

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ГАЗОНАСИЧЕНИХ НЬЮТОНІВСЬКОЇ ТА НЕНЬЮТОНІВСЬКОЇ РІДИН В ЗОНІ ТИСКУ НАСИЧЕННЯ

В.С. Савіч, О.О. Ошовська

Одеський національний політехнічний університет,  
просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: savichsp@gmail.com

Виконано теоретичні дослідження умов тотожності фільтраційних процесів в пористих середовищах ньютонівських та неньютонівських газонасичених рідин. Отримано вирази, що визначають масові витрати вказаних рідин при гомогенному та гетерогенному механізмах фільтраційного плинину.

**Ключові слова:** пористе середовище, фільтрація, ньютонівська рідина, не ньютонівська рідина, газонасиченість, витрата газонасиченої рідини.

## Вступ

Аналіз літератури [1-4], присвяченої питанням дослідження процесу фільтрації газованої рідини, дозволяє зробити наступні висновки: газувана рідина при тиску вище тиску насиченості має нелінійну стискуваність; при стаціонарній фільтрації газованої рідини у пористому середовищі спостерігається значне збільшення витрати рідини неподалік (вище) тиску насичення; ефект збільшення витрати рідини зменшується з ростом проникності (або середнього радіусу капіляра) пористого середовища; залежність рухомості рідини та витрати рідини, приведеного до витрати за Дарсі (відносна витрата) від рівня тиску вище тиску насичення, має немонотонний характер; із зростанням газонасиченості рідини ефект збільшення витрати зростає; основні закономірності стаціонарного плинину газуваних ньютонівських рідин справедливі також і для не ньютонівських.

В даному випадку спостерігається ефект наближення властивостей плинину ньютонівської та неньютонівської рідин при фільтрації у пористому середовищі, що потребує дослідження меж даної тотожності.

## Мета роботи

Теоретичне дослідження умов тотожності фільтраційних процесів ньютонівської та неньютонівської рідин, зумовлених явищем газонасиченості рідини при наближенні до тиску насичення.

## Основна частина

Для пояснення зазначених висновків аналізу дослідимо механізм утворення зародків, а саме: гомогенний або гетерогенний.

1. Гомогенний механізм. Будемо вважати, що утворення зародків відбувається, в основному, у всьому об'ємі рідкої фази.

Дослідимо за даних умов тотожність фільтраційних плинів ньютонівської та неньютонівської рідин. Сліди поверхнево-активних речовин (ПАР), які майже завжди присутні при фільтраційному русі [1], та поверхневий електричний заряд [2] стабілізують зародок газу, однак поверхня розділу «рідина – зародок газу» ще зберігає рухомість [3] (тобто зародки є такими, що деформуються), в результаті чого газувана рідина набуває стискуваності, яка зростає з наближенням до тиску насиченості, зважаючи на зростання об'ємного вмісту зародків. З примусовим додаванням ПАР її кількість на поверхні зародка зростає, з огляду на що рідина втрачає рухомість [4], а стискуваність системи при інших рівних умовах стає меншою.

Розглянемо тепер як наявність нелінійної стискуваності відбивається на характеристиках витрати при фільтрації газуваної рідини в пористому середовищі. За визначенням [5] коефіцієнт стискуваності  $\beta(P)$  віднаходиться з рівняння

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} = \beta(P), \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина рідини, що фільтрується (з урахуванням обох фаз: газової та рідинної);  $P$  – внутрішньо-пластовий тиск, який спричиняє фільтраційний рух.

Приймемо, що в першому наближенні, функція стискуваності може бути представлена у адитивній формі

$$\beta(P) = \beta_1 + (\beta_c - \beta_1) \exp[-\alpha(P - P_c)], \quad (2)$$

де  $\beta_1$  та  $\beta_c$  відповідно мінімальне (при  $P \gg P_c$ ) і максимальне (при  $P = P_c$ ) значення коефіцієнта стискуваності.

Підставляючи в (1) форму (2), отримаємо

$$\rho = \rho_c \exp[\beta_1(P - P_c)] \exp\left\{ \frac{(\beta_c - \beta_1)}{\alpha} [1 - \exp(\alpha(P - P_c))] \right\}, \quad (3)$$

де  $\rho_c$  – густина газуваної рідини при  $P_c$ . Підекспоненціальний вираз другої експоненти при підстановці наступних експериментальних даних:  $\alpha = 10^{-6}$  1/Па,  $P - P_c = 10^6$  Па,  $\beta_c - \beta_1 = 5 \cdot 10^{-6}$  1/Па стає близьким до нуля ( $\approx 10^{-4}$ ), тому (3) може бути спрощено:

$$\rho = \rho_c \exp[\beta_1(P - P_c)]. \quad (4)$$

Формула (4) показує, що для плинущу газуваної рідини можна використовувати модель «надстислої» рідини Маскета [6], яка вміщує поряд з (4) ще й наступне

рівняння:  $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{m \beta_1 \eta}{k} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ , де  $m$  – пористість,  $\eta$  – в'язкість,  $k$  – проникність.

Для стаціонарного плинущу газуваної рідини при постійному перепаді тиску масова витрата має вигляд:

$$Q = Q_c \left( \frac{\rho_0 - \rho_c}{\beta_1 \rho_c (P_0 - P_c)} \right), \quad (5)$$

де  $\rho_0$  та  $\rho_c$  – густина газуваної рідини відповідно на вході та виході пористого середовища;  $Q_c$  – масова витрата рідини, яка не стискається, з густиною  $\rho_c$ , яка

(витрата) визначається з виразу  $Q = Q_c(k \rho_c F / (\eta l))(P_0 - P_c)$ , де  $F, l$  – відповідно площа поперечного перетину та довжина зразку пористого середовища.

Після перетворень (при  $P_0 - P_c \ll (1/\beta_1)$ ), формулу (5) можна привести до виду  $Q = Q_c[1 + \beta_1(P_0 - P_c)]$ , де  $P = (P_0 - P_c)/2$ . Приймаючи за результатами експерименту для  $\beta_1 = 5 \cdot 10^{-10}$  1/Па, а для  $P - P_c \approx 2 \cdot 10^6$  Па, отримаємо  $\beta_1(P - P_c) \approx 10^3$ .

Таким чином, стискуваність практично не впливає на витратні характеристики при фільтрації газованої рідини в пористому середовищі.

2. Гетерогенний механізм. Відомо, що зародки нової фази, в основному, утворюються на існуючих поверхнях [7]. У випадках, які розглядаються, цю роль виконує, наприклад, геометрична структура пористого середовища. Дійсно, роботу гетерогенного утворення зародків може бути визначено із співвідношення [8, 9]

$$W_h/W = f(\theta), \quad (6)$$

де  $W$  – робота гомогенного утворення зародків газової фази,  $f(\theta)$  – функція крайового кута змочування рідиною твердої поверхні [8]:

$$f(\theta) = 0.25 \cdot (1 + \cos\theta)^2 (2 - \cos\theta). \quad (7)$$

Підставляючи (7) в (6), після перетворення, отримаємо:  $W_h/W = 0.5 + 0.75 \cdot \cos\theta - 0.25 \cdot \cos^3\theta$ .

Із наведеного рівняння видно, що при  $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$  робота гетерогенного процесу завжди менше роботи гомогенного процесу. З покращенням змочуваності, що може досягаться додаванням, зокрема аніонної ПАР, робота гетерогенного утворення зародків збільшується, тобто зменшується ймовірність їх утворення.

Прийемо, що зародки газу, які утворюються (суть – адсорбуються [10]) на поверхні капілярів, рухомі. В результаті пристінний шар рідини, який насичено зародками газу, має меншу в'язкість, ніж центральний. Природно уявити, що при зниженні тиску до тиску насичення, з огляду зменшення роботи утворення зародків, об'ємний вміст їх збільшується, що може привести до збільшення товщини пристінного шару зниженої в'язкості.

Розглянемо рух газорідинної системи в одиничному капілярі та скористаємося результатами робіт [11, 12], в яких, на основі принципу максимуму Понтрягіна отримано функцію  $h(c) = [\rho(c)/2\eta(c)] + [A/(1-r^2)]c$ , де  $\rho(c)$ ,  $\eta(c)$  – відповідно функції густини та в'язкості від концентрації газу. Відшукується такий розподіл концентрації по радіусу капіляра  $c(r)$ , який забезпечує максимум функції  $h(c)$  та, відповідно, витрати рідини. Враховуючи [12],  $A$  – постійна, причому  $A \in [0; \infty)$ ,  $r \in [0; 1]$ ,  $c \in [0; 1]$ .

Для функції густини від концентрації  $\rho(c)$  можна прийняти відоме співвідношення  $\rho(c) = 1 - c$ . Для функції в'язкості від концентрації  $\eta(c)$  відповідно до [13], приймаємо  $\eta(c) = c(1 - \lambda)$  ( $1/3 < \lambda < 1$ ) – для високих та середніх концентрацій, та  $\eta(c) = c\lambda$  ( $0 < \lambda < 1/6$ ) – для відносно низьких концентрацій.

Вочевидь, для розподілу концентрації, який доставляє максимум витраті рідини:

$$c_m(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < \sqrt{1 - 2A/(1-\lambda)}, \\ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \sqrt{(1-\lambda)(1-r)^2(2A)^{-1}}, & \sqrt{1 - 2A/(1-\lambda)} < r < 1. \end{cases} \quad (8)$$

Середня концентрація газу, відповідно до [12], визначається із співвідношення

$$F = \int_0^1 c_m(r) r dr = \frac{A}{3\lambda(1-\lambda)}.$$

Вказаний розподіл концентрації за перетином (8) буде мати місце при  $A \in (0; (1-\lambda)/2)$  та  $F \in (0; 1/6\lambda)$ .

Зазначимо, що при відносно високих концентраціях газу, коли має місце двофазний плин, можливо, як показано в [12], утворення пристінного газового шару.

Таким чином, максимізація витрати відбувається при розшаруванні газорідинної системи, коли в центрі плине чиста рідина, а біля стінок рідина із зародками газу (тобто система з меншою в'язкістю аніж у центрі потоку). Очевидно, що відносно малий пристінний шар, насичений гетерогенними зародками газу, який виділюється, буде мати значно меншу в'язкість, ніж чиста рідина, в той час як об'ємна в'язкість газованої рідини при наявності зародків газу, відповідно до [1], зменшується лише на (10...15)% .

3. Кільцева схема плину в капілярі. Розглянемо особливості плину в пористому середовищі ньютонівської та не ньютонівської рідин.

Ньютонівська рідина. Для визначення витрати в теоретичних підрахунках можна застосувати кільцеву схему руху в капілярі, запропоновану в [14]. Тоді швидкість стаціонарного плину флюїдів в капілярі визначиться з рівняння

$$v_i = -(\Delta P / (4l \eta_i)) r^2 + a_{1i} \ln r + a_{2i}, \quad (9)$$

де  $\Delta P/l$  – градієнт тиску,  $\eta_i$  – в'язкість флюїда (для центрального флюїда приймемо індекс 1, для пристінного – індекс 2). Постійні  $a_{1i}$  та  $a_{2i}$  визначаються з наступних

граничних умов:  $v_2 = 0, r = R, \eta_2 \frac{dv_2}{dr} = \eta_1 \frac{dv_1}{dr}, v_1 = v_2, r = R_0, \frac{dv_1}{dr} = 0, r = 0$ .

З (9) при вказаних граничних умовах визначається швидкість

$$v_1 = (\Delta P R^2 / (4\eta_1 l)) \left[ (R_0/R)^2 - (r/R)^2 + \varepsilon (1 - R_0^2/R^2) \right] \quad (10)$$

та відносна витрата рідини  $Q_1 = Q/Q_0 = S^4 [1 + (2\varepsilon/S^2)(1-S^2)]$ , або

$$Q_1 = (1-\xi)^4 [1 + 2\varepsilon \xi (2-\xi)/(1-\xi)^2], \quad (11)$$

де  $S = R_0/R = 1-\xi, \xi = \delta/R, \varepsilon = \eta_1/\eta_2 > 1, Q_1$  – витрата для рідини з в'язкістю  $\eta_1$ . Перехід до пористого середовища в даному випадку не змінить результату, якщо прийняти (11) як відносну проникність, виражену у термінах витрати. Аналіз виразу (11) показує, що залежність витрати рідини від товщини пристінного шару має немонотонний характер, причому максимум витрати настає при

$$\xi = 1 - \sqrt{\varepsilon(2\varepsilon - 1)^{-1}}. \quad (12)$$

Немонотонність витрати визначається добутком  $(1-\xi)^4 \times [2\varepsilon \xi (2-\xi)/(1-\xi)^2]$ . Перший множник характеризує площину поперечного перетину потоку рідини, другий – внесок пристінного шару зниженої в'язкості у збільшення витрати рідини. За відносно низької товщини пристінного шару переважає другий множник, і витрата рідини збільшується. За відносно високої товщини пристінного шару переважає перший множник, і витрата рідини зменшується.

Неньютонівська рідина. Розглянемо кільцевий плин в капілярі неньютонівської (степеневі) рідини з пристінним шаром газу. Швидкість руху рідини в капілярі, враховуючи, що при  $r=0$  напруження  $\tau$  повинно бути кінцевою величиною, визначається з рівняння [6]:

$$v_1 = -(n/(n+1))(\Delta P/(2\eta_0 l))^{1/n} r^{(1/n)+1} + a_{2i}, \quad (13)$$

а швидкість плинну пристінного шару газу з рівняння

$$v_2 = -(\Delta P/(4\eta_2 l))r^2 + a_{1i} \ln r + a_{2i}, \quad (14)$$

де  $\eta_0$  – постійна величина ( $\eta_0 = \tau/\gamma^n$ ). Постійні інтегрування визначаються із наступних граничних умов:  $v_2 = 0$ ,  $r = R$ ,  $\tau_1 = \tau_2$ ,  $v_1 = v_2$ ,  $r = R_0$ .

Тоді з (13) та (14) визначається швидкість плинну

$$v_1 = (n/(n+1))(\Delta P/(2\eta_0 l))^{1/n} R_0^{(1/n)+1} \left[ 1 - (r/R_0)^{(1/n)+1} \right] + ((\Delta P R^2)/(4\eta_2 l)) \left[ 1 - (R_0/R)^2 \right], \quad (15)$$

а з (15) відносно витрату рідини

$$Q_1 = Q/Q_0 = (1-\xi)^{(1/n)+3} \left[ 1 + (3(n+1)/(2n)) \cdot (\varepsilon \xi (2-\xi)/(1-\xi)^2) \right], \quad (16)$$

$$\varepsilon = \eta_1/\eta_2, \quad \eta_1 = \eta_0 ((\Delta P R_0)/(2\eta_0 l))^{1-(1/n)}, \quad (17)$$

де  $\eta_1$  – в'язкість рідини при  $r = R_0$ , тобто на межі поділу рідини та газу,

$$Q_0 = \frac{\pi n}{3n+1} \left( \frac{\Delta P R_0}{2\eta_0 l} \right)^{1/n} R^{(1/n)+3} - \text{витрата степеневі рідини з в'язкістю } \eta_1 = \eta_0 \left( \frac{d v_1}{d r} \right)^{n-1}.$$

При  $n=1$  рівняння (15) та (16) переходять відповідно в рівняння (10) та (11). Аналіз виразу (16) показує, що залежність витрати рідини від товщини пристінного шару також має немонотонний характер, причому максимум витрати наступає при

$$\xi = 1 - \sqrt{((n+1)\varepsilon)/((3n+1)\varepsilon - 2n)}. \quad (18)$$

При  $n=1$  рівняння (18) переходить в рівняння (12). Аналіз виразу (18) показує, що зі зростанням  $n$  (за інших рівних умов)  $\xi$  зростає.

Немонотонність витрати за вище описаних причин визначається добутком  $(1-\xi)^{(1/n)+3} \times \left[ 1 + (3(n+1)/(2n)) \cdot ((\varepsilon \xi (2-\xi))/(1-\xi)^2) \right]$ , причому «внесок» кожного із добутоків аналогічний відповідному як і у випадку ньютонівської рідини.

## Висновок

Отримано і досліджено умови тотожності фільтраційних процесів ньютонівської та неньютонівської рідин, зумовлених явищем газонасиченості рідини в зоні, наближеній до тиску насичення. Запропоновано вирази, які описують витрату рідини при зародках газової фази у пристінковому шарі для гомогенного та гетерогенного механізмів фільтраційного плинну.

## Список літератури

1. Буевич, Ю.А. О докритическом образовании зародышей в жидкости с поверхностно-активным веществом (ПАВ) / Ю.А. Буевич // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52, № 5. – С. 394-402.
2. Сулейманов, Б.А. Влияние поверхностно-активного вещества на неравновесные эффекты в газожидкостных системах в докритической области / Б.А. Сулейманов, Ф.Б. Нагиев // Инженерно-физический журнал. – 1995. – Т. 68, № 6. – С. 968-974.
3. Сиротюк, М.Г. Стабилизация газовых пузырьков в воде / М.Г. Сиротюк // Акустический журнал. – 1970. – Т. 16, № 4. – С. 567-569.
4. Dammer, S.M. Gas enrichment at liquid-wall interfaces / S.M. Dammer, D. Lohse // Physical Review Letters. – 2006. – Vol. 96. – PP. 2257-2264.
5. Бернадинер, М.Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М.Г. Бернадинер, В.М. Ентов. – М.: Наука, 1979. – 199 с.
6. Tretheway, D. Effects of absolute pressure on fluid-solid interphase / D. Tretheway // Physical Review Letters. – 1999. – Vol. 82. – PP. 1671-1674.
7. Фольмер, М. Кинетика образования новой фазы / М. Фольмер. – М.: Мир, 1986. – 208 с.
8. Корнфельд, М. Упругость и прочность жидкостей / М. Корнфельд. – М.-Л.: Энергия, 1975. – 108 с.
9. Хирс, Д. Испарение и конденсация / Д. Хирс, Г. Паунд. – М.: Metallurgia, 1966. – 200 с.
10. Михайлов, Д.Н. О влиянии адсорбции-десорбции микророзышей газа на характер фильтрации газированной жидкости / Д.Н. Михайлов, Г.С. Степанова // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2003. – № 5. – С. 106-114.
11. Павловский, Ю.Н. О пристеночном эффекте / Ю.Н. Павловский // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1967. – № 2. – С. 160-165.
12. Эфрос, Д.А. Исследование фильтрации неоднородных систем / Д.А. Эфрос. – Л.: Энергия, 1978. – 351 с.
13. Сатаров, Р.М. Исследование движения газожидкостных систем с учетом образования микророзышей / Р.М. Сатаров, П.Я. Фарзани // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52., № 5. – С. 765-771.
14. Blake, T.D. Slip between a liquid and a solid theory reconsidered / T.D. Blake // Colloids and Surfaces. – 1990. – Vol. 47. – P. 135-145.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ГАЗОНАСЫЩЕННЫХ НЬЮТОНОВСКОЙ И НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТЕЙ В ЗОНЕ ДАВЛЕНИЯ НАСЫЩЕНИЯ

В.С. Савич, О.А. Ошовская

Одесский национальный политехнический университет,  
просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: savichsp@gmail.com

Выполнены теоретические исследования условий тождественности фильтрационных процессов в пористых средах ньютоновских и неньютоновских газонасыщенных жидкостей. Получены выражения, определяющие массовые расходы указанных жидкостей при гомогенном и гетерогенном механизмах фильтрационного течения.

**Ключевые слова:** пористая среда, фильтрация, ньютоновская жидкость, неньютоновская жидкость, газонасыщенность, расход газонасыщенной жидкости.

## MATHEMATICAL MODELING OF FILTRATION PROCESSES OF GAS-SATURATED NEWTONIAN AND NON-NEWTONIAN LIQUIDS IN SATURATION PRESSURE REGION

V.S. Savich, O.O. Oshovska

Odesa National Polytechnic University,  
1 Shevchenko Str., Odesa, 65044, Ukraine; e-mail: savichsp@gmail.com

The conditions of identity of filtration of gas-saturated Newtonian and non-Newtonian liquids through porous media were theoretically investigated. The expressions determining mass flow rates of these liquids for homogeneous and heterogeneous filtration were obtained.

**Keywords:** porous medium, filtration, Newtonian liquid, non-Newtonian liquid, flow rate of gas-saturated liquid.