УДК 681.5.01

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 5 (2015), No. 2, pp. 177-190

АНАЛИЗ УСЛОВИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОГРАНИЧЕННОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ПОМОЩЬЮ БИЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Ю.И. Дорофеев

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,
ул. Фрунзе, 21, Харьков, 61002, Украина; e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu

Рассматривается задача синтеза стабилизирующего управления запасами в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и структурных ограничений на состояния и управляющие воздействия. Управление строится в виде линейной нестационарной обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов. Для синтеза регулятора требуется решить эквивалентную задачу поиска наименьшего по некоторому критерию инвариантного эллипсоида замкнутой системы, которая сведена к задаче разрешимости системы линейных матричных неравенств. Следующей задачей является оценивание допустимой области в пространстве управляющих воздействий, решение которой получено в терминах разрешимости системы билинейных матричных неравенств. Также получена система билинейных матричных неравенств, решение которой позволяет вычислить весовые матрицы квадратичного функционала, при которых гарантируется максимальная степень подавления влияния внешнего спроса на уровни запаса ресурсов. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: управление запасами, линейное ограниченное управление, инвариантный эллипсоид, линейное матричное неравенство, билинейное матричное неравенство.

Введение

Проблема управления запасами (УЗ) является одной из наиболее важных в организационном управлении. Запасы разного рода материальных ресурсов возникают почти во всех звеньях системы «производство - хранение - распределение». Модели УЗ описывают широкий круг задач оптимального планирования производственных, транспортных, информационных, финансовых, водохозяйственных, энергетических и других систем [1].

И при дефиците запасов, и при неоправданно высоком их уровне нарушается нормальный ход производства, что приводит к потере прибыли. В результате возникает необходимость в разработке методов математического моделирования управляемых сетей поставок с целью определения оптимальных в определенном смысле уровней запасов, а также построения оптимальных стратегий УЗ.

Широкий класс систем УЗ описывается динамическими сетевыми моделями. Узлы сети задают виды и объемы управляемых запасов, а дуги представляют управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки описывают процессы переработки и перераспределения ресурсов между узлами сети и процессы поставок сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется внешними потребителями.

УЗ заключается в определении моментов времени и размеров заказов на их восполнение. Из всего многообразия моделей УЗ можно выделить два основных типа [1]: модель оптимального размера заказа и модель периодической проверки. В первом случае предполагается непрерывный контроль за состоянием запасов и размещение заказов фиксированного размера в моменты времени, определяемые в соответствии с выбранной стратегий. Второй тип модели предполагает проверку уровня запасов через равные промежутки времени и размещение заказа, размер которого определяется в соответствии с выбранной стратегией. Совокупность правил, по которым принимаются подобные решения, называется стратегией УЗ. В данной работе рассматривается модель периодической проверки.

С точки зрения УЗ размеры спроса, поступающие на узлы сети из внешней среды и формирующие неуправляемые потоки, целесообразно рассматривать в качестве внешних возмущающих воздействий.

В настоящее время для синтеза стратегии УЗ с заданной моделью спроса широко применяется метод прогнозирующего управления [2]. Однако, на практике как правило отсутствует информация для построения адекватной модели внешнего спроса, которая необходима для синтеза прогнозирующего управления. Поэтому для решения задач УЗ целесообразно привлечь методы управления в условиях неопределенности.

В работе [3] предложен подход, основанный на концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий. Авторы предполагают, что неизвестный спрос принадлежит заданному множеству, и предлагают моделировать неопределенность спроса в виде интервала, в границах которого спрос произвольным образом принимает свои значения.

В последнее десятилетие в теории УЗ активно применяется концепция инвариантности [4]. В работе [5] приведен обзор результатов, относящихся к подавлению произвольных ограниченных внешних возмущений, полученных на основе использования техники линейных матричных неравенств (ЛМН) и метода инвариантных эллипсоидов. При этом для синтеза оптимального регулятора требуется решить эквивалентную задачу поиска наименьшего по некоторому критерию инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. В работе [6] на основе техники ЛМН устанавливается достаточное условие устойчивости замкнутой системы – это существование квадратичной функции Ляпунова, построенной на решениях соответствующей системы.

При практической реализации указанного подхода к регуляторам и переходным процессам в замкнутых системах предъявляются разнообразные инженерные требования. Одним из наиболее значимых практических требований является учет ограниченности ресурса управления, поэтому при синтезе естественно накладывать те или иные ограничения на величину управляющего воздействия. В рамках рассматриваемого подхода часто применяется так называемое управление с насыщением [7], которое определено на всем фазовом пространстве, но при этом не является линейным. В настоящей работе рассматривается линейное ограниченное управление, которое определено лишь в некоторой ограниченной области фазового пространства. Подобная постановка задачи позволяет напрямую применять технику ЛМН и получать простые вычислительные алгоритмы. Результаты синтеза линейного управления с ограничением, заданным в квадратичной норме, приведены в работе [8]. Однако, спецификой задач УЗ является неотрицательность значений переменных, что приводит к наличию несимметричных ограничений на значения состояний и управляющих воздействий.

Таким образом, конструктивное описание условий, которым должны удовлетворять значения управляющих воздействий, составляет одну из целей настоящей работы. Оценка допустимой области в пространстве управляющих воздействий будет получена в терминах разрешимости системы билинейных матричных неравенств (БМН).

Совокупность решений этих БМН предоставляет проектировщику множество допустимых регуляторов, удовлетворяющих всем заданным требованиям и ограничениям. Поэтому естественно задаться целью отыскания среди них оптимального по тому или иному критерию качества. Одним из распространенных критериев является квадратичный, который хорошо изучен в рамках теории линейно-квадратичного управления (LQR) [9]. Однако LQR-задача не предполагает наличия явного ограничения на управление и не может быть точно решена в такой постановке, поскольку в упрощенной формулировке LQR-задача заключается в минимизации по всем линейным стабилизирующим регуляторам некоторого квадратичного функционала с заданными весовыми матрицами.

Поскольку главной целью управления является подавление влияния внешнего спроса на уровни запаса ресурсов, а степень подавления определяется размером инвариантного эллипсоида замкнутой системы, то интерес представляет обратная задача: найти весовые матрицы, при которых гарантируется наименьший размер искомого эллипсоида. Поэтому следующий результат настоящей работы состоит в применении указанного подхода, а именно, будет построен допустимый в смысле заданных ограничений на значения управляющих воздействий стабилизирующий регулятор и предложена система БМН, решение которой позволяет определить значения весовых матриц квадратичного функционала, которые гарантируют максимальную степень подавления влияния внешнего спроса.

Постановка задачи

Рассмотрим в дискретном времени систему УЗ, представленную в виде динамической сети, состоящей из n узлов. Переменными состояний являются наличные уровни запаса ресурсов в узлах сети. В качестве управляющих воздействий рассматриваются объемы заявок на поставку ресурсов, которые формируются узлами в текущем периоде, а возмущениями являются объемы спроса на ресурсы, которые поступают извне.

Предполагается, что структура сети известна, а состояния доступны непосредственному измерению. Для описания транспортных запаздываний используется модель дискретной задержки. Предполагается, что значения интервалов времени, определяющих длительность транспортировки ресурсов между узлами сети $T_{i,j}$, $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$, и переработки ресурсов в узлах T_i, $i = \overline{1,n}$, известны и кратны выбранному периоду дискретизации. Тогда математическая модель сети описывается разностным уравнением с запаздыванием:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda} B_t u(k-t) + Ed(k), \quad k = 0,1,2,..., \tag{1}$$

где $x(k) \in R^n$ – вектор состояний;

$u(k) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий;

$d(k) \in R^q$ – вектор внешних возмущений;

Λ – целочисленная переменная, кратная периоду дискретизации и равная максимальному значению запаздывания управляемых потоков между всеми парами связанных узлов сети.

Значения матриц $B_t \in R^{n\times m}$ и $E \in R^{n\times q}$ определяются структурой сети и формируются в соответствии с методикой, изложенной в работе [10]. В процессе функционирования системы должны выполняться следующие ограничения:

$$x(k) \in X = \{x \in R^n :\ 0 \le x \le x^{\max}\},\quad u(k) \in U = \{u \in R^m :\ 0 \le u \le u^{\max}\}, \tag{2}$$

где $x^{\max}$, $u^{\max}$ – векторы, определяющие максимальные вместимости хранилищ узлов сети и объемы транспортировок, которые считаются заданными.

Относительно внешнего спроса известно лишь то, что он произвольным образом принимает значения из заданного множества: $d(k) \in D = \{d \in R^q : 0 \le d^{min} \le d \le d^{max}\}$, где $d^{\min}$, $d^{\max}$ – векторы, которые предполагаются известными.

Выполним преобразование модели (1) к стандартному виду без запаздывания на основе расширения вектора состояний $\xi(k) = \left[x^{\mathrm{T}}(k), u^{\mathrm{T}}(k-1), u^{\mathrm{T}}(k-2), ..., u^{\mathrm{T}}(k-\Lambda)\right]^{\mathrm{T}}$ [11]. Тогда уравнения расширенной модели сети примут вид:

$$\begin{aligned} &\xi(k+1) = A\xi(k) + Bu(k) + Gd(k), \\ &x(k) = C\xi(k), \end{aligned} \tag{3}$$

где матрицы $A \in R^{N\times N}$, $B \in R^{N\times m}$, $G \in R^{N\times q}$, $C \in R^{n\times N}$, $N = n + m\Lambda$ имеют соответствующую блочную структуру [10].

Задача заключается в построении управления в форме линейной обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов

$$u(k) = K(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right), \tag{4}$$

где $K(k) \in R^{m\times N}$ – нестационарная матрица коэффициентов обратной связи;

$\xi^* = \big[\underbrace{x^{*\mathrm{T}}, ..., x^{*\mathrm{T}}}_{\Lambda+1}\big]^{\mathrm{T}}$ – составной вектор, в котором элементы вектора x^* определяют размеры страховых запасов ресурсов в узлах сети и вычисляются на основании верхних граничных значений спроса с учетом величины запаздывания управляемых потоков и продуктивной модели Леонтьева [12]:

$$x^* = (I - \Pi)^{-1} d^*,\quad d_i^* = \begin{cases} \Lambda_i d_i^{\max},\ i = \overline{1,q}, \\ 0,\quad i = \overline{q+1,n}, \end{cases} \quad \Lambda_i = \max\{T_{j,i} + T_i,\ j = \overline{1,n},\ j \ne i\}, \tag{5}$$

где I – единичная матрица соответствующей размерности;

$\Pi \in R^{n\times n}$ – продуктивная матрица, значение элемента Π_{ij} которой равно количеству единиц ресурса i, необходимого для производства единицы ресурса j;

Λ_i – величина запаздывания управляемых потоков узла i.

Управление (4) должно стабилизировать замкнутую систему, а также для любого начального состояния $x(0) \in X$ и внешнего спроса $d(k) \in D$ $\forall k \ge 0$ обеспечивать полное и своевременное удовлетворение как внешнего, так и внутреннего спроса на ресурсы при ограничениях (2). При этом построенный регулятор должен быть оптимальным в смысле минимума квадратичного функционала

$$J_\infty(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}} W_\xi \left(\xi(k) - \xi^*\right) + u^{\mathrm{T}}(k) W_u u(k)\right), \tag{6}$$

где $W_\xi \in R^{N\times N}, W_u \in R^{m\times m}$ – положительно определенные диагональные весовые матрицы.

Синтез ограниченного стабилизирующего управления запасами

Выполним аппроксимацию множества D значений внешнего спроса эллипсоидом наименьшего объема, уравнение которого имеет вид

$$E(d_c, P_d) = \left\{d(k) \in R^q : \ \left(d(k) - d_c\right)^{\mathrm{T}} P_d^{-1}\left(d(k) - d_c\right) \le 1\right\}. \quad (7)$$

Параметры эллипсоида $P_d \in R^{q\times q}$, $d_c \in R^q$ определяются путем решения задачи полуопределенного программирования (ПОП) аналогично [13].

Представим расширенную модель замкнутой системы для управления (4) в виде:

$$\begin{aligned} &\xi(k+1) = A_f\left(\xi(k) - \xi^*\right) + S\xi^* + G\left(d(k) - d_c\right) + Gd_c, \\ &x(k) = C\xi(k), \quad A_f = A + BK. \end{aligned} \quad (8)$$

Необходимое и достаточное условие стабилизируемости системы (3) с помощью линейной обратной связи (4), выраженное в терминах линейных матричных неравенств, представим в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть матрицы $\hat{\mathrm{Q}}(k) \succ 0$, $\hat{\mathrm{Y}}(k)$ и скаляр $\hat{\alpha}(k)$ получены в результате решения задачи полуопределенного программирования

$$\mathrm{trace}\left(\mathrm{Q}(k)\right) \to \min\ , \quad (9)$$

при ограничениях на $\mathrm{Q}(k) = \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}(k) \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $Y(k) \in R^{m\times N}$ и $\alpha(k)$

$$\alpha(k) > 0, \quad Q(k) \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} Q(k) & 0_N & 0_{N\times q} & \left(AQ(k)+BY(k)\right)^T & 0_{N\times q} & Q(k)W_\xi & Y^T(k)W_u \\ 0_N & 0_N & 0_{N\times q} & \left(A-I\right)^T & 0_{N\times q} & 0_N & 0_{N\times m} \\ 0_{q\times N} & 0_{q\times N} & 0_q & G^T & 0_q & 0_{q\times N} & 0_{q\times m} \\ AQ(k)+BY(k) & A-I & G & Q & GP_d^{\frac{1}{2}} & 0_N & 0_{N\times m} \\ 0_{q\times N} & 0_{q\times N} & 0_q & P_d^{\frac{1}{2}}G^T & \alpha(k)I_q & 0_{q\times N} & 0_{q\times m} \\ W_\xi Q(k) & 0_N & 0_{N\times q} & 0_N & 0_{N\times q} & W_\xi & 0_{N\times m} \\ W_u Y(k) & 0_{m\times N} & 0_{m\times q} & 0_{m\times N} & 0_{m\times q} & 0_{m\times N} & W_u \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (10)$$

где $0_{N\times q}$ – нуль-матрица соответствующей размерности.

Если задача (9) при ограничениях (10) имеет решение, то регулятор с матрицей

$$K(k) = \hat{\mathrm{Y}}(k)\hat{\mathrm{Q}}^{-1}(k) \quad (11)$$

стабилизирует систему (3) в момент времени k, а квадратичная форма

$$V = \left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathrm{Q}}^{-1}(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right) \quad (12)$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы (8).

Доказательство Теоремы приведено в Приложении.

В качестве оценки множества достижимости замкнутой системы (8) при действии возмущений $d(k) \in E(d_c, P_d)$ будем рассматривать эллипсоид

$$E(\xi^*, \mathrm{Q}(k)) = \left\{ \xi(k) \in R^N : \ \left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}} \mathrm{Q}^{-1}(k) \left(\xi(k) - \xi^*\right) \le 1 \right\}. \tag{13}$$

В следующей лемме дается достаточное условие выполнения ограничений (2) на значения выходов и управляющих воздействий модели (3). Оно формулируется в виде системы ЛМН относительно переменных $\mathrm{Q}(k)$ и $Y(k)$, фигурирующих в Теореме.

Лемма 1. Пусть матрицы $\mathrm{Q}(k) \succ 0$, $Y(k)$ и скаляр $\alpha(k)$ удовлетворяют ЛМН (10). Тогда $\forall k \ge 0$ выполнение ЛМН

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Q}_x & C\mathrm{Q}(k) \\ \mathrm{Q}(k)C^{\mathrm{T}} & \mathrm{Q}(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{14}$$

$$Y(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right) \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} u^{\max}\left(\xi(k) - \xi^*\right)^{+} Y^{\mathrm{T}}(k) & Y(k) \\ Y^{\mathrm{T}}(k) & \mathrm{Q}(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{15}$$

где «$^+$» – псевдообращение Мура-Пенроуза, гарантирует выполнение ограничений (2) внутри эллипсоида (13) для системы (3), замкнутой регулятором (4) с матрицей (11).

Таким образом, для построения стабилизирующего регулятора при наличии ограничений (2) Теорема модифицируется следующим образом: к ЛМН (10), гарантирующему стабилизацию замкнутой системы, добавляются ЛМН (14) и (15). При этом эллипсоид (13) с полученной матрицей $\hat{\mathrm{Q}}(k)$ будет инвариантным, то есть фазовая траектория замкнутой системы будет оставаться внутри эллипсоида для всех моментов времени. Это следует из того, что квадратичная форма $\left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathrm{Q}}^{-1}(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right)$ является функцией Ляпунова для рассматриваемой системы.

Анализ условий разрешимости задачи синтеза управления

Возникает естественный вопрос об условиях разрешимости задачи синтеза стабилизирующего управления (9) при ограничениях (10), (14), (15). Необходимыми условиями существования решения задачи являются:

1. Условие управляемости пары матриц (A, B);
2. Условие достаточности ресурсов управления [11], которое допускает следующую геометрическую интерпретацию: выпуклый многогранник, описывающий влияние внешних возмущений, должен находиться строго внутри выпуклого многогранника, описывающего ограничения на ресурсы управления.

Задача проверки последнего условия является NP–трудной и представляет собой совокупность из 2^{q+m} задач линейного программирования. Для ее решения в [11] предложен алгоритм. В связи с этим представляет интерес вычисление минимальных допустимых величин управляющих воздействий. Вопрос о минимальных допустимых значениях компонент вектора $u^{\max}$ решается следующим образом.

Лемма 2. Пусть вектор $\overline{u^{\max}}$ получен в результате решения оптимизационной задачи

$$e_m u^{\max} \to \min \tag{16}$$

при ограничениях (10), (14), (15), где $e_m = [1,1,...,1] \in R^{1\times m}$ – вектор-строка из единиц, а минимизация проводится по матричным переменным $Q(k) = Q^T(k) \in R^{N\times N}$, $Y(k) \in R^{m\times N}$ и скаляру $\alpha(k)$. Тогда при $u^{\max} \geq \overline{u^{\max}}$, где сравнение выполняется поэлементно, для системы (3) существует стабилизирующий регулятор вида (4) при ограничениях (2).

Поиск решения задачи (16) не является простым, поскольку она содержит билинейное матричное неравенство, так как второе из матричных неравенств (15) содержит произведение матричной переменной $Y^{\mathrm{T}}(k)$ и векторной переменной $u^{\max}$. Для поиска решения системы билинейных матричных неравенств (БМН) предлагается использовать итерационную процедуру, которая не гарантирует сходимости процесса, однако такой подход применяется во многих практических приложениях [14].

Итерационная процедура для поиска решения БМН состоит в следующем:

1. Инициализация:
- задать начальные значения компонент вектора $u^{\max}_{(0)}$;
- установить максимальное количество итераций $iter$ и величину ошибки ε;
- установить номер итерации $j \leftarrow 0$.

2. Установить $j \leftarrow j+1$. Найти значения матриц $Q_{(j)}(k)$, $Y_{(j)}(k)$ и скаляра $\alpha_{(j)}(k)$ путем решения задачи (9) при ограничениях (10),(14),(15), используя значения $u^{\max}_{(0)}$.

Найти значения компонент вектора $u^{\max}_{(j)}$ путем решения задачи (16) при ограничениях (10),(14),(15), используя значения матриц $Q_{(j)}(k)$, $Y_{(j)}(k)$ и скаляра $\alpha_{(j)}(k)$, полученные на шаге 2.

3. Проверить выполнение условий критерия останова $\left(j \geq iter\right)$ или $\left(\left\|u^{\max}_{(j)} - u^{\max}_{(j-1)}\right\| / \left\|u^{\max}_{(j)}\right\| < \varepsilon\right)$ и, если они не выполнены, повторить шаг 2, используя найденные значения $u^{\max}_{(j)}$. В противном случае остановить процедуру.

Далее рассмотрим критерий качества (6). Очевидно, что размер эллипсоида (13) зависит от значений весовых матриц W_ξ и W_u, причем чем больше сумма значений следа матриц, тем больше скорость убывания функции Ляпунова (12) и тем меньше размер эллипсоида (13). Поскольку главной целью построения регулятора (4) является подавление влияния внешних возмущений $d(k) \in E(d_c, P_d)$ на выходы системы (3), то вопрос об оптимальных значениях весовых матриц решается следующим образом.

Лемма 3. Пусть матрицы $\hat{W}_\xi \succ 0$ и $\hat{W}_u \succ 0$ получены в результате решения оптимизационной задачи

$$\mathrm{trace}\left(W_\xi\right) + \mathrm{trace}\left(W_u\right) \to \max \tag{17}$$

при ограничениях (10), (14), (15) на матричные переменные $Q(k) = Q^{\mathrm{T}}(k) \in R^{N\times N}$, $\mathrm{Y}(k) \in \mathrm{R}^{m\times N}$, $W_\xi \in R^{N\times N}$, $W_u \in R^{m\times m}$ и скаляр $\alpha(k)$, а значения вектора $u^{\max}$ удовлетворяют Лемме 2.

Тогда регулятор (4) с матрицей (11):

1. Стабилизирует систему (3), причем вдоль всей траектории системы выполнены ограничения (2).

2. Оптимально в смысле критерия (6) с полученными весовыми матрицами $\hat{W}_\xi$, $\hat{W}_u$ подавляет влияние ограниченных внешних возмущений $d(k) \in E(d_c, P_d)$ на выходы системы (3).

Необходимо отметить, что матричное неравенство (10) в задаче (17) является БМН. Поэтому для поиска решения применяется итерационная процедура, аналогичная приведенной выше.

1. Инициализация:
- задать начальные значения матриц $W_{\xi(0)}$ и $W_{u(0)}$;
- установить максимальное количество итераций $iter$ и величину ошибки ε;
- установить номер итерации $j \leftarrow 0$.

2. Установить $j \leftarrow j+1$. Найти значения матриц $Q_{(j)}(k)$, $Y_{(j)}(k)$ и скаляра $\alpha_{(j)}(k)$ путем решения задачи (17) при ограничениях (10),(14),(15), используя значения $W_{\xi(0)}$ и $W_{u(0)}$.

Найти значения матриц $W_{\xi(j)}$ и $W_{u(j)}$ путем решения задачи (17) при ограничениях (10), (14),(15), используя значения матриц $Q_{(j)}(k)$, $Y_{(j)}(k)$ и скаляра $\alpha_{(j)}(k)$, полученные на шаге 2.

3. Проверить выполнение условий критерия останова $\left(j \geq iter\right)$ или $\left(\left\|W_{\xi(j)} - W_{\xi(j-1)}\right\| / \left\|W_{\xi(j)}\right\| < \varepsilon\right)$ и, если они не выполнены, повторить шаг 2, используя найденные значения $W_{\xi(j)}$ и $W_{u(j)}$. В противном случае остановить процедуру.

Численный пример

В качестве примера рассмотрим модель сети, которая изучалась в работе [15] и описывается графом $\Gamma = \left(\{1,2,3\}, \{(2,1),(2,3),(3,1)\}\right)$. Представим управляемые потоки u_1 и u_3 в виде гипердуг, а также добавим поток u_2, который описывает поставки сырья извне (см. рис. 1). Дуги d_1, d_2, изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки $T_{i,j}$ и количество единиц продукции Π_{ij}, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла в круглых скобках указаны значения времени выполнения заказа T_i.

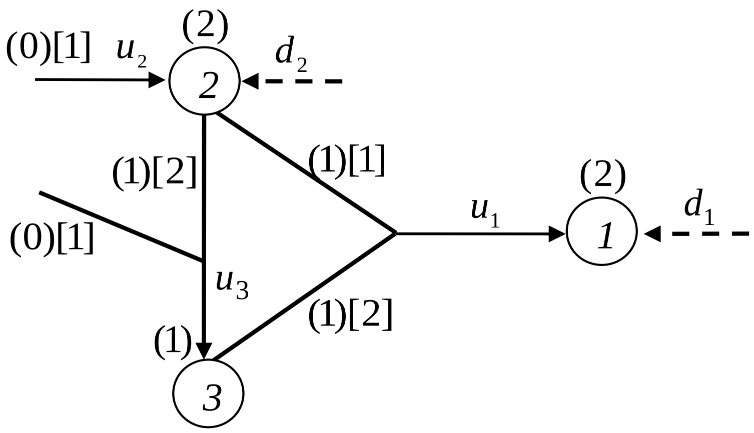


Рис. 1. Графическое представление модели сети

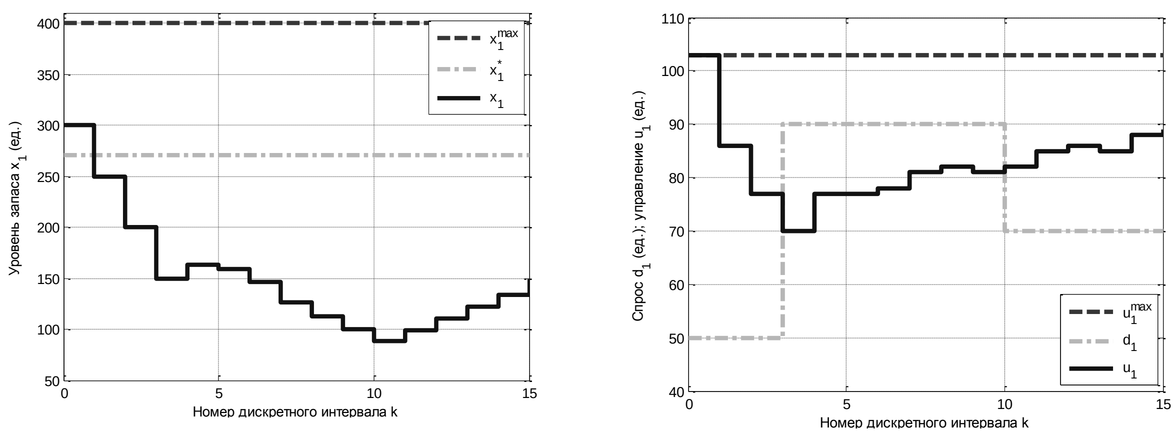
Специфика рассматриваемой сети в том, что на узел 1 действует только внешний спрос; на узел 2 действует как внешний, так и внутренний спрос со стороны узлов 1 и 3; на узел 3 – только внутренний спрос со стороны узла 1.

Заданы структурные ограничения на объемы запаса ресурсов $x^{\max} = [400, 5000, 1300]^T$, на размеры заказов $u^{\max} = [120, 2000, 500]^T$, граничные значения внешнего спроса $d^{\min} = [50, 20]^T$, $d^{\max} = [90, 60]^T$ и начальные условия $x(0) = [300, 4000, 1000]^T$.

Все вычисления выполнены в среде MATLAB с использованием свободно распространяемого пакета CVX [16]. После вычисления величины запаздывания материальных потоков всех узлов сети находим максимальное значение $\Lambda = 3$. По формуле (5) вычисляем уровни страховых запасов узлов сети $x^* = [270, 3900, 1080]^T$. В результате решения соответствующей задачи ПОП [13] определяем параметры эллипсоида (7), аппроксимирующего множество D значений внешнего спроса: $d_c = [70, 40]^T$, $P_d = diag(800, 800)$. По формуле (П.7) вычисляем матрицу эллипсоида, аппроксимирующего множество X допустимых значений состояний: $Q_x = diag(4225, 302500, 12100)$.

Зададим значение критерия останова $\varepsilon = 10^{-2}$ и в результате решения задачи (16) при ограничениях (10), (14), (15) вычислим минимальные допустимые величины управляющих воздействий с помощью итерационной процедуры, описанной выше: $\overline{u^{\max}} = [103, 1874, 468]^T$. Выберем начальные значения диагональных элементов весовых матриц $W_{\xi(0)}$ и $W_{u(0)}$ равными 1.0×10^{-12}, зададим $\varepsilon = 10^{-1}$ и в результате решения задачи (17) при ограничениях (10),(14),(15) с помощью итерационного подхода вычислим оптимальные значения весовых матриц, определяющих критерий качества (6): $W_\xi = 10^{-4} \times diag(1.309 \times 10^{-6}, 7.288 \times 10^{-6}, 9.192 \times 10^{-6}, 0.214, 0.268, 0.287, 0.109, 0.289)$, $W_u = 10^{-4} \times diag(57, 0.103, 1.650)$.

Моделирование осуществлялось в течение 15 периодов. Результаты моделирования для узла 1 при скачкообразно изменяющемся внешнем спросе представлены на рис. 2.



а **б**

Рис. 2. Графики переходных процессов для узла 1: *а* – значения наличного и страхового уровней запасов; *б* – значения внешнего спроса и управляющих воздействий.

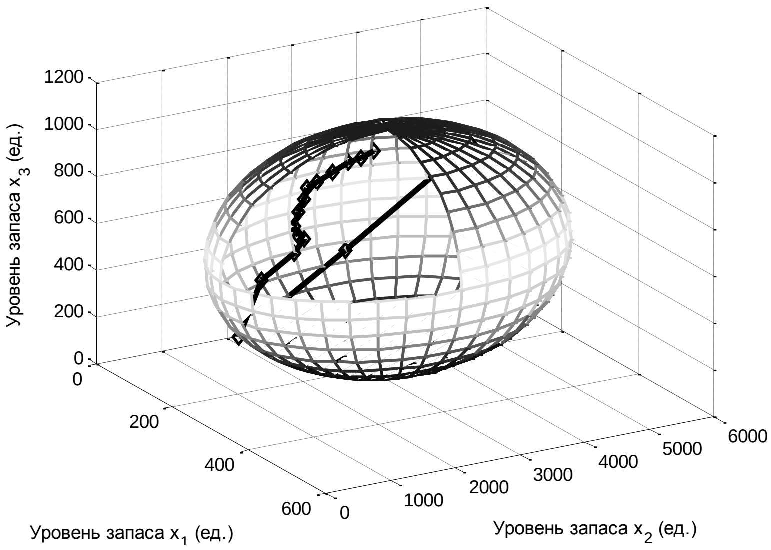


Рис. 3. Фазовая траектория системы и инвариантный эллипсоид, полученный на последнем шаге

Выводы

Предложен подход к решению задачи синтеза стабилизирующего управления запасами в динамических сетях со структурными ограничениями на состояния и управления в условиях действия неизвестных, но ограниченных внешних воздействий. Закон управления строится в виде линейной нестационарной обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов. Для синтеза регулятора требуется решить эквивалентную задачу поиска наименьшего по некоторому критерию инвариантного эллипсоида замкнутой системы, которая сведена к задаче разрешимости системы линейных матричных неравенств. Оценка допустимой области в пространстве управляющих воздействий получена в терминах разрешимости системы билинейных матричных неравенств, для решения которой предложена итеративная процедура. Также получена система билинейных матричных неравенств, решение которой позволяет вычислить весовые матрицы квадратичного функционала, при которых гарантируется максимальная степень подавления влияния внешнего спроса на уровни запаса ресурсов.

Приложение

Доказательство Теоремы.

Определим квадратичную функцию Ляпунова, построенную на решениях системы (8):

$$V\left(\xi(k)-\xi^*\right)=\left(\xi(k)-\xi^*\right)^T P(k)\left(\xi(k)-\xi^*\right), \qquad (\text{П}.1)$$

где $P(k)\in R^{N\times N}$ – симметричная положительно определенная матрица.

Вычислим первую разность по k функции Ляпунова (П.1) в силу системы (8) и потребуем, чтобы $\forall k\geq 0$ значение функции с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью:

$$V\left(\xi(k+1)-\xi^*\right)-V\left(\xi(k)-\xi^*\right)\le -J_\infty(k). \qquad (П.2)$$

Если (П.2) выполняется, то следуя [17] можно показать, что функция Ляпунова (П.1) $\forall k \ge 0$ определяет верхнее граничное значение критерия (6):

$$\max_{\boldsymbol{d}(k)\in E(\boldsymbol{d}_c,\boldsymbol{P}_d)} J_\infty(k) \le V\left(\xi(k)-\xi^*\right). \qquad (П.3)$$

Тогда, в соответствии с (П.3), задача синтеза управления, минимизирующего (6), эквивалентна задаче минимизации функции Ляпунова: $u(k)=\arg\min_{u(k)\in U} V\left(\xi(k)-\xi^*\right)$, которая сводится к задаче минимизации эллипсоида (13) по критерию следа его матрицы $Q(k)$.

Введем следующие обозначения:

$$s(k)=\left[\left(\xi(k)-\xi^*\right)^T, \xi^{*T}, d_c^T, \left(d(k)-d_c\right)^T\right]^T \in R^{2(N+q)},$$

$$f_i(s)=s^T M_i s,\ i=0,1,\quad M_0=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22}\end{bmatrix},\quad M_1=block\ diag\left(0_N, 0_N, 0_q, P_d^{-1}\right),$$

где $M_{11}=\begin{bmatrix} A_f^T P(k) A_f - P(k)+W_\xi+K^T(k)W_u K(k) & A_f^T P(k)\left(A-I\right) & A_f^T P(k) G \\ \left(A-I\right)^T P(k) A_f & \left(A-I\right)^T P(k)\left(A-I\right) & \left(A-I\right)^T P(k) G \\ G^T P(k) A_f & G^T P(k)\left(A-I\right) & G^T P(k) G \end{bmatrix}$;

$M_{12}^T=\left[G^T P(k) A_f \quad G^T P(k)\left(A-I\right) \quad G^T P(k) G\right]$; $\mathrm{M}_{22}=\mathrm{G}^\mathrm{T}\mathrm{P}(k)\mathrm{G}$.

Тогда неравенства (П.2) и (7) можно представить в виде: $f_0(\boldsymbol{s})\le 0 \quad \forall \boldsymbol{s}:\quad f_1(\boldsymbol{s})\le 1$.

Согласно S-процедуре с одним ограничением [18] последнее выражение эквивалентно ЛМН $M_0 \le \alpha(k) M_1$ для некоторого $\alpha(k)>0$, или

$$M_0-\alpha(k)M_1=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22}-\alpha(k)P_d^{-1}\end{bmatrix} \preceq 0. \qquad (П.4)$$

Используя лемму Шура [18] , неравенство (П.4) можно записать в виде:

$$M_{11}-M_{12}\left(M_{22}-\alpha(k)P_d^{-1}\right)^{-1}M_{12}^T \preceq 0.$$

Применяя тождество Шермана-Моррисона-Вудбери [19], получим:

$$\begin{bmatrix} A_f^T \Psi^{-1}(k) A_f - P(k)+W_\xi+K^T(k)W_u K(k) & A_f^T \Psi^{-1}(k)\left(A-I\right) & A_f^T \Psi^{-1}(k) G \\ \left(A-I\right)^T \Psi^{-1}(k) A_f & \left(A-I\right)^T \Psi^{-1}(k)\left(A-I\right) & \left(A-I\right)^T \Psi^{-1}(k) G \\ G^T \Psi^{-1}(k) A_f & G^T \Psi^{-1}(k)\left(A-I\right) & G^T \Psi^{-1}(k) G \end{bmatrix} \preceq 0, \qquad (П.5)$$

где $\quad \Psi(k)=P^{-1}(k)-\dfrac{1}{\alpha(k)}GP_dG^T$.

Введем обозначение $Q(k)=P^{-1}(k)$ и домножим неравенство (П.5) слева и справа на блочно-диагональную матрицу $block\ diag\left(Q(k), I_N, I_q\right)$.

Введем, согласно [17], вспомогательную матричную переменную $Y(k)=K(k)Q(k)$, исключая переменную $K(k)$. В силу $Q(k)\succ 0$ матрица $K(k)$ восстанавливается единственным образом: $K(k)=Y(k)Q^{-1}(k)$.

Используя лемму Шура, представим полученное неравенство в эквивалентном виде:

$$\begin{bmatrix} -Q(k)+Q(k)W_{\xi}Q(k)+Y^T(k)W_uY(k) & 0_N & 0_{N\times q} \\ 0_N & 0_N & 0_{N\times q} \\ 0_{q\times N} & 0_{q\times N} & 0_q \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} AQ(k)+BY(k) \\ A-I \\ G \end{bmatrix}^T \Psi^{-1}(k)\begin{bmatrix} AQ(k)+BY(k) & A-I & G \end{bmatrix}\preceq 0.$$

Вновь применив лемму Шура и домножив полученное неравенство слева и справа на $block\ diag\left(I_N, I_N, I_q, I_N, I_q, W_{\xi}, W_u\right)$, окончательно ЛМН представим в виде (10).

Таким образом, приходим к задаче минимизации линейной функции $trace\left(Q(k)\right)$ при ограничениях в виде ЛМН (10), которая является задачей полуопределенного программирования. Теорема доказана.

Доказательство Леммы 1.

Рассмотрим ограничения (2) на значения выходов и управляющих воздействий модели (3). Для того, чтобы учесть первое из ограничений (2), выполним аппроксимацию множества допустимых значений X эллипсоидом

$$E(x^*, Q_x)=\left\{x\in R^n:\ \left(x(k)-x^*\right)^T Q_x^{-1}\left(x(k)-x^*\right)\le 1\right\}, \qquad (\text{П}.6)$$

у которого вектор, определяющий координаты центра, равен вектору страховых запасов x^*, а матрица эллипсоида Q_x вычисляется на основании вектора $x^{\max}$, задающего граничные значения:

$$Q_x = diag\left(\frac{1}{4}\left(\min\left\{x_1^*, x_1^{\max}-x_1^*\right\}\right)^2, \ldots, \frac{1}{4}\left(\min\left\{x_n^*, x_n^{\max}-x_n^*\right\}\right)^2\right). \qquad (\text{П}.7)$$

В качестве оценки множества достижимости замкнутой системы (8) выступает эллипсоид (13). Введем в рассмотрение эллипсоид, аппроксимирующий множество выходов системы (8)

$$E(x^*, CQ(k)C^T)=\left\{x\in R^n:\ \left(x(k)-x^*\right)^T\left(CQ(k)C^T\right)^{-1}\left(x(k)-x^*\right)\le 1\right\}. \qquad (\text{П}.8)$$

Тогда для того, чтобы выполнялось первое из неравенств (2) необходимо, чтобы объем эллипсоида (П.8) не превосходил объема эллипсоида (П.6), что эквивалентно выполнению неравенства

$$CQ(k)C^T \le Q_x. \qquad (\text{П}.9)$$

С помощью леммы Шура неравенство (П.9) может быть представлено в виде ЛМН (14).

Рассмотрим второе из ограничений (2) на управляющие воздействия, которое представим в виде двух неравенств

$$0 \le u(k), \quad u(k) \le u^{\max} . \tag{П.10}$$

С учетом (4) и тождества (11) неравенства (П.10) представим в виде

$$0 \le Y(k)Q^{-1}(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right), \quad Y(k)Q^{-1}(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right) \le u^{\max}. \tag{П.11}$$

Поскольку матрица $Q(k)$ является положительно определенной, для того, чтобы выполнялось первое из неравенств (П.11) достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $0 \le Y(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right)$.

Умножим слева левую и правую часть второго из неравенств (П.13) сначала на $\left(\xi(k) - \xi^*\right)^+$, а затем на $Y^T(k)$, и с помощью леммы Шура представим в виде второго ЛМН (15).

Таким образом, ограничения (2) представлены в виде ЛМН (14), (15). Лемма 1 доказана.

Список литературы

1. Лотоцкий, В.А. Модели и методы управления запасами / В.А. Лотоцкий, А.С. Мандель. — М. : Наука, 1991. — 189 с.
2. Constrained model predictive control: stability and optimality / [Mayne D. Q. et al.] // Automatica. — 2000. — V. 36(6). — P. 789-814.
3. Bertsekas, D.P. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / D. Bertsekas, I. Rhodes // IEEE Trans. Automat. Control. — 1971. — Vol. 16. — P. 117-128.
4. Blanchini, F. Set-theoretic methods in control / F. Blanchini, S. Miani. — Boston: Birkhauser, 2008. — 481 p.
5. Хлебников, М.В. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) / М.В. Хлебников, Б.Т. Поляк, В.М. Кунцевич // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 11. — С. 9-59.
6. Linear matrix inequalities in system and control theory / [Boyd S. et al.]. — Philadelphia: SIAM, 1994. — 193 p.
7. Polyak, B. Ellipsoidal approximations to attraction domains of linear systems with bounded control / B. Polyak, P. Shcherbakov // Proc. American Control Conf., St. Louis, USA. — June 10-12, 2009. — P. 5363-5367.
8. Хлебников, М.В. Ограниченное линейное управление, оптимальное по квадратичному критерию специального вида / М.В. Хлебников, П.С. Щербаков // Труды ИСА РАН. — 2013. — Т. 63. — Вып. 2. — С. 85-89.
9. Квакернаак, Х. Линейные оптимальные системы управления: Пер. с англ. / Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977. — 656 с.
10. Дорофеев, Ю.И. Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / Ю.И. Дорофеев, А.А. Никульченко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — № 1. — С. 16-27.
11. Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays / [F. Blanchini et al.] // IEEE Trans. on robotics and automation. — 2000. — Vol. 16. — No. 3. — P. 313-317.
12. Солодовников, А.С. Математика в экономике. В 3-х ч. Ч. 1.: учебник / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. — М. : Финансы и статистика, 1999. — 224 с.
13. Дорофеев, Ю.И. Синтез системы оптимального управления запасами с дискретным ПИД-регулятором с использованием техники линейных матричных неравенств / Ю. И. Дорофеев // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. — 2014. — Вип. 4(41). — С. 34-41.
14. Mulder, E.F. Multivariable anti-windup controller synthesis using bilinear matrix inequalities / E. Mulder, M. Kothare, M. Morari // European Journal of Control. — 2000. — Vol. 7. — No. 5. — P. 455-464.
15. Blanchini, F. Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs / F. Blanchini, F. Rinaldi, W. Ukovich // IEEE Trans. on robotics and automation. — 1997. — Vol. 13. — P. 633-645.

16. Grant, M. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 1.21 / M. Grant, S. Boyd. — Режим доступа: http://cvxr.com/cvx.
17. Kothare, M.V. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities / M.V. Kothare, V. Balakrishnan, M. Morari // Automatica. — 1996. — Vol. 32. — No. 10. — P. 1361-1379.
18. Баландин, Д.В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. — М. : Физматлит, 2007. — 280 с.
19. Голуб, Д. Матричные вычисления: Пер. с англ. / Д. Голуб, Ч. Ван Лоан. — М. : Мир, 1999. — 548 с.

АНАЛІЗ УМОВ РОЗВ'ЯЗУВАНОСТІ ЗАДАЧІ СИНТЕЗУ ОБМЕЖЕНОГО СТАБІЛІЗУЮЧОГО КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ БІЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Ю.І. Дорофєєв

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,
вул. Фрунзе, 21, м Харків, 61002, Україна; e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu

Розглядається задача синтезу стабілізуючого керування запасами в умовах дії невідомого, але обмеженого зовнішнього попиту і структурних обмежень на стани та керуючі дії. Керування будується у формі лінійного нестаціонарного зворотного зв'язку за сигналом нев'язки між готівковими і страховими рівнями запасу ресурсів. Для синтезу регулятора потрібно вирішити еквівалентну задачу пошуку найменшого за деяким критерієм інваріантного еліпсоїда замкнутої системи, яка зведена до задачі розв'язання системи лінійних матричних нерівностей. Наступною задачею є оцінювання допустимої області в просторі керуючих впливів, вирішення якої отримано в термінах розв'язуваності системи білінійних матричних нерівностей. Також отримана система білінійних матричних нерівностей, вирішення якої дозволяє обчислити вагові матриці квадратичного функціоналу, при яких гарантується максимальна ступінь подавлення впливу зовнішнього попиту на рівні запасу ресурсів. Розглянуто чисельний приклад.
Ключові слова: керування запасами, лінійне обмежене керування, інваріантний еліпсоїд, лінійна матрична нерівність, білінійна матрична нерівність.

ANALYSIS OF THE SOLVABILITY CONDITIONS OF THE CONSTRAINED STABILIZING INVENTORY CONTROL SYNTHESIS PROBLEM USING BILINEAR MATRIX INEQUALITIES

Yu.I. Dorofieiev

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute",
str. Frunze, 21, Kharkiv, 61002, Ukraine; e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu

The problem of stabilizing inventory control synthesis under the action of an unknown but bounded external demand and structural constraints on the state and control actions is considered. A control is constructed as a linear non-stationary feedback with respect to deviation between cash and safety stock levels of resources. For the regulator synthesis is required to solve the equivalent problem of finding the least invariant ellipsoid of the closed system according to some criterion, which is reduced to the problem of solvability of a linear matrix inequalities system. The next problem is to estimation of the feasible region in the space of control actions, which is solved in terms of solvability of a system of bilinear matrix inequalities. Also, a system of bilinear matrix inequalities is obtained, which decision allows to calculate the quadratic functional weight matrices, which guarantees the maximum degree of the external demand influence suppression on resources inventory levels. The numerical example is considered.
Keywords: inventory control; constrained linear control; invariant ellipsoid; linear matrix inequality, bilinear matrix inequality.