УДК 519.71

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 6 (2016), No. 1, pp. 11-18

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ КАК СПОСОБ УПРАВЛЕНИЯ ХАОСОМ

Д.В. Дмитришин, И.М. Скринник

Одесский национальный политехнический университет,
пр. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: anton_dora@mail.ru

В статье рассматривается возможность управления динамикой нелинейных дискретных систем. Предложен новый способ управления хаосом через перемешивания состояний системы (или функций от этих состояний), вычисленных в предыдущий момент времени. Это позволяет локально стабилизировать наперёд неизвестные циклы заданной длины. Как частный случай, этот способ включает в себя метод стабилизации цикла при помощи нелинейной запаздывающей обратной связи. Приведены примеры.

Ключевые слова: нелинейные дискретные системы, управление хаосом, перемешивание состояний системы.

Введение

Проблема оптимального воздействия на хаотический режим является одной из фундаментальных в нелинейной динамике. Целью таких воздействий являются синхронизация хаотических движений или, наоборот, хаотизация регулярных движений. Кроме того, в теории управления нелинейными системами считают допустимыми лишь малые управления, которые, тем не менее, полностью изменяют характер движения. Известны разнообразные подходы к построению систем управления хаосом [1-13], каждый из которых имеет существенные недостатки [14]. Поэтому задача разработки новых методов управления хаосом является актуальной.

В статье предлагается новый метод решения задачи оптимальной стабилизации циклов в семействах дискретных автономных систем, а именно, метод, использующий процедуру перемешивания предыдущих состояний системы или функций этих состояний. В частных случаях метод перемешивания совпадает с управлением по принципу запаздывающей обратной связи [2, 15, 16].

Цель работы состоит в построении алгоритмов подавления хаоса в нелинейных дискретных системах, основанных на новых для рассматриваемого в работе класса задач физических принципах.

Задача состоит в выборе структуры и параметров системы управления, при которых наперед неизвестные циклы заданной длины были бы локально асимптотически устойчивыми.

Постановка задачи и предварительные результаты

Рассматривается векторная нелинейная дискретная система, которая при отсутствии управления имеет вид

$$x_{n+1} = f(x_n),\ x_n \in R^H,\ n = 1,\ 2,\ \dots, \tag{1}$$

где $f(x)$ - дифференцируемая векторная функция соответствующей размерности. Предполагается, что система (1) имеет инвариантное выпуклое множество A, т.е., если $\xi \in A$, то и $f(\xi) \in A$. Также предполагается, что в этой системе имеется один или несколько неустойчивых T - циклов $(\eta_1, \dots, \eta_T)$, где все векторы $\eta_1, \dots, \eta_T$ различны и принадлежат инвариантному множеству A, т.е. $\eta_{j+1} = f(\eta_j),\ j = 1, \dots, T-1,\ \eta_1 = f(\eta_T)$. Мультипликаторы рассматриваемых неустойчивых циклов определяются, как собственные значения произведений матриц Якоби $\prod_{j=1}^{T} f'(\eta_j)$ размерностей H.

Требуется построить систему управления вида

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{M} \gamma_j f\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} x_{n-iT+T} \right), \tag{2}$$

где $\gamma_j \geq 0,\ \alpha_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{M} \gamma_j = 1$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} = 1,\ j = 1, \dots, M$, $N,\ M \in \mathrm{N}$. Цель управления – сделать локально асимптотически устойчивыми все (или хотя бы некоторые) T - циклы системы (2). Важно, что для системы (2) выпуклое множество A остается инвариантным, т.е., если векторы ξ_0, ξ_T, ξ_{2T}, …, $\xi_{(N-1)T}$ принадлежат множеству A, то и вектор $\sum_{j=1}^{M} \gamma_j f\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} \xi_{(N-i)T} \right)$ принадлежит множеству A. И, кроме того, система (2) будет иметь тот же T - цикл, что и система (1).

Физический смысл управления состоит в следующем: выражение $\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} x_{n-iT+T}$ можно трактовать как внутреннее перемешивание состояний системы $x_n, x_{n-T}, \dots, x_{n-(N-1)T}$; а выражение $\sum_{j=1}^{M} \gamma_j f(x_{n-jT+T})$ - как внешнее перемешивание. Таким образом, выражение $\sum_{j=1}^{M} \gamma_j f\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} x_{n-iT+T} \right)$ означает комбинированное перемешивание. Отметим, что управление с внешним перемешиванием эквивалентно управлению с нелинейной запаздывающей обратной связью [15].

Применим следующую схему линеаризации для построения матрицы Якоби системы (2) и её характеристического уравнения. Эта схема была обоснована в работах [16, 17].

Ясно, что

$$\begin{cases} x_{n+k} = \sum_{j=1}^{M} \gamma_j f\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} x_{n+k-1-iT+T} \right). \\ k = 1, \dots, T \end{cases} \tag{3}$$

Исходя из стандартной схемы линеаризации, решение системы (3) можно представить в виде

$$\begin{cases} x_{Tm} \quad = \eta_1 + u_m^1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{Tm+T-1} = \eta_T + u_m^T \end{cases}, \quad m \in \mathrm{N}. \tag{4}$$

Подставим решение (4) в (3), считая, что в окрестности цикла величины $u_m^1, \ldots, u_m^T$ малы настолько, что выполняются условия теоремы об устойчивости по первому приближению [1].

Пусть $n = Tm$. Тогда $x_{n+1} = x_{Tm+1} = \eta_2 + u_m^2$, $x_{n+2} = x_{Tm+2} = \eta_3 + u_m^3$, … , $x_{n+T} = x_{T(m+1)} = \eta_1 + u_{m+1}^1$.

Выделяя линейную часть и учитывая, что $\eta_1 = f(\eta_2), \ldots, \eta_T = f(\eta_1)$, получаем

$$\begin{array}{l} u_m^2 = f'(\eta_1)(a_1 u_m^1 + \ldots + a_N u_{m-N+1}^1) \\ u_m^3 = f'(\eta_2)(a_1 u_m^2 + \ldots + a_N u_{m-N+1}^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m^T = f'(\eta_2)(a_1 u_m^{T-1} + \ldots + a_N u_{m-N+1}^{T-1}) \\ u_{m+1}^1 = f'(\eta_T)(a_1 u_m^T + \ldots + a_N u_{m-N+1}^T) \end{array} \tag{5}$$

где

$$a_i = \sum_{j=1}^{M} \alpha_{ij} \gamma_j, \ i = 1, \ldots, N, \tag{6}$$

Система (5) линейная, поэтому ее решения представляются в виде $\begin{pmatrix} u_m^1 \\ \ldots \\ u_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_T \end{pmatrix} \lambda^m$,

где λ - комплексное число, подлежащее определению из системы

$$\begin{pmatrix} -f'(\eta_1)\cdot p(\lambda^{-1}) & I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -f'(\eta_2)\cdot p(\lambda^{-1}) & I & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -f'(\eta_{T-1})\cdot p(\lambda^{-1}) & I \\ \lambda I & 0 & 0 & \ldots & 0 & -f'(\eta_T)\cdot p(\lambda^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots. \\ c_{T-1} \\ c_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots. \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

В (7) $f'(\eta_j)$, $j = 1, \ldots, T$, - матрицы Якоби, I - единичная матрица, 0 - нулевая матрица (все матрицы размерности H), $p(\lambda^{-1}) = (a_1 + a_2\lambda^{-1} + \ldots + a_N \lambda^{-N+1})$.

Стандартная методика исследования устойчивости T- цикла заключается в проверке расположения всех нулей определителя матрицы системы (7) в центральном единичном круге комплексной плоскости $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. В рассматриваемом случае определитель матрицы системы (7) равен

$$\det\left((-1)^{T-1} \lambda I + \prod_{j=1}^{T} \left(-f'(\eta_j) p(\lambda^{-1})\right) \right) = \det\left(\lambda I - \left(p(\lambda^{-1})\right)^T \prod_{j=1}^{T} f'(\eta_j) \right) = \prod_{j=1}^{H} \left(\lambda - \mu_j \left(p(\lambda^{-1})\right)^T \right),$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_H$ собственные значения матрицы $\prod_{j=1}^{T} f'(\eta_j)$.

Задача оптимального перемешивания

Условие устойчивости T- цикла системы (2) состоит в том, что все корни уравнения

$$\prod_{j=1}^{H}\left(\lambda^{(N-1)T}-\mu_j\left(a_1\lambda^{N-1}+\ldots+a_N\right)^T\right)=0, \tag{8}$$

должны лежать в центральном единичном круге комплексной плоскости. Соответственно, задача управления хаосом в системе (1) путем перемешивания значений состояния системы и функций от этих значений в предшествующие моменты времени формулируется следующим образом: для заданной длины цикла T и заданного множества локализации мультипликаторов найти коэффициенты внутреннего перемешивания α_{ij}, $i=1,\ldots,N$, $j=1,\ldots,M$, и внешнего перемешивания γ_j, $j=1,\ldots,M$, так, чтобы цикл длины T был бы локально асимптотически устойчивым; при этом величина используемой предыстории должна быть минимально возможной.

Другими словами, в уравнении (8) необходимо найти коэффициенты $a_1,\ldots,a_N$ так, чтобы все корни этого уравнения лежали бы в центральном единичном круге комплексной плоскости, и величина N была бы минимально возможной.

Естественно, что решение поставленной задачи зависит от области локализации мультипликаторов $\{\mu_1,\ldots,\mu_H\}$. Будем рассматривать две возможности: все мультипликаторы вещественны $\{\mu_1,\ldots,\mu_H\}\subset\{\mu\in R:\mu\in(-\mu^*,1)\}$; все мультипликаторы принадлежат левой полуплоскости $\{\mu_1,\ldots,\mu_H\}\subset\{\mu\in C:|\mu+R|<R\}$, $\mu^*>1$, $R>1/2$. Для каждого из этих случаев алгоритм нахождения минимального N и оптимальных коэффициентов $\{a_1,\ldots,a_N\}$ состоит из следующих шагов [19].

- вычисляются узлы: $\psi_j=\dfrac{\pi(\sigma+T(2j-1))}{\sigma+(N-1)T}$, $j=1,2,\ldots,\dfrac{N-2}{2}$, если N – четное, $j=1,2,\ldots,\dfrac{N-1}{2}$, если – N нечетное; при этом в случае $\{\mu_1,\ldots,\mu_H\}\subset\{\mu\in R:\mu\in(-\mu^*,1)\}$ следует полагать $\sigma=2$, а в случае $\{\mu_1,\ldots,\mu_H\}\subset\{\mu\in C:|\mu+R|<R\}$ – $\sigma=1$;
- строятся полиномы $\eta_N(z)=z(z+1)\prod_{j=1}^{\frac{N-2}{2}}\left(z-e^{i\psi_j}\right)\left(z-e^{-i\psi_j}\right)$, если N – четное, $\eta_N(z)=z\prod_{j=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(z-e^{i\psi_j}\right)\left(z-e^{-i\psi_j}\right)$, если N – нечетное;
- вычисляются коэффициенты полинома $\eta_N(z)=\sum_{j=1}^{N}c_jz^j$;
- определяются оптимальные коэффициенты $a_j=\dfrac{\left(1-\dfrac{1+(j-1)T}{2+(N-1)T}\right)c_j}{\sum_{j=1}^{N}\left(1-\dfrac{1+(j-1)T}{2+(N-1)T}\right)c_j}$, $j=1,\ldots,N$;
- в случае $\{\mu_1,\ldots,\mu_H\}\subset\{\mu\in R:\mu\in(-\mu^*,1)\}$ вычисляются величины $I_N^{(T)}=\left[\dfrac{T}{2+(N-1)T}\prod_{k=1}^{\frac{N-2}{2}}ctg^2\dfrac{\pi(2+T(2j-1))}{2(2+(N-1)T)}\right]^T$ при N – четном,

$I_N^{(T)}=\left[\prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} ctg^2\,\frac{\pi(2+T(2j-1))}{2(2+(N-1)T)}\right]^T$ при N – нечетном; оптимальное значение N вычисляется, как минимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\mu^*\le\frac{1}{\left|I_N^{(T)}\right|}$;

- в случае $\{\mu_1,\ldots,\mu_H\}\subset\{\mu\in C:|\mu+R|<R\}$ вычисляются величины $I_N^{(T)}=\left[\frac{T}{1+(N-1)T}\prod_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} ctg^2\,\frac{\pi(1+T(2j-1))}{2(1+(N-1)T)}\right]^T$ при N – четном,

$I_N^{(T)}=\left[\prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} ctg^2\,\frac{\pi(1+T(2j-1))}{2(1+(N-1)T)}\right]^T$ при N – нечетном; оптимальное значение N вычисляется, как минимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $R\le\frac{1}{2\left|I_N^{(T)}\right|}$.

Если оптимальные коэффициенты найдены, то коэффициенты перемешивания можно найти из системы (6), которую удобно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1M}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2M}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \ldots & \alpha_{NM}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \ldots\\ \gamma_M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \ldots\\ a_N\end{pmatrix}. \tag{9}$$

К системе (9) необходимо добавить условия нормировки, тогда она примет вид:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1M}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{N-1,1} & \alpha_{N-1,2} & \ldots & \alpha_{N-1,M}\\ 1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \ldots\\ \ldots\\ \gamma_M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \ldots\\ a_{N-1}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что оптимальные коэффициенты определяются единственным образом, однако коэффициенты перемешивания не обязательно определяются единственным образом.

Оптимальная стабилизация хаоса

Рассмотрим отображение [20] $f(x)=(1+\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)+x$,

порождающее динамическую систему «внезапного возникновения хаоса» (SOC).

$$x_{n+1}=f(x_n), \tag{10}$$

В [20] для стабилизации (нахождения) циклов длин от 1 до 6 было использовано прогнозирующее управление [3]. Ниже иллюстрируется применение метода перемешивания для стабилизации 3-цикла (рис. 1) , 7-циклов (рис. 2) в системе SOC.

Для системы (10) инвариантным является множество $\left[0, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; положением равновесия – точка $z=1$.

Найдем 3-цикл системы (10). Для этого рассмотрим систему управления

$$x_{n+1} = f\left(f\left(f\left(\sum_{j=1}^{N} a_j x_{n-jT+T}\right)\right)\right) \tag{11}$$

при $T=1$, $N=8$, $\{a_1,\dots,a_8\}=\{0.107, 0.176, 0.204, 0.193, 0.154, 0.102, 0.050, 0.013\}$.

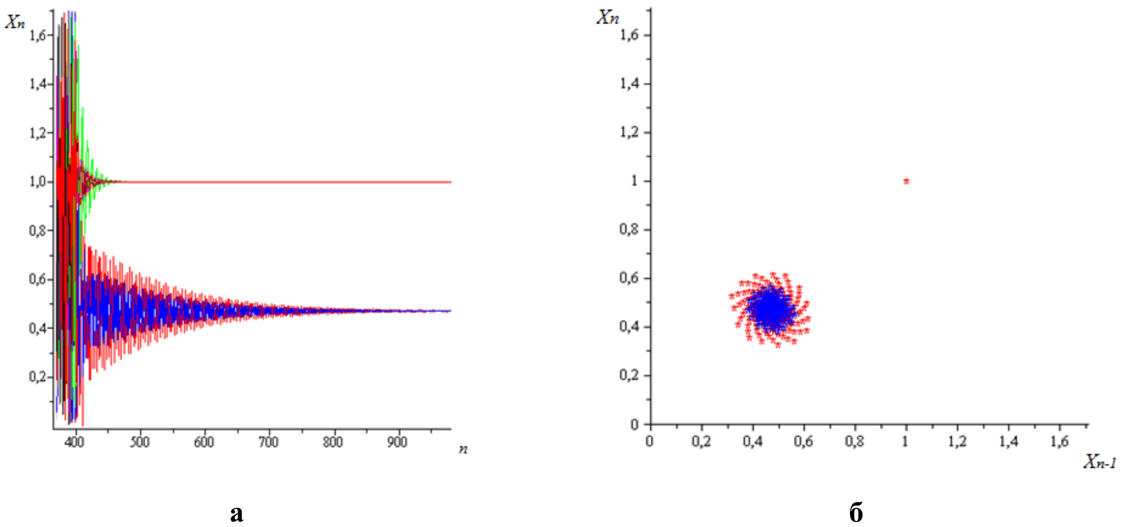


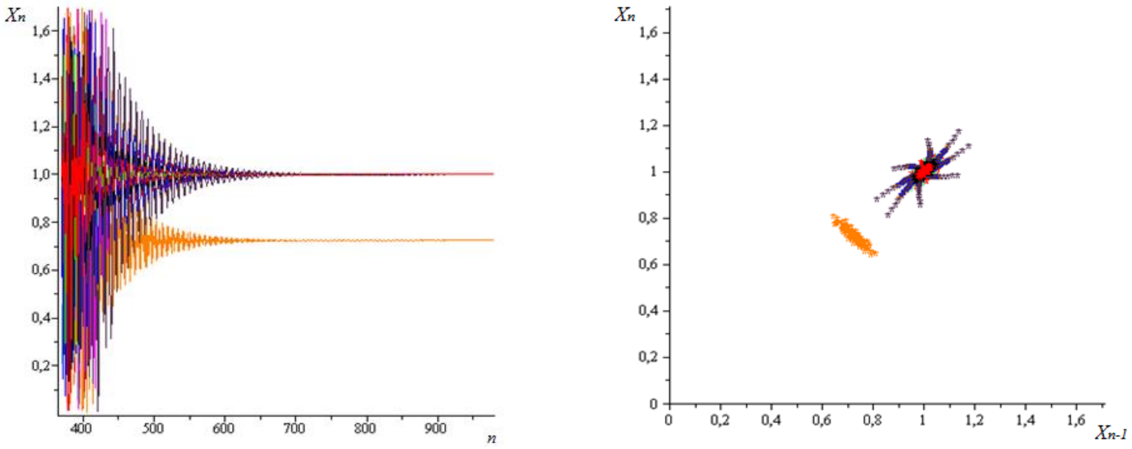
Рис. 1. Динамика решений системы (11); а – в плоскости (n, x_n); б – в плоскости (x_{n-1}, x_n)

Видно, что в системе (11) имеется два положения равновесия: $z_1=1$ и $z_2 \approx 0.471$. Первое положение равновесия является положением равновесия и для исходной системы (10), а вот второе – определяет 3-цикл системы (10): $\{0.471, 1.609, 0.138\}$.

Аналогично находим 7-цикл системы (10). Систему управления

$$x_{n+1} = f\left(f\left(f\left(f\left(f\left(f\left(f\left(\sum_{j=1}^{N} a_j x_{n-jT+T}\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right), \tag{12}$$

используем при $T=1$, $N=12$,
$\{a_1,\dots,a_{12}\}=\{0.054, 0.095, 0.124, 0.138, 0.139, 0.130, 0.111, 0.087, 0.061, 0.037, 0.017, 0.004\}$.



а **б**

Рис. 2. Динамика решений системы (12); а – в плоскости (n, x_n); б – в плоскости (x_{n-1}, x_n)

Положение равновесия в системе (12) $z \approx 0.723$ определяет искомый 7-цикл системы (10): $\{0.723, 1.391, 0.448, 1.529, 0.252, 0.862, 1.195\}$.

Заключение

В статье рассмотрена актуальная проблема стабилизации наперед не известных неустойчивых периодических орбит дискретных систем с хаотической динамикой. Подход для решения задачи стабилизации связан с использованием системы управления, построенной на перемешивании координат предыстории или функций этих координат. Этот подход обобщает предложенный в [14, 15] метод стабилизации с использованием нелинейной запаздывающей обратной связи (DFC). Он сохраняет все преимущества метода DFC и дает дополнительные возможности выбора параметров перемешивания, что чрезвычайно важно для нелинейных систем, позволяя расширять бассейны притяжения стабилизируемых периодических орбит. Также использование внутреннего перемешивания существенно сокращает объем вычислений, т.к. отпадает необходимость вычислять значение функции, которая задает динамическую систему, большее число раз, чем в системе без перемешивания. Также мы надеемся, что использование внутреннего перемешивания облегчит физическую реализацию предложенной схемы управления хаосом в нелинейных дискретных системах.

Список литературы

1. Ott, E. Controlling chaos Phys. Rev. / E. Ott, C. Grebodgi, J.A. Yorke. – 1990. - Lett. 64. - P. 1196 - 1199 .
2. Vieira, D.S. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay / D.S. Vieira, A.J. Lichtenberg, // Phys.Rev. – 1996. - E 54. – PP. 1200 – 1207.
3. Polyak, B.T. Stabilizing chaos with predictive control. Automation and Remote Control.66(11) / B.T. Polyak. – 2005. – PP. 1791 - 1804.
4. Morgul, O. On the stability of delayed feedback controllers / O. Morgul // Phys. - 2003. - Lett. A 314. – PP. 278 – 285.
5. Pyragas, K. Delayed feedback control of chaos / K. Pyragas // Phil. Trans. R. Soc. A 364. – 2006. – No.1846, PP. 2309 – 2334.
6. Calvo, O. Fuzzy control of chaos /International Journal of Bifurcation and Chaos / O. Calvo, J. H. Cartwright. - 1998. - Vol.8. –No.8. - PP. 1743 – 1747.

7. Wu, X.Q. Parameter identification and backstepping control of uncertain Lu system, Chaos, Solitons, Fractals 18 / X.Q. Wu, J.A. Lu. – 2003. – PP. 721 - 729.
8. Lima, R. Supression of chaos by resonant parametric perturbation. / R. Lima, M. Pettini // Phys. – 1990. - Rev. A, 41: PP. 726 – 733.
9. Astrom, K.J. Adaptive control. Dover Publications / K.J. Astrom, B. Wittenmark // INC. Mineola, N.-Y. - 578 p.
10. Wang, H. O. Fuzzy modeling and control of chaotic systems / H. O. Wang, K. Tanaka, T. Ikeda // Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems. – 1996. - Vol.3. - PP. 209 - 212.
11. Kokame, H. Difference feedback can stabilize uncertain steady states / H. Kokame, K. Hirata, K. Konishi, T. Mori // IEEE Trans. on Automatic Control. - 2001. - Vol.46. - No.12. - PP. 1908 - 1913.
12. Zelinka, I. Motivation for Application of Evolutionary Computation to Chaotic Systems. Evolutionary Algorithms and Chaotic Systems / I. Zelinka, G. Chen // Springer., series Studies in Computational Intelligence. – 2000. – Vol.267. - PP. 3 - 36.
13. Gauthier, D. J. / Resource letter / D. J. Gauthier // Controlling chaos, Am. J. Phys. – 2003. – 71 p.
14. Андриевский, Б.Р. Управление хаосом: методы и приложения, часть I / Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков // АиТ. – 2003. – Т.5. – С. 3-45.
15. Dmitrishin, D. Methods of harmonic analysis in nonlinear dynamics / D. Dmitrishin, A. Khamitova // Comptes Rendus Mathematique. - 2013. - Vol.351. – PP. 367 - 370.
16. Dmitrishin, D. Fejer polynomials and Chaos / D. Dmitrishin, A. Khamitova, A. Stokolos // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2014. - PP. 49 - 75.
17. Dmitrishin, D. On the stability of cycles by delayed feedback control / D. Dmitrishin, P. Hagelstein, A. Khamitova, A. Stokolos // arXiv:1501.04573. Published online in Linear and multilinear Algebra. – 2014. – 256 p.
18. Khamitova, A. About the characteristic polynomial of product Frobenius' matrix, Visnyk Odeskoho Natsionalnoho Universytetu / A. Khamitova. - 2015. - Vol.20. - PP. 71 - 80.
19. Dmitrishin, D. Finding cycles in nonlinear autonomous discrete dynamical systems, in preparation / D. Dmitrishin, A. Khamitova, A. Stokolos, M. Tohaneanu // Tian L., Dong G. Predictive control of sudden occurrence of chaos. – 2008. – PP. 99 - 105.
20. Tian, L. Predictive control of sudden occurrence of chaos / L. Tian // Int. J. Nonlinear Science. – 2008. – PP. 99 – 105.

ПЕРЕМІШУВАННЯ, ЯК СПОСІБ УПРАВЛІННЯ ХАОСОМ

Д.В. Дмитришин, І.М. Скринник

Одеський Національний Політехнічний Університет
пр. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: anton_dora@mail.ru

У статті розглядається можливість управління динамікою нелінійних дискретних систем. Запропоновано новий спосіб управління хаосом через перемішування станів системи (або функцій від цих станів) визначених в попередній момент часу. Це дозволяє локально стабілізувати наперед невідомі цикли заданої довжини. Як окремий випадок, цей спосіб включає в себе метод стабілізації циклу за допомогою нелінійного зворотного зв'язку із запізненням. Наведені приклади.
Ключові слова: нелінійні дискретні системи, управління хаосом, перемішування станів системи

MIXING AS A METHOD OF CHAOS CONTROL

D.V. Dmitrichin , I.M. Skrinnik

Odessa National Polytechnic University,
1, Shevchenko Ave., Odessa, 65044, Ukraine; e-mail: anton_dora@mail.ru

In the article we consider the possibility of controlling the dynamics of nonlinear discrete systems. A new way to chaos control by mixing states of the system (or the functions of these states) calculated in the previous time. This approach allows to locally stabilize beforehand unknown cycles of a given length. As a special case, the method includes a cycle stabilization method using nonlinear feedback retarded.
Keywords: linear discrete systems, chaos control, mixed of system's states