УДК 519.714.71

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 5 (2015) , No. 2, pp. 191-196

ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ МИНИМИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ ИНФИМУМНЫХ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Ю.Д. Иванов

Одесский национальный политехнический университет,
пр. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: iva.iurij2013@yandex.ua

Приводится сравнительный анализ известных методов минимизации булевых функций. Предлагается оптимальный способ минимизации булевых функций, основанный на инфимумных дизъюнктивных нормальных формах булевых функций.

Ключевые слова: совершенная дизъюнктивная нормальная форма, минимальная дизъюнктивная нормальная форма, инфимумная дизъюнктивная нормальная форма

Введение

Сложность комбинационных и последовательных автоматов, реализованных на основе дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) булевых функций (БФ) определяется суммарным рангом конъюнкций минимальных дизъюнктивных нормальных форм (МДНФ) соответствующих БФ.

Большинство известных методов минимизации булевых функций, определяющих МДНФ, относятся к локальным алгоритмам упрощения ДНФ [1]. К локальному алгоритму относятся и классический метод Квайна-Мак-Класки, основанный на использовании логических операций склеивания и поглощения.

Шаги, составляющие метод Квайна-Мак-Класки.

1. Задание БФ в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ).
2. Проведение операции склеивания, в результате которой получаем дизъюнкцию всех возможных конъюнкций заданной БФ.
3. Получение сокращенной ДНФ заданной БФ путем проведения операции поглощения.
4. Образование ядра путем объединения всех конъюнкций, оставшихся после поглощения некоторых конъюнкций.
5. Упрощение таблицы конъюнкций путем вычеркивания строк и столбцов, соответствующих ядру.
6. Определение всех тупиковых ДНФ БФ.
7. Определение минимальных ДНФ (МДНФ) заданной БФ.

Понятие ядра является локальным [1], поэтому алгоритм Квайна-Мак-Класки также принадлежит к локальным алгоритмам со всеми недостатками, присущими этим алгоритмам.

Кроме того, для большого числа переменных n перечисление вариантов склеивания и синтез множества тупиковых ДНФ значительно усложняет процедуру минимизации.

К локальным алгоритмам относится и метод двух подмножеств, который базируется на представлении множества вершин n-мерного куба двумя подмножествами так, что одно подмножество содержит вершины с четным числом переменных с инверсией, а второе подмножество состоит из вершин с нечетным числом переменных с инверсией.

Этот метод распространяется на БФ от n переменных и в общем случае проще классического метода Квайна-Мак-Класки.

Различные модификации метода древовидного графа [2] просты в реализации, но обладают существенными недостатками, которые заключаются в получении простых конъюнкций и в выборе среди них тупиковых форм.

Существенным свойством локальных алгоритмов минимизации БФ является то, что каждое однократно проводимое упрощение локально, т.е. запрашивает только один член (одну конъюнкцию) ДФН, причем все возможные преобразования сводятся только к вычеркиванию букв в конъюнкциях или вычеркиванию самих конъюнкций.

Последовательность упрощений дает возможность построить тупиковую ДНФ, которая является локальным экстремумом. Различие последовательности преобразований исходной ДНФ определяется множеством локальных экстремумов, среди которых необходимо найти глобальный экстремум, то есть минимальную ДНФ.

В общем случае последовательность преобразований сводится к естественной упорядоченности: совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – сокращенная ДНФ – тупиковая ДНФ – минимальная ДНФ.

Сокращенная ДНФ однозначно строится по СДНФ, но определение тупиковых ДНФ неоднозначно, так как удаление некоторых конъюнкций в сокращенной ДФН может приводить как к МДНФ, так и к тупиковой ДНФ, которая в общем случае может и не быть МДНФ.

Кроме того, точное число тупиковых ДНФ конкретной БФ не определено. Это приводит к тому, что в локальных алгоритмах выбор МДНФ среди тупиковых ДНФ не является строго однозначным.

Таким образом, определение глобального экстремума, то есть МДНФ с минимально возможным рангом $МДНФ_{\min\min}$, в локальных алгоритмах строго не доказано. Это приводит к тому, что локальные алгоритмы в общем случае осуществляют приблизительную оценку МДНФ, которая не является глобальным экстремумом, то есть $МДНФ_{\min\min}$.

Наложение любых ограничений на процедуру упрощения БФ, например, минимизация БФ по частям, представление БФ в виде нескольких подмножеств, задание конкретной БФ, определяет локальный характер этих упрощений со всеми присущими недостатками.

Основная часть

Для проведения сравнительного анализа некоторых современных распространенных алгоритмов минимизации БФ используем современный алгоритм минимизации, обеспечивающий получение глобального экстремума $МДНФ_{min\,min}$ путем синтеза инфимумных дизъюнктивных нормальных форм (ИДНФ) БФ, то есть точных нижних границ по критерию суммарного ранга всех конъюнкций ИДНФ $r_{\sum\min}$ [3].

Алгоритм синтеза ИДНФ БФ, то есть глобального экстремума $МДНФ_{\min\min}$, представленного в терминах n-мерного куба E^n, реализуется на основе совершенной матричной расстановки (СМР)[4].

Реализация алгоритма синтеза ИДНФ БФ [5] осуществляется в несколько этапов:

1. Для заданного числа n переменных функций $f(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ определяются все n-разрядные двоичные комбинации номеров вершин куба E^n от 000….0 до 111….1.

2. Для заданной *БФ* определяются вершины подмножества $N_f \subseteq E^n$, для которых $f(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) = 1$.

3. Для каждой вершины подмножества N_f определяются все возможные геометрические соседи по всем n определенным в пределах СМР n-мерного куба E^n. Таким образом организуются все возможные покрывающие кубы E^1 (ребра) для всех вершин подмножества N_f.

4. В определенной совокупности покрывающих кубов E^1 (ребер) производится приведение подобных (эквивалентных) покрывающих интервалов, которые содержат одинаковые вершины. В результате приведения остается только один покрывающий интервал из каждой группы эквивалентности.

5. Организуются все возможные покрывающие кубы E^2 (грани) для каждого куба E^1 в пределах подмножества вершин N_f по всем возможным переменным. Если преобразование $E^i \to E^{i+1}$ невозможно, то преобразуемый покрывающий интервал E^i является максимальным покрывающим интервалом покрытой совокупности вершин и входит в максимальное покрытие вершин $N_{f_{\max}}$ подмножества N_f. Понятно, что приведение эквивалентных покрывающих интервалов осуществляется на всех возможных этапах построения кубов E^i E^i.

6. Объединение максимальных покрывающих N_f интервалов все совокупностей вершин подмножества обеспечивает максимальное оптимальное покрытие $N_{f_{\max}}$, что определяет $f_{uДНФ}(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) = 1$, то есть глобальный оптимум $МДНФ_{\min\ \min}$ с рангом $r_{\sum\min}$.

На всех этапах построения покрывающих кубов E^i одновременно преобразуются все вершины подмножества N_f, на котором $f(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) = 1$, что принципиально отличает глобальный алгоритм синтеза $МДНФ_{\min\ \min}$ (ИДНФ) от локальных алгоритмов со всеми их недостатками.

Для проведения сравнительного анализа некоторых современных распространенных алгоритмов минимизации БФ используем алгоритм синтеза $МДНФ_{\min\ \min}$.

Для тестирования были выбраны следующие программы минимизации:

1. Simple Solver – пакет булевой логики, который может быть использован для разработки таблиц истинности и сокращения булевых уравнений [6].
2. Online minimization of Boolean functions. Программа выполняет онлайн оптимизацию булевых функций, которые заданы уравнениями или таблицей истинности [7].
3. Logic Friday – программное обеспечение для оптимизации логических выражений, анализа и синтеза булевых функций. Logic Friday использует espresso для минимизации и misII для синтеза диаграмм [8].
4. Karma (KARnaugh Maps – логический синтез – Quine-McCluskey алгоритм) представляет собой набор инструментов логического синтеза, в том числе карты Карно, Квайна-Мак-Класки минимизации, и другие программы [9].
5. Karnaugh Minimizer – это инструмент для разработчиков цифровых устройств, которые используют булевы функции и карты Карно. При количестве переменных $2/8$ используются карты Карно, при $9/23$ переменных – Quine-McClusky минимизация [10].

Для каждой программы были созданы таблицы истинности. Результаты работы программ представлены в виде минимизированных функций, которые были нормализованы для проведения оценки относительно идеальной программы синтеза ИДНФ БФ. Оценка качества минимизации заданных в виде ДНФ булевых функций рассчитывается из количества созданных конъюнкций, которые составляют соответственные минимальные ДНФ для каждой программы. Сравнительная оценка ранга соответствующих МДНФ не использовалась, поскольку критерия количества конъюнкций, созданных МДНФ оказалось достаточно.

Количество конъюнкций минимальных ДНФ каждой программы минимизации оценивалась для $n = 4/1$.

1. Количество переменных $n = 4$.

Программа Karnaugh Minimizer минимизировала булеву функцию хуже, чем другие программы, то есть минимальная ДНФ содержит 5 конъюнкций, а все другие программы имеют по 4 конъюнкции.

2. Количество переменных $n = 5$.

Программы Logic Friday и Karnaugh Minimizer имеют увеличенное число конъюнкций по сравнению со всеми остальными программами: $МДНФ_{LF} = 12 > 11$ $МДНФ_{KM} = 14 > 11$, то есть эти программы работают плохо.

3. Количество переменных $n = 6$.

Программа Online minimization полностью не работают. Программа Logic Friday имеет число конъюнкций $МДНФ_{LF} = 15 > 14$, а Karnaugh Minimizer $МДНФ_{KM} = 15 > 14$, то есть эти программы работают плохо.

4. Количество переменных $n = 7$.

Программы Online minimization, Karma не работают. Программа Logic Friday при $МДНФ_{LF} = 24 > 22$ и программа Karnaugh Minimizer при $МДНФ_{KM} = 28 > 22$ работают плохо.

5. Количество переменных $n = 8$.

Программы Online minimization, Karma не работают. Программа Logic Friday при $МДНФ_{LF} = 43 > 41$ и программа Karnaugh Minimizer при $МДНФ_{KM} = 53 > 41$, то есть работают плохо.

6. Количество переменных $n = 9$.

Программы Simple Solver, Online minimization, Karma, Karnaugh Minimizer не работают. Программа Logic Friday при $МДНФ_{LF} = 75 > 74$.

7. Количество переменных $n = 10$.

Программы Simple Solver, Online minimization, Karma, Karnaugh Minimizer не работают. Программа Logic Friday при $МДНФ_{LF} = 154 > 150$.

8. Количество переменных $n = 11$.

Все программы, за исключением Logic Friday и ИДНФ минимизация, не работают. Программа Logic Friday при $МДНФ_{LF} = 272 > 271$ работает очень плохо, а иногда совсем не работает.

9. Количество переменных $n = 12$.

Программы Simple Solver, Online minimization, Karma, Karnaugh Minimizer не работают. Программа Logic Friday работает плохо, так как $МДНФ_{LF} = 527 > 513$.

Количество дизъюнктивных МДНФ каждой из тестируемых программ для числа переменных $n = 4/12$, приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Количество членов дизъюнктивных МДНФ полученных при минимизации соответствующими программами.

Число перемен-ных n БФ	ИДНФ мини-мизация	Simple Solver	Online minimization	Logic Friday	Karma	Karnaugh Minimizer	Без мини-мизации
4	4	4	4	4	4	5	13
5	11	11	11	12	11	14	22
6	14	22	-	15	14	15	49
7	22	41	-	24	-	28	88
8	41	-	-	43	-	53	186
9	74	-	-	75	-	-	370
10	150	-	-	151	-	-	731
11	271	-	-	272	-	-	1427
12	513	-	-	527	-	-	28293

Выводы

Таким образом, проведенный анализ показал, что ни одна из тестируемых программ не может обеспечить гарантированное получение $МДНФ_{\min\min}$ для большинства значений числа переменных $n = 4/12$ заданных БФ, вследствие локального характера минимизирующих преобразований.

Кроме того, многие тестируемые программы минимизации отказываются работать, начиная с $n > 6$. Гарантированно обеспечивает получение $МДНФ_{\min\min}$ (ИДНФ) в качестве точности нижней границы МДНФ только глобальный алгоритм ИДНФ минимизации, относительно которого и проводилось сравнение.

Список литературы

1. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики (Под общ. ред. С.В.Яблонского и О.В.Лупанова). - М.: Наука, 1974.
2. Чернышев, Ю.Щ. Графовые представления переключательных функций, алгоритмы их оптимизации и моделирование / Ю.Щ. Чернышев // Гибридные вычислительные машины и комплексы. – К.: Наукова думка, 1974. –569 с.
3. Иванов, Ю.Д. Метод синтеза инфимумных дизъюнктивных нормальных форм логических функций / Ю.Д. Иванов // Тр. Одес. политехн. Ун-та. – 2006. – Вып. 1(25). – С.178-183.
4. Іванов, Ю.Д. Метод побудови досконалої матричної розстановки як основи синтезу диз'юнктивних нормальних форм булевої функції / Ю.Д. Іванов, В.М. Ніколаєнко, І.В. Пампуха // Вісник Київського національного університету ім. Т.Шевченка. Військово-спеціальні науки. – 2007. – Вип. 19'2007. – С.58-62.
5. Иванов, Ю.Д. Алгоритм синтеза инфимумных дизъюнктивных нормальных форм логических функций / Ю.Д. Иванов, О.С. Захарова // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2006. – Вып. 2(26). – С.167-172.
6. Online minimization of Boolean functions [Электронный ресурс] / Режим доступу: http://tma.main.jp/logic/index_en.html.
7. Logic Friday – free software for Boolean logic analysis [Электронный ресурс] / Режим доступу: http://sontrak.com.
8. Karma – Logic Circuit Synthesis Labs- Home [Электронный ресурс] / Режим доступу: http://www.inf.ufrgs.br/logics/.
9. Karnaugh Minimizer – Karnaugh Minimizer – Download [Электронный ресурс] / Режим доступу: http://karnaugh-minimizer.en.softonic.com

ЕФЕКТИВНИЙ СПОСІБ МІНІМІЗАЦІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ ІНФІМУМНИХ ДИЗ'ЮНКТИВНИХ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ

Ю.Д. Іванов

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченко 1, Одеса 65044, Україна; e-mail: iva.iurij2013@yandex.ua

Наводиться порівняльний аналіз відомих методів мінімізації булевих функцій. Пропонується оптимальний спосіб мінімізації булевих функцій, заснований на ІДНФ уявленнях булевих функцій.
Ключові слова: досконала діз'юнктивна нормальна форма, мінімальна діз'юнктивна нормальна форма, інфімумна діз'юнктивна нормальна форма

EFFICIENT WAYMINIMIZATION OF BOOLEAN FUNCTIONS BASED ON INFIMUMNYH DISJUNCTIVE NORMAL FORM

Yu.Ivanov

Odessa national polytechnic university,
1 Shevchenko Ave., Odessa 65044, Ukraine; e-mail: iva.iurij2013@yandex.ua

The comparative analysis of the known methods of minimization of Boolean functions. It offers an optimal way to minimize Boolean functions based on infimumnyh disjunctive normal form of representation of Boolean functions.
Keywords: perfect disjunctive normal form, the minimum disjunctive normal form, infimumnaya disjunctive normal form