

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН В ТРУБЧАТЫХ ОСЯХ ПРИ ИЗГИБЕ С ВРАЩЕНИЕМ

Й. Ариза Де Мигель

Университет Страны Басков,
Квартал Сарьена, Лейо, 48940, Страна Басков, Испания; e-mail: jonarizademiguel@gmail.com

Разработана геометрическая модель развития поверхностных усталостных трещин в трубчатых осях при изгибе с вращением, соответствующая эмпирическим наблюдениям и теоретическим моделям, предложенным другими авторами. Точность обобщенной геометрической модели подтверждена результатами МКЭ-моделирования. Разработан способ расчетной коррекции коэффициентов интенсивности напряжения при изгибе осей с вращением. В совокупности оба метода позволяют прогнозировать остаточное число циклов до достижения трещиной определенной глубины.

Ключевые слова: полуэллиптическая трещина, коэффициент интенсивности напряжений, остаточный ресурс оси

Введение

Исследование условий возникновения и развития поверхностных усталостных трещин во вращающихся осях и валах является актуальным не только для установления причин разрушения конструкций, но и для повышения надежности их проектирования и эксплуатации в составе скоростных видов транспорта, металлургических машин, крупногабаритных редукторов и др. машин и механизмов. Неоспоримые преимущества при этом имеют аналитические методы исследований, отличающиеся математической строгостью, простотой анализа результатов и адаптивностью к нормативным методикам инженерных расчетов.

Цель исследования

В ряде экспериментальных исследований установлено, что поверхностные трещины различной геометрии в процессе развития стремятся к единой полуэллиптической форме [1]. Разработаны аналитические модели и получены уравнения для расчета коэффициентов интенсивности напряжения (КИН) в характерных точках усталостных трещин валов и осей при переменном изгибе и кручении [2]. В частности, отмечены особенности развития трещин при изгибе с вращением сплошных и трубчатых осей. При этом аналитические расчетные методики и соответствующие базовые модели авторами не разработаны [3].

Цель исследования – обоснование и разработка инженерного метода расчета КИН и аналитического прогнозирования развития поверхностных усталостных трещин в трубчатых осях при изгибе с вращением.

Анализ литературы

Адекватность базовой геометрической модели поверхностной трещины является необходимым условием для дальнейшего исследования ее развития. На основании эмпирических наблюдений *Fonte M.* и др. [1, 2, 3] предложена двухпараметрическая модель, в которой установлено постоянное отношение между углом раскрытия полуэллиптической трещины φ и её глубиной b (рис. 1). Модель для изгиба осей сплошных или трубчатых представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= \frac{a}{D} = \frac{1}{2} \sin \varphi \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi} \right)^2 \right]^{0,5}; \\ \bar{b} &= \frac{b}{D} = \frac{\varphi}{\pi}; \\ \bar{c} &= \frac{c}{D} = 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При этом отмечено, что геометрическая форма трещин в соответствии с данной моделью не меняется в случае изгиба оси с вращением.

В исследованиях *Carpinteri A.* и др. установлено, что при изгибе с вращением пересечение фронта трещины с наружной поверхностью оси происходит под углом, близким к $\pi/2$ [3].

Для модели (1) это условие не выполняется, поэтому предложены следующие уточнения:

$$\bar{a} = 0,5 \sin \varphi (\cos \varphi)^{-0,5}; \quad \bar{b} = 0,5 (1 - \cos \varphi)^{0,5}; \quad \bar{c} = 0,5. \quad (2)$$

Расчетная обобщающая модель. Дальнейшим развитием моделей (1) и (2) является однопараметрическая модель геометрии поверхностной трещины, отличающаяся тем, что форма фронта трещины и положение его центра являются функциями только угла раскрытия трещины φ [1, 4]. При этом обеспечивается выполнение трех основных условий, подтверждаемых фрактограммами усталостных разрушений и результатами многочисленных испытаний на образцах, а именно:

- исходная форма зарождающейся усталостной трещины полукруговая;
- соблюдается отношение, установленное *Fonte M.* [1, 2];
- выполняется условие перпендикулярности по *Carpinteri A.* [4].

Обобщающая модель (рис. 1) имеет вид

$$\bar{a} = \frac{\sin \varphi}{2\sqrt{2}} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\bar{b}}{\cos \varphi} \right)^2} \right]^{0,5}; \quad \bar{b} = \frac{\varphi}{\pi} \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos \varphi \right]; \quad \bar{c} = \frac{\cos \varphi}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{\bar{b} \sin \varphi}{\bar{a} \cos \varphi} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Адекватность модели (3) предложено проверить путем анализа изменений геометрии развивающейся трещины в соответствии с уравнением [5]

$$\frac{db}{dN} = C \cdot (\Delta K_I)^n, \quad (4)$$

где N – число циклов за определённый период работы;

ΔK_I – изменение коэффициента интенсивности напряжений за тот же период;

C и n – постоянные, зависящие от материала и условий нагружения (например, для стали 42CrMo4 принято $n=3$ и $C = 4,9 \cdot 10^{-12}$ [6]).

Установив значения ΔK_I для характерных точек фронта трещины, можно определить дискретные изменения геометрии развивающейся усталостной трещины [1, 2]. Например, рассчитав значения K_I^* в точках P и B , можно вычислить приращение относительной глубины трещины $\overline{PP'}$ и определить в соответствии с моделью (3) ее новую форму (рис. 2) по уравнению

$$\overline{BB'} = \overline{PP'} \cdot \left(\frac{\Delta K_{IB}}{\Delta K_{IP}} \right)^n = \overline{PP'} \cdot \left(\frac{K_{IB}^*}{K_{IP}^*} \right)^n. \quad (5)$$

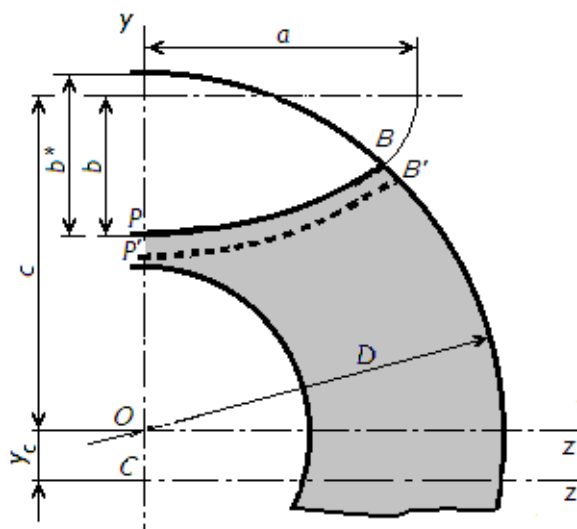


Рис. 1. Расчетная схема характеристик сечения оси с усталостной трещиной

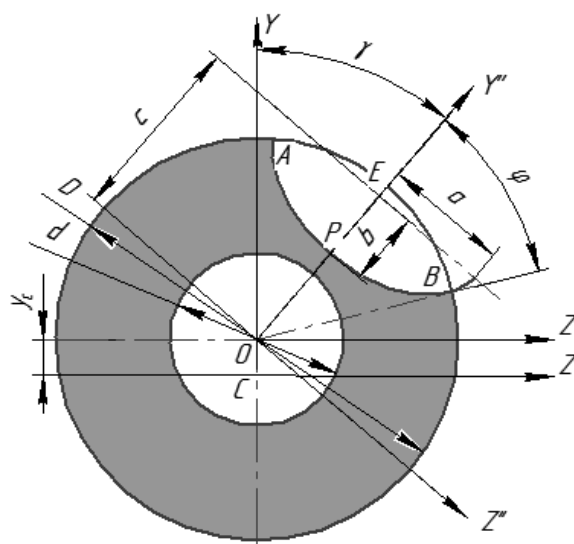


Рис. 2. Расчетная схема оси с трещиной при изгибе с вращением

Значения K_I^* вычислены по уравнениям, предложенным Огунуак I.V. и др. [7] для трубопровода, подверженного деформациям изгиба, в виде

$$K_I^* = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi b}} = \psi \cdot \gamma \cdot \pi^{-0,5} \left(2 - \frac{1,64\bar{b}^*}{\varphi} \right) \left[1 - \left(0,89 - 0,57\sqrt{\frac{2\bar{b}^*}{\varphi}} \right)^3 \left(\frac{2\bar{b}^*}{1-k_h} \right)^{1,5} \right]^{-3,25}, \quad (6)$$

где $k_h = d/D$ – коэффициент пустотелости оси; параметр $\bar{b}^* = 1/2 - \bar{c} + \bar{b}$.

Корректирующая краевая функция в точках P и B

$$\gamma_P = 1,0; \gamma_B = \left[1,1 + 0,35 \left(\frac{2\bar{b}^*}{1-k_h} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{2\bar{b}^*}{\varphi}}. \quad (7)$$

Эквивалентные относительные напряжения ψ в характерных точках трещины

$$\left. \begin{aligned} \psi_P &= 1 - 0,2668\bar{b}^* + 0,44\bar{b}^* \left[\frac{2,545\bar{b}^*}{1-k_h} \left(1 - \sqrt{\frac{2\bar{b}^*}{\varphi}} \right) - \frac{\bar{b}^*}{\varphi} \right] \\ \psi_B &= 1 - 0,36\bar{b}^* \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Поскольку уравнения, аналогичные (6), для изгиба оси с вращением в известных публикациях отсутствуют, предложено приближенное решение, позволяющее установить изменение циклических напряжений на краях трещины при изгибе оси и ее одновременном вращении относительно плоскости изгиба YOX (рис. 2). Применение такого решения ограничено:

- глубиной развивающейся трещины $\bar{b}^* \leq 0,35(1 - k_h)$;
- условием непересечения трещиной внутреннего отверстия.

В результате поворота оси и перемещении трещины в направлении от нейтрального слоя напряжения в крайней точке (например, в т. A) по мере приближения к вертикальной плоскости изгиба YOX увеличиваются раньше, чем в точках P и B . После прохождения плоскости изгиба YOX – наоборот, напряжения в т. A уменьшаются раньше, чем в точках P и B . Таким образом объясняется эффект выпрямления усталостных трещин при изгибе с вращением, наблюдаемый на фрактограммах усталостных разрушений натуральных осей и опытных образцов.

В результате исследований характеристик прочности трубчатой оси с поверхностной полуэллиптической трещиной при изгибе установлено, что определенное влияние на распределение номинальных напряжений по длине фронта трещины может оказывать смещение центра масс сечения [4, 8, 9]. В соответствии с разработанной аналитической методикой можно вычислить перемещение центра масс (расстояние u_c на рис. 1, 2) и определить изменение номинальных напряжений в любой точке фронта трещины в приведенной последовательности. Для этого:

1. Определяют вспомогательный угол: $\delta = \arccos\left(\frac{2\bar{c} - \cos\varphi}{2\bar{b}}\right)$

и вспомогательные функции

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m(\varphi) &= m \cdot \varphi - \sin(m \cdot \varphi) \\ \Phi_m(\delta) &= m \cdot \delta - \sin(m \cdot \delta) \end{aligned} \right\},$$

где $m=2; 4$.

2. Рассчитывают площадь неповрежденной части сечения

$$F = \pi D^2(1 - k_h^2)/4 - D^2\Phi_2(\varphi)/8 - ab\Phi_2(\delta)/2,$$

и соответствующий статический момент $S_{Z'} = D^3 \sin^3 \varphi/12 - 2ab^2 \sin^3 \delta/3 + abc\Phi_2(\delta)/2$.

3. Определяют величину смещения центра тяжести сечения: $y_c = \overline{OC} = S_{Z'}/F$.
4. Рассчитывают главные моменты инерции сечения

$$\left. \begin{aligned} I_{Z''} &= \frac{\pi D^4(1 - k_h^4)}{64} - \frac{D^4\Phi_4(\varphi)}{256} - \frac{ab^3\Phi_4(\delta)}{16} - \frac{abc^2\Phi_2(\delta)}{2} + \frac{4ab^2c \sin^3 \delta}{3} \\ I_{Y''} &= \frac{\pi D^4(1 - k_h^4)}{64} - \frac{D^4\Phi_4(\varphi)}{256} - \frac{ba^3\Phi_4(\delta)}{16} + \frac{D^4 \sin^3 \delta}{24} \end{aligned} \right\},$$

и момент инерции относительно оси $\overline{OZ'}$ при повороте сечения

$$I_{Z'} = \sqrt{(I_{Z''} \cdot \cos \gamma)^2 + (I_{Y''} \cdot \sin \gamma)^2}.$$

5. Определяют величину момента инерции сечения относительно оси \overline{OZ}

$$I_Z = I_{Z'} - y_c^2 \cdot F.$$

6. Определяют величину напряжения $\overline{\sigma_B}$, на которую увеличивается номинальное напряжение в т. B при учете вращения, приняв диаметр оси равным единице

$$\overline{\sigma_B} = \frac{\sigma_B|_{\gamma=-\varphi}}{\sigma_B|_{\gamma=0}} = \frac{(D/2 + y_c|_{\gamma=-\varphi})/I_Z|_{\gamma=-\varphi}}{(D/2 \cdot \cos \gamma + y_c|_{\gamma=0})/I_Z|_{\gamma=0}} = \frac{I_Z|_{\gamma=0}}{I_Z|_{\gamma=-\varphi}} \cdot \frac{1 + 2y_c|_{\gamma=-\varphi}}{\cos \gamma + 2y_c|_{\gamma=0}}. \quad (9)$$

7. Умножив величину $\overline{\sigma_B}$ на значение КИН при изгибе оси без учета вращения, получают новые $K_{IB}^* = \overline{\sigma_B} \cdot K_{IB}^*$, при которых трещина развивается иначе.

Анализ результатов расчетов функции $\overline{\sigma_B}(\overline{b^*})$ показал, что по мере развития усталостной трещины увеличение номинальных напряжений при изгибе оси с вращением не превышает 8% (рис. 3). Точки на рисунке соответствуют значениям $\overline{\sigma_B}(\overline{b^*})$ по результатам МКЭ-моделирования, что подтверждает приемлемую точность предложенной методики расчета (п.п. 1 - 6).

Результаты расчетного моделирования по уравнениям (4) - (6) подтвердили, что после достижения глубины $\overline{b^*} = 0,1$ все трещины, независимо от своей первоначально сегментной, полукруглой или полуэллиптической формы (табл. 1), стремятся к одинаковой полуэллиптической форме (рис. 3). Следовательно, установив значения K_{IP}^* в центре фронта трещины полуэллиптической формы можно прогнозировать ее развитие без применения сложных компьютерных программ и моделей.

Аналитическое моделирование изменения геометрии первоначально полукруглой трещины (рис. 4) выполнено по трем рассмотренным выше моделям, описываемыми уравнениями (1) – линии 1; уравнениями (3) – линии 3 и уравнениями (4), ..., (9) – линии 2.

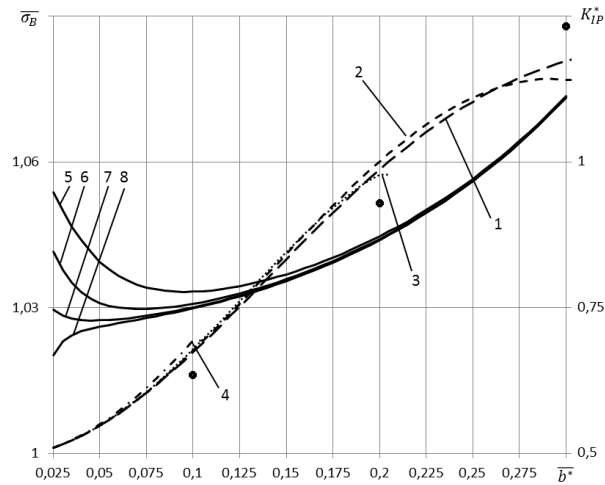


Рис. 3. Графики функции $\overline{\sigma}_B(\overline{b}^*)$ при развитии трещины первоначально полукруглой формы $\overline{a} = \overline{b} = 0,02$ (кривые 1, 2, ..., 4 соответствуют $k_h = 0; 0,4; 0,6; 0,8$), а также графики функции $K_{IP}^*(\overline{b}^*)$ при различной исходной форме трещины (кривые 5, 6, ..., 8, табл. 1)

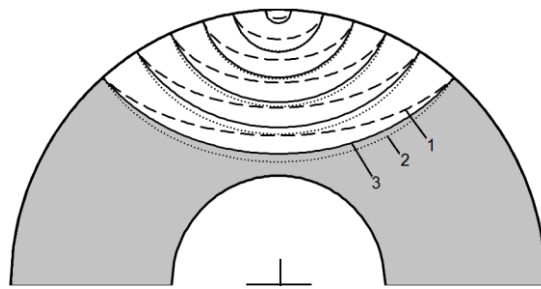


Рис. 4. Схема развития поверхностной усталостной трещины ($\overline{a} = \overline{b} = 0,02$) при изгибе с вращением трубчатой оси ($k_h = 0,4$)

Установлено, что геометрия развивающейся усталостной трещины при изгибе оси с вращением на основании уравнений (3) и уравнений (4) - (9) совпадает с точностью до 4% в любой точке.

Из (5) и (6) следует

$$dN = \frac{db}{C \cdot (K_I^* \cdot \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi b})^n} = \frac{1}{C \cdot (\Delta\sigma)^n} \cdot \frac{db}{(K_I^* \cdot \sqrt{\pi b})^n} \quad (10)$$

Таблица 1.

Исходные размеры трещин различной формы

	\overline{a}	\overline{b}	\overline{c}		\overline{a}	\overline{b}	\overline{c}
5	0,06	0,025	0,5	7	0,03	0,025	0,5
6	0,05	0,025	0,5	8	0,025	0,025	0,5

В результате аппроксимации полиномом функции $K_{IP}^*(\bar{b}^*)$ (рис. 3) получено

$$\frac{1}{(K_I^* \cdot \sqrt{\pi b})^n} \approx \sum_{i=0}^k G_i \cdot b^i, \quad (11)$$

где i – степень полинома; G_i – постоянные коэффициенты, полученные при $k = 6$ (табл. 2), когда отклонение полинома не превышает 6% в диапазоне значений $\bar{b}^* = 0,1 \dots 0,5$.

Таблица 2.

Значения коэффициента G_i

i	G_i	i	G_i	i	G_i	i	G_i
1	145,6600	3	5100,9837	5	28235,6530	7	11806,7170
2	-1070,1290	4	-15457,7653	6	-28197,5878	–	–

После подстановки (11) в (10) и преобразований получено

$$\Delta N = \frac{1}{C \cdot (\Delta \sigma)^n} \cdot \sum_{i=1}^k G_i \cdot (b_f^i - b_o^i), \quad (12)$$

где b_f и b_o – окончательная и исходная глубина трещины.

Уравнение (12), полученное на основании (4), позволяет вычислить число циклов нагружения оси при изгибе с вращением до достижения усталостной трещиной определенной глубины b_f . По результатам расчетов ресурса трубчатых осей установлено, что наличие исходной усталостной трещины и ее последующее развитие при изгибе с вращением приводит к незначительному уменьшению расчетного ресурса (до 2,5%). Полученный результат хорошо согласуется с опытными данными [3], в которых отмечено, что фактор вращения при изгибе трубчатых осей практически не влияет на скорость развития трещины при одинаковом значении изгибающего момента.

Выводы

На основании результатов исследований сделаны следующие выводы:

1. Предложена обобщающая аналитическая модель геометрии развивающейся поверхностной усталостной трещины для трубчатой оси при изгибе.
2. Разработан метод коррекции значений КИН для трубчатых осей, учитывающий особенности развития усталостных трещин при изгибе с вращением. На основании моделирования развития формы первоначально полукруглой трещины по трем моделям и сопоставления результатов подтверждена достаточная точность предложенной коррекции (до 4%).
3. Предложено уравнение, позволяющее прогнозировать остаточный ресурс трубчатой оси при изгибе с вращением по критерию допустимой глубины усталостной трещины.

Список литературы

1. Freitas, M. Effect of steady torsion on fatigue crack initiation and propagation under rotating bending: Multiaxial fatigue and mixed-mode cracking / M. Freitas, L. Reis, M. Fonte, B. Li // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2011. – Vol. 78. – P. 826 – 835.
2. Fonte, M. Stress Intensity Factors for semi-elliptical surface cracks in round bars under bending and torsion / M. Fonte, M. Freitas // *International Journal of Fatigue*. – 1999. – Vol. 21. – P. 457 – 463.
3. Carpinteri, A. Fatigue growth simulation of part-through flaws in thick-walled pipes under rotary bending / A. Carpinteri, R. Brighenti, A. Spagnoli // *International Journal of Fatigue*, 2000. – Vol. 22. – P. 1 – 9.
4. Ariza De Miguel, J. Tensiones en ejes huecos con una grieta superficial bajo flexión rotativa / J. Ariza De Miguel, S.S. Gutyrya, Y.M. Khomiak // *Revista DYNA*, 2014. – Vol. 89(1). – P. 85 – 88.
5. Paris, P.C. Critical analysis of crack propagation laws / P.C. Paris, F. Erdogan // *Trans. ASME Series D, Journal of Basic Engineering*, 1963, 1963. – Vol. 85. – P. 528 – 534.
6. BS 7910-2005. Guide on methods for assessing the acceptability of flaws in metallic structures. – London, 2005.
7. Orynyak, I.V. Analysis of Stable Crack Growth on the Basis of a Two-Criterion Approach / I.V. Orynyak, S.A. Radchenko // *Strength of Materials*, 2001. – Vol. 33. – P. 535 – 547.
8. Гутыря, С.С. Напряжения в трубчатых осях с усталостными эллиптическими трещинами при изгибе с вращением / С.С. Гутыря, Ю.М. Хомяк, Й. Ариза Де Мигель // *Вісник СевНТУ: зб. наук. праць*. – Вип. 148/2014. Серія: Механіка, енергетика, екологія. – Севастополь, 2014. – P. 15 – 19.
9. Гутыря, С.С. Характеристики прочности трубчатых осей при развитии усталостной трещины / С.С. Гутыря, Ю.М. Хомяк, Й. Ариза Де Мигель // *Праці Одеського політехн. ун-ту*, 2013. – Вип. 3(42). – P. 17 – 22.

МОДЕЛЮВАННЯ ВТОМНИХ ТРІЩИН В ТРУБЧАСТИХ ОСЯХ ПРИ ВИГІНІ З ОБЕРТАННЯМ

Й. Ариза Де Мигель

Університет Країни Басків,

Квартал Сарьена, Лейоа, 48940, Країна Басків, Іспанія; e-mail: jonarizademiguel@gmail.com

Розроблена оригінальна геометрична модель розвитку втомних поверхневих тріщин в трубчастих осях при вигині з обертанням, узагальнюючі відомі емпіричні результати та теоретичні моделі. Адекватність моделі підтверджена результатами МСЕ-моделювання. Розроблено спосіб розрахункової корекції КІН при вигині осей з обертанням. У сукупності обидва методи дозволяють прогнозувати залишкове число циклів до досягнення тріщини певної глибини.

Ключові слова: напівеліптична тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, залишковий ресурс осі

MODELLING OF FATIGUE CRACKS IN HOLLOW AXLES UNDER ROTATING BENDING

J. Ariza De Miguel

University of the Basque Country, Bilbao,

Barrio de Sarriena s/n, Leioa, 48940, Bizkaia; e-mail: jonarizademiguel@gmail.com

A geometrical model for surface fatigue cracks on axles under rotating bending is developed, which complies with empirical and theoretical observations made by other authors, and its accuracy asserted by means of crack growth calculations based on the finite element method. Furthermore, a method for converting SIF of non-rotating axles into rotating ones is presented. Both methods combined allow a cycle calculation procedure from a certain crack size down to any depth.

Keywords: poluëlliptycheskaya treschyna, Factor intensity tense, ostatochnyy resource wasps