varphi_1 - r_{b2}\varphi_2 + tg\beta_0(x_1 - x_2) + \delta\varphi + j + w + \\ &+ \frac{1}{\sin\alpha_t} [(y_1 - y_2) + (\phi_1^z - \phi_2^z)r_{b1}tg\beta_0] \end{aligned}$$

Приведемо систему (3) до вигляду, зручного для аналогового моделювання:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= v^2\varphi - v^2\varphi_1 + \frac{M}{J}; \\ \ddot{\varphi}_1 &= -v^2\varphi + v^2\varphi_1 + \frac{v_{x1}^2}{r_{b1}} \cdot A \cdot f(t); \\ \ddot{\varphi}_2 &= v^2\varphi_2 - v^2\varphi_3 + \frac{v_{x1}^2}{r_{b2}} \cdot A \cdot f(t); \\ \ddot{\varphi}_3 &= -v^2\varphi_2 + v^2\varphi_3 + \frac{M_3}{J_3}; \\ \ddot{\phi}_1^y &= (v_{y1}^{\prime 2} + v_{y1}^{\prime\prime 2})\phi_1^y + \left(-\frac{v_{y1}^{\prime 2}}{l_1} + \frac{v_{y1}^{\prime\prime 2}}{l_2}\right)z_1 + \frac{\xi v_{y1}^2}{r_{b1}^2 \cos\alpha_t} \cdot A \cdot f(t); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi}_2^y &= (v_{y2}'^2 + v_{y2}''^2)\phi_2^y + \left(-\frac{v_{y2}'^2}{l_1} + \frac{v_{y2}''^2}{l_2}\right)z_2 - \frac{\xi v_{y2}^2}{r_{b2}^2 \cos \alpha_t} \cdot A \cdot f(t); \\
 \ddot{\phi}_1^z &= (v_{z1}'^2 + v_{z1}''^2)\phi_1^z + \left(-\frac{v_{z1}'^2}{l_1} + \frac{v_{z1}''^2}{l_2}\right)y_1 + \frac{tg\beta_0 v_{z1}^2}{r_{b1}^2 \sin \alpha_t} \cdot A \cdot f(t); \\
 \ddot{\phi}_2^z &= (v_{z2}'^2 + v_{z2}''^2)\phi_2^z + \left(-\frac{v_{z2}'^2}{l_1} + \frac{v_{z2}''^2}{l_2}\right)y_1 + \frac{tg\beta_0 v_{z2}^2}{r_{b2}^2 \sin \alpha_t} \cdot A \cdot f(t); \\
 \ddot{x}_1 &= \omega_{x1}^2 x_1 + (tg\beta_0 + 1)\omega_1^2 \cdot A \cdot f(t); \\
 \ddot{x}_2 &= \omega_{x2}^2 x_2 - (tg\beta_0 + 1)\omega_2^2 \cdot A \cdot f(t); \\
 \ddot{y}_1 &= (\omega_{y1}'^2 + \omega_{y1}''^2)y_1 + (-\omega_{y1}'^2 l_1 + \omega_{y1}''^2 l_2)\phi_1^z + \frac{\omega_1^2}{\sin \alpha_t} \cdot A \cdot f(t); \\
 \ddot{y}_2 &= (\omega_{y2}'^2 + \omega_{y2}''^2)y_2 + (-\omega_{y2}'^2 l_1 + \omega_{y2}''^2 l_2)\phi_2^z + \frac{\omega_1^2}{\sin \alpha_t} \cdot A \cdot f(t); \\
 \ddot{z}_1 &= (\omega_{z1}'^2 + \omega_{z1}''^2)z_1 + (-\omega_{z1}'^2 l_1 + \omega_{z1}''^2 l_2)\phi_1^y + \frac{\omega_1^2}{\cos \alpha_t} \cdot A \cdot f(t); \\
 \ddot{z}_2 &= (\omega_{z2}'^2 + \omega_{z2}''^2)z_2 + (-\omega_{z2}'^2 l_1 + \omega_{z2}''^2 l_2)\phi_2^y + \frac{\omega_2^2}{\cos \alpha_t} \cdot A \cdot f(t).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Математичну модель (4) приймаємо за основу для складення схеми аналогового моделювання (схеми набору розв'язуючих елементів). При складанні схеми моделювання використовуємо методу та символічну інтерпретацію елементів, викладену у [5, 6], згідно чого моделююча схема складається у відповідності зі структурною схемою диференціальних рівнянь, що описують динаміку усієї механічної системи. У цьому випадку структурна схема рівнянь виражає всі елементарні математичні операції і зв'язки між ними, властиві розглядуваній системі диференціальних рівнянь руху системи. Такі схеми універсальні у своєму застосуванні для механічних систем будь-якої складності, що містять механічні, електричні, гідравлічні та інші ланки.

Загальна схема аналогового моделювання досліджуваної механічної системи, що складена за розглянутими вище принципами, наведена на рис. 1.

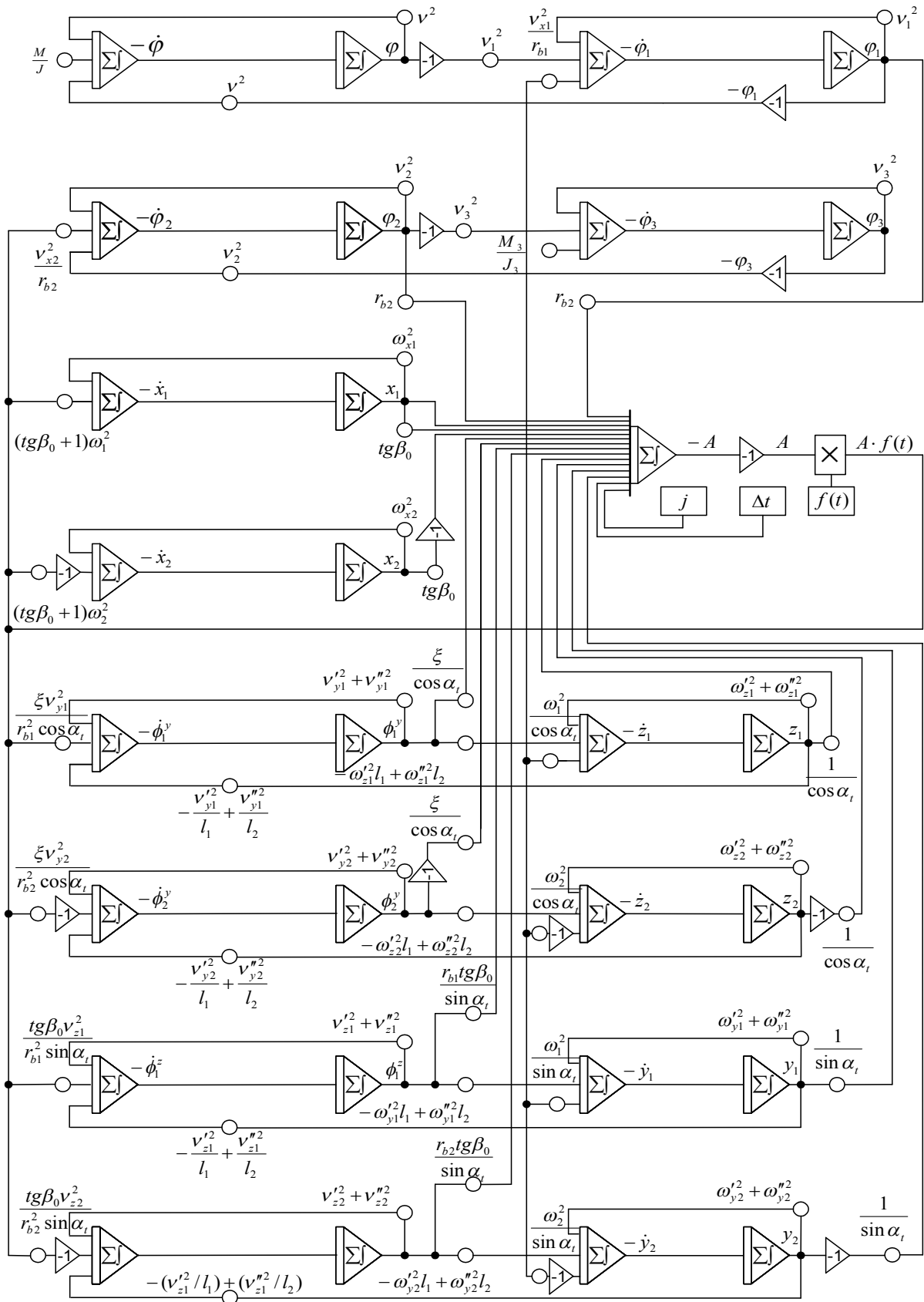


Рис. 1. Схема аналогового моделювання динаміки зубчастої передачі

Висновок

У результаті еквівалентних перетворень базової математичної моделі отримано схему аналогового моделювання динаміки одноступінчастої евольвентної косозубої зубчастої передачі. Реалізація отриманої схеми засобами моделюючого середовища Matlab-Simulink дає можливість ефективно досліджувати режими динамічної навантаженості механічної системи.

Список літератури

1. Виттенберг, И.М. Программирование аналого-цифровых вычислительных систем: Справочник / И.М. Виттенберг, М.Г. Левин, И.Я. Шор // Под ред. И.М. Виттенберга. – М.: Радио и связь, 1989. – 288 с.: ил.
2. Дяченко, П.В. Просторова математична модель власних частот та форм коливань механічної системи, класу одноступінчастих евольвентних зубчастих передач / П.В. Дяченко // – Донецьк: Науково-теоретичний журнал «Штучний інтелект», – 2011, №1 – ст. 54-60.
3. Демидович, Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова // – М.: Физматгиз, 1963.– 400 с
4. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, И.П. Жидков, Г.М. Кобельков // – М.: Наука, 1987.–600 с.
5. Гультьев, А.И. Имитационное моделирование в среде MATLAB-5.2. Практическое пособие / А.И. Гультьев // – СПб: Корона принт. 1999, 288 с.
6. Тетельбаум, И.М. Практика аналогового моделирования динамических систем / И.М. Тетельбаум, Ю.Р. Шнейдер // Справочное пособие – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 384 с.: ил.

АНАЛОГОВАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ

П. В. Дяченко

Черкасский государственный технологический университет,
ул. Шевченко 460, г. Черкассы, 18006, Украина, e-mail: dpv-orion@yandex.ru

Проведена адаптация математической модели динамики колебательных процессов одноступенчатой зубчатой передачи, к виду, удобному для применения аналогового моделирования. Исходная математическая модель представлена в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат, определяемых соответствующей схемой динамики механической системы. Приведен вид базовой математической модели с подробным описанием составляющих ее параметров, показан переход к модели в частотном виде, и полученную на ее основе общую блок-схему аналогового моделирования.

Ключевые слова: математическая модель, аналоговая модель, динамика колебательных процессов, обобщенные координаты, система дифференциальных уравнений.

ANALOG MODEL OF DYNAMICS OF TOOTH GEAR OSCILLATIONS

P.V. Diachenko

Cherkasy State Technological University,
460 Shevchenko Str., Cherkasy, 18006, Ukraine; e-mail: dpv-orion@yandex.ru

A mathematical model of dynamics of tooth gear oscillation was adapted for the further use in analog modeling. An initial mathematical model was presented as a system of linear second-order differential equations referred to generalized coordinates, the latter being defined by the appropriate scheme of dynamics of mechanical system. A type of basic mathematical model was presented with the detailed description of its parameters. Additionally, a transfer to a frequency-domain model was shown, as well as a general flowchart of analog modeling obtained on its basis.

Keywords: mathematical model, analog model, dynamics of oscillations, generalized coordinates, system of differential equations.