

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ И ЦИКЛЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

И.М. Скринник

Одесский национальный политехнический университет,
пр. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: anton_dora@mail.ru

В статье развивается метод перемешивания, сформулированный при участии автора ранее. Введено понятие уровней перемешивания. Показана возможность нахождения неизвестных наперед циклов заданной длины путем локальной стабилизации этих циклов. Приведены примеры.

Ключевые слова: нелинейные дискретные системы, управление хаосом

Введение

Впервые понятие управление хаосом было введено в работе [1], где также была сформулирована концепция стабилизации неустойчивых периодических орбит нелинейных систем малыми контролирующими воздействиями. Позднее были предложены другие методы управления, наиболее популярным из которых оказался метод Пирагаса [2]. Суть этого метода – введение линейной обратной связи с запаздыванием, величина которого равна периоду. Метод Пирагаса завоевал популярность, в первую очередь, из-за своей конструктивной простоты. В дальнейшем этот метод развивался и обобщался во многих работах, например в [3-6]. В [7, 8] для стабилизации периодических орбит было предложено использование нелинейной обратной связи с несколькими запаздываниями, величины которых пропорциональны периоду. Далее в [9] сформулирован метод перемешивания предыдущих состояний системы или функций этих состояний. Управление по принципу нелинейной запаздывающей обратной связи можно рассматривать как частный случай метода перемешивания.

Цель работы состоит в развитии алгоритмов, предложенных в [9], для определения неизвестных циклов путем их локальной стабилизации.

Задача: усовершенствовать алгоритмы выбора структуры и параметров системы управления для определения циклов заданной длины.

Постановка задачи и предварительные результаты

Пусть задана векторная нелинейная дискретная система вида

$$x_{n+1} = f(x_n), x_n \in R^H, n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

у которой имеется один или несколько неустойчивых T -циклов (η_1, \dots, η_T) , где все векторы η_1, \dots, η_T различны, и $\eta_{j+1} = f(\eta_j)$, $j = 1, \dots, T-1$, $\eta_1 = f(\eta_T)$.

Мультипликаторы μ_1, \dots, μ_H рассматриваемых неустойчивых циклов определяются, как собственные значения произведений матриц Якоби $\prod_{j=1}^T f'(\eta_j)$ размерностей H .

Требуется построить систему вида

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^M \gamma_j f \left(\sum_{i=1}^N \alpha_{ij} x_{n-iT+T} \right), \quad (2)$$

в которой все (или хотя бы некоторые) T - циклы будут локально асимптотически устойчивыми. Считается выполненными условия нормировки: $\sum_{j=1}^M \gamma_j = 1$,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, N, \quad \gamma_j \geq 0, \quad \alpha_{ij} \geq 0.$$

Коэффициенты оптимального перемешивания

Условие устойчивости T - цикла системы (2) состоит в том, что все корни уравнения

$$\prod_{j=1}^H \left(\lambda^{1+(N-1)T} - \mu_j (a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_N) \right)^T = 0, \quad (3)$$

должны лежать в центральном единичном круге. Соответственно, задача управления хаосом в системе (1) путем перемешивания значений состояния системы и функций от этих значений в предшествующие моменты времени формулируется следующим образом:

- для заданной длины цикла T и заданного множества локализации мультипликаторов найти коэффициенты внутреннего перемешивания $\alpha_{ij}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, и внешнего перемешивания $\gamma_j, j = 1, \dots, M$, так, чтобы цикл длины T был бы локально асимптотически устойчивым; при этом величина используемой предыстории должна быть минимально возможной. Заметим, что решение поставленной задачи зависит от области локализации мультипликаторов $\{\mu_1, \dots, \mu_H\}$. Повторим алгоритм нахождения минимального N и оптимальных коэффициентов $\{a_1, \dots, a_N\}$, сформулированный в [9];

- вычисляются узлы: $\psi_j = \frac{\pi(\sigma + T(2j-1))}{\sigma + (N-1)T}$, $j = 1, 2, \dots, \frac{N-2}{2}$, если N – чётное, $j = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$, если – нечётное; при этом в случае $\{\mu_1, \dots, \mu_H\} \in \{\mu \in R : \mu \in (-\mu^*, 1)\}$ следует полагать $\sigma = 2$, а в случае $\{\mu_1, \dots, \mu_H\} \in \{\mu \in C : |\mu + R| < R\}$ – $\sigma = 1$;

- строятся полиномы $\eta_N(z) = z(z+1) \prod_{j=1}^{\frac{N-2}{2}} (z - e^{i\psi_j}) (z - e^{-i\psi_j})$, если N – чётное, $\eta_N(z) = z \prod_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} (z - e^{i\psi_j}) (z - e^{-i\psi_j})$, если N – нечётное;

- вычисляются коэффициенты полинома $\eta_N(z) = \sum_{j=1}^N c_j z^j$;

▪ определяются оптимальные коэффициенты $a_j = \frac{\left(1 - \frac{1+(j-1)T}{2+(N-1)T}\right)^{c_j}}{\sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{1+(j-1)T}{2+(N-1)T}\right)^{c_j}}$,

$j=1, \dots, N$;

▪ в случае $\{\mu_1, \dots, \mu_H\} \in \{\mu \in R : \mu \in (-\mu^*, 1)\}$ вычисляются величины

$$I_N^{(T)} = \left[\frac{T}{2+(N-1)T} \prod_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \text{ctg}^2 \frac{\pi(2+T(2j-1))}{2(2+(N-1)T)} \right]^T \text{ при } N - \text{ чётном,}$$

$$I_N^{(T)} = \left[\prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \text{ctg}^2 \frac{\pi(2+T(2j-1))}{2(2+(N-1)T)} \right]^T \text{ при } N - \text{ нечётном; оптимальное значение } N$$

вычисляется, как минимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\mu^* \leq \frac{1}{|I_N^{(T)}|};$$

▪ в случае $\{\mu_1, \dots, \mu_H\} \in \{\mu \in C : |\mu + R| < R\}$ вычисляются величины

$$I_N^{(T)} = \left[\frac{T}{1+(N-1)T} \prod_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \cot^2 \frac{\pi(1+T(2j-1))}{2(1+(N-1)T)} \right]^T \text{ при } N - \text{ чётном,}$$

$$I_N^{(T)} = \left[\prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \cot^2 \frac{\pi(1+T(2j-1))}{2(1+(N-1)T)} \right]^T \text{ при } N - \text{ нечётном; оптимальное значение } N$$

вычисляется, как минимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$R \leq \frac{1}{2|I_N^{(T)}|}.$$

Если оптимальные коэффициенты найдены, то коэффициенты перемешивания можно найти из системы

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1M} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad (4)$$

К системе (4) необходимо добавить условия нормировки $\sum_{j=1}^M \gamma_j = 1$,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{ij} = 1, j=1, \dots, N, \gamma_j \geq 0, \alpha_{ij} \geq 0.$$

Примеры применения метода перемешивания

Рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть $M = N$ и $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Тогда, из (4) получаем, что

$\gamma_j = a_j, \quad j = 1, \dots, N$. Система (2) примет вид $x_{n+1} = \sum_{j=1}^M a_j f(x_{n-jT+T})$. Система

управляется с помощью внешнего перемешивания [8].

Пусть $M = 1$, тогда $\gamma_1 = 1$, и $\alpha_{i1} = a_i, \quad i = 1, \dots, N$. Система (2) примет вид

$x_{n+1} = f\left(\sum_{i=1}^N a_i x_{n-iT+T}\right)$. Система управляется с помощью внутреннего

перемешивания [9].

Пусть $M = N + 1; \quad \alpha_{i1} = a_i, \quad i = 1, \dots, N; \quad \alpha_{i,i+1} = 1, \quad i = 1, \dots, N; \quad \alpha_{ij} = 0, \quad \text{при}$
 $j \neq 1, j \neq i + 1, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N + 1$. Тогда система (2) примет вид

$x_{n+1} = \gamma_1 f\left(\sum_{i=1}^N a_i x_{n-iT+T}\right) + \sum_{j=1}^N \gamma_{j+1} f(x_{n-jT+T})$.

Определим оптимальные значения коэффициентов внешнего перемешивания

$\gamma_1, \dots, \gamma_{N+1}$. Система (9) в этом случае примет вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_N & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix}.$$

Общее решение этой системы представляется, как сумма частного решения неоднородной системы и общего решения однородной

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \\ \dots \\ -a_N \end{pmatrix}.$$

С учетом того, что $\gamma_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N + 1$, получаем $0 \leq c \leq 1$. Окончательно система (2) примет вид

$$x_{n+1} = c f\left(\sum_{i=1}^N a_i x_{n-iT+T}\right) + (1-c) \sum_{j=1}^N a_j f(x_{n-jT+T}), \quad (5)$$

где $0 \leq c \leq 1$. Система управляется с помощью смешенного перемешивания. При $c = 0$ переходим к внешнему перемешиванию, а при $c = 1$ – к внутреннему. Системы вида (5) возникают, например, при исследовании диффузионного хаоса [11].

Кратные циклы

В этом разделе речь пойдет о возможности управления хаосом путем стабилизации lT - циклов с помощью перемешивания, определяемого динамической системой (2), $l = 2, 3, \dots$.

Каждая из точек T -цикла является неподвижной точкой T - итерации отображения $f : x_{n+1} = f^{(T)}(x_n)$, $f^{(T)}(x_n) = f(f^{(T-1)}(x_n))$, $f^{(0)}(x_n) = f(x_n)$.

Вопрос об устойчивости цикла сводится к вопросу об устойчивости неподвижных точек отображения $f^{(T)}$, которые составляют цикл длины T . Отметим, что величина мультипликатора цикла не зависит от выбора неподвижной точки, входящей в рассматриваемый цикл, и неподвижные точки отображения $f^{(T)}$ также являются неподвижными точками отображения $f^{(T_1)}$, если $T_1 = lT$ (l - целое число).

Таким образом, задачу стабилизации T_1 - цикла системы (1) можно свести к задаче стабилизации T - цикла системы $x_{n+1} = f^{(l)}(x_n)$, $x_n \in R^H$, $n = 1, 2, \dots$.

Перемешивание будем организовывать следующим образом:

- перемешивание первого уровня: $\sum_{i=1}^N \alpha_i x_{n-iT+T}$;
- перемешивание второго уровня: $\sum_{j=1}^M \beta_j f\left(\sum_{i=1}^N \alpha_{ij} x_{n-iT+T}\right)$;
- перемешивание третьего уровня: $\sum_{j_1=1}^{M_1} \gamma_{j_1} f\left(\sum_{j_2=1}^{M_2} \beta_{j_2} f\left(\sum_{i=1}^N \alpha_{i j_2 j_1} x_{n-iT+T}\right)\right)$.

Перемешивание более высоких уровней определяется аналогично.

Таким образом, система управления для стабилизации цикла длины $2T$ представима следующим образом

$$x_{n+1} = \sum_{j_1=1}^{M_1} \gamma_{j_1} f\left(\sum_{j_2=1}^{M_2} \beta_{j_2} f\left(\sum_{i=1}^N \alpha_{i j_2 j_1} x_{n-iT+T}\right)\right), \quad (6)$$

В системе (6) все коэффициенты должны удовлетворять условиям нормировки, т.е. должны определять выпуклые комбинации.

Коэффициенты перемешивания можно рассматривать как компоненты тензоров. Для стабилизации циклов длины lT система управления должна состоять из $l+1$ уровня перемешивания, внешний уровень определяется вектором коэффициентов перемешивания размерности M_1 , следующий l уровень определяется матрицей коэффициентов перемешивания размерности $M_2 \times M_1$, и т.д. каждый уровень определяется тензором коэффициентов соответствующего порядка. Все тензоры должны удовлетворять условиям свертки, при которых последовательное сворачивание тензоров коэффициентов от первого уровня перемешивания до $l+1$ уровня должно

давать вектор оптимальных коэффициентов $\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix}$.

Ясно, что оптимальные коэффициенты перемешивания не всегда определяются единственным образом. Например, одной из возможных систем стабилизации цикла длины $2T$ может служить система

$$x_{n+1} = c_1 \sum_{j=1}^N a_j f(f(x_{n-jT+T})) + c_2 f\left(\sum_{j=1}^N a_j f(x_{n-jT+T})\right) + c_3 f\left(f\left(\sum_{j=1}^N a_j x_{n-jT+T}\right)\right), \quad \text{где } c_1 \geq 0,$$

$$c_2 \geq 0, c_3 \geq 0, c_1 + c_2 + c_3 = 1.$$

Отметим важные отличия предложенного в статье метода стабилизации от большинства известных методов. Управление применяется во все моменты времени, а не только в окрестности желаемого цикла – сам цикл заранее знать нет необходимости! Более того, одно управление позволяет стабилизировать сразу ВСЕ циклы заданной

длины с мультипликаторами, лежащими в левой полуплоскости, вещественными или комплексными. Для стабилизации конкретного цикла достаточно, чтобы последовательность начальных точек оказалась в бассейне притяжения этого цикла. Разные начальные последовательности будут порождать последовательности решений, сходящиеся к разным циклам заданной длины.

Одним из возможных применений предлагаемого метода является проверка наличия периодических орбит заданного нелинейного отображения, неустойчивые орбиты можно обнаружить путем их стабилизации.

Определение циклов в системе «внезапного хаоса»

Рассмотрим отображение [10] $f(x) = (1 + \sqrt{2})\left(\frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) + x$,

порождающее динамическую систему «внезапного возникновения хаоса» (SOC).

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{7}$$

Для системы (7) инвариантным является множество $\left[0, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; положением

равновесия – точка $z = 1$.

Определим 9-цикл системы SOC. В системе управления

$$x_{n+1} = f\left(f\left(f\left(\sum_{j=1}^N a_j x_{n-jT+T}\right)\right)\right), \tag{8}$$

положим $T = 3, N = 11$,

$$\{a_1, \dots, a_{11}\} = \{0.276, 0.168, 0.127, 0.102, 0.084, 0.070, 0.058, 0.046, 0.036, 0.024, 0.009\}.$$

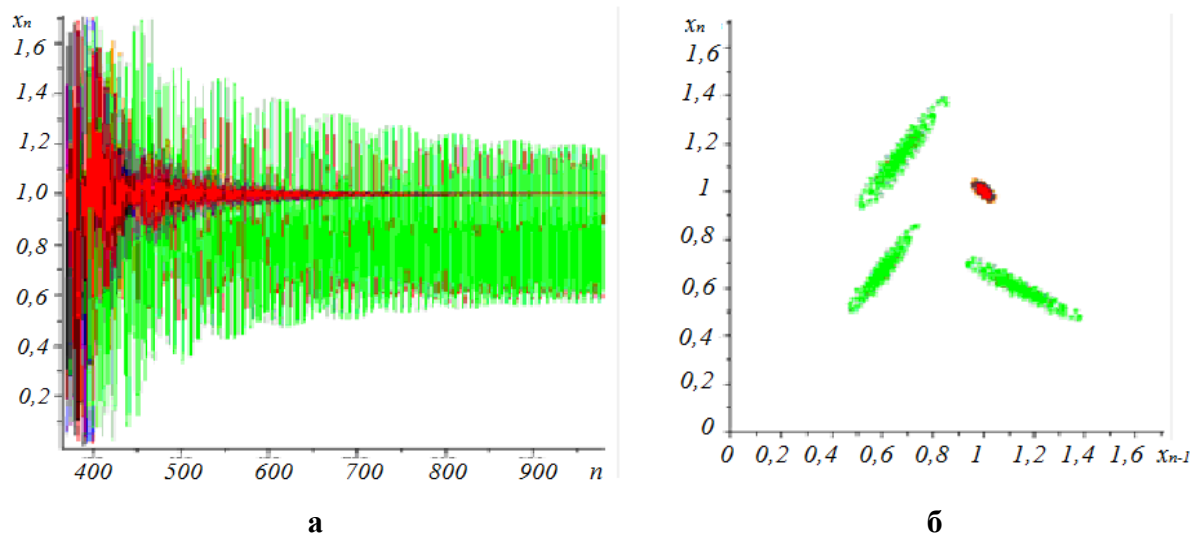


Рис. 1. Динамика решений системы (8) при $T = 3, N = 11$; а – в плоскости (n, x_n) ; б – в плоскости (x_{n-1}, x_n)

В системе управления (8) наблюдается локально устойчивое положение равновесия, которое также является положением равновесия исходной системы (6), и локально устойчивый 3-цикл $\{1.142, 0.598, 0.667\}$. Этот 3-цикл определяет 9-цикл для системы (8): $\{1.142, 0.799, 1.285, 0.598, 1.570, 0.194, 0.667, 1.478, 0.326\}$.

Для определения 12-цикла системы (7) применим систему

$$x_{n+1} = f\left(f\left(\sum_{j=1}^N a_j f(x_{n-jT+T})\right)\right), \quad (9)$$

при $T = 4$, $N = 11$,

$$\{a_1, \dots, a_{11}\} = \{0.361, 0.165, 0.113, 0.087, 0.069, 0.057, 0.047, 0.039, 0.031, 0.022, 0.009\}.$$

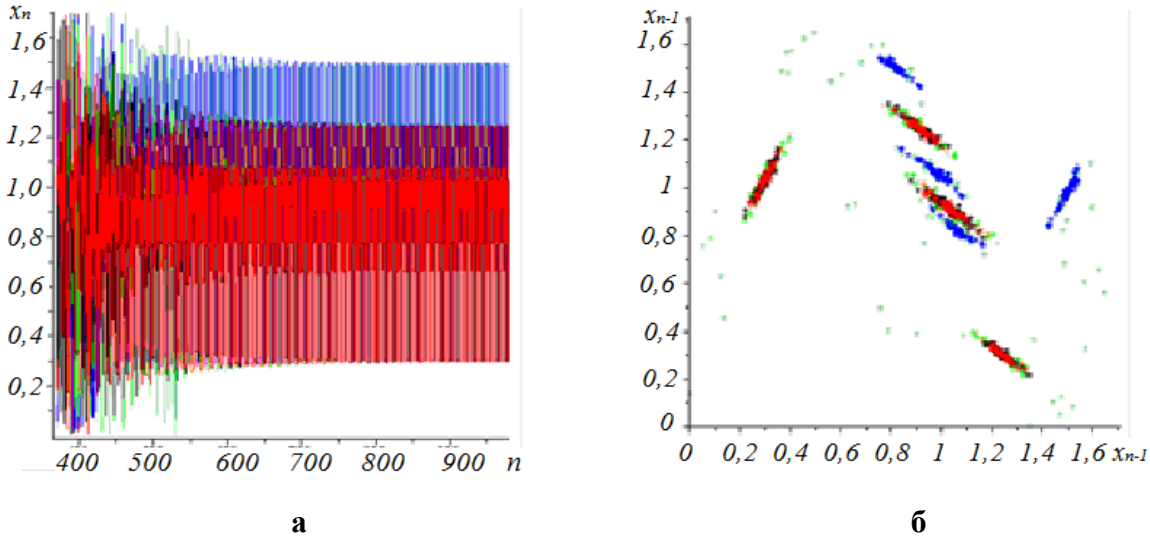


Рис. 2. Динамика решений системы (9); а – в плоскости (n, x_n) ; б – в плоскости (x_{n-1}, x_n)

В системе (9) можно наблюдать два локально устойчивых 4-цикла. Они являются частью 12-цикла исходной системы (7):

$$\{1.031, 0.956, 1.062, 0.912, 1.124, 0.824, 1.248, 0.649, 1.497, 0.297, 1.016, 0.978\}.$$

Вообще говоря, с ростом длины цикла T , количество таких циклов увеличивается. Бассейны притяжения некоторых циклов могут оказаться настолько малыми, что практически такие циклы отыскать будет затруднительно. Пусть, например, необходимо отыскать циклы длины 15. Выберем несколько начальных точек и рассмотрим их динамику, происходящую в соответствии с уравнением $x_{n+1} = f(f(f(x_n)))$. Возьмем 400 итераций этой системы, и на 401 шаге запустим процесс перемешивания. При этом положим $T = 5$, $N = 26$, и коэффициенты перемешивания выберем в соответствии с формулами пункта 2. На рис. 3 изображена динамика решений системы при разных начальных значениях. При некоторых начальных значениях траектории будут притягиваться к циклам длины 5: при $x_0 = 0.99$ получаем цикл $\{0.989, 1.025, 0.929, 1.198, 0.440\}$; при $x_0 = 0.64$ получаем цикл $\{0.290, 0.982, 1.049, 0.860, 1.396\}$; при $x_0 = 0.5$ и $x_0 = 0.74$ получаем цикл $\{1.127, 0.640, 0.958, 1.119, 0.665\}$; при $x_0 = 0.21$ $\{0.960, 1.112, 0.683, 1.252, 0.287\}$. Эти четыре 5-цикла порождают четыре различных 15-циклов исходной системы (7). Приведем их:

$$\begin{aligned} &\{0.989, 1.509, 0.280, 1.025, 0.963, 1.052, 0.929, 1.100, 0.859, 1.198, 0.719, 1.397, 0.440, 1.501, 0.291\} \\ &\{0.290, 0.991, 1.013, 0.982, 1.025, 0.965, 1.049, 0.930, 1.099, 0.860, 1.198, 0.720, 1.396, 0.440, 1.502\} \\ &\{1.127, 0.820, 1.254, 0.640, 1.509, 0.281, 0.958, 1.059, 0.916, 1.119, 0.832, 1.237, 0.665, 1.474, 0.330\} \\ &\{0.960, 1.056, 0.921, 1.112, 0.842, 1.224, 0.683, 1.448, 0.367, 1.252, 0.644, 1.504, 0.287, 0.981, 1.027\} \end{aligned}$$

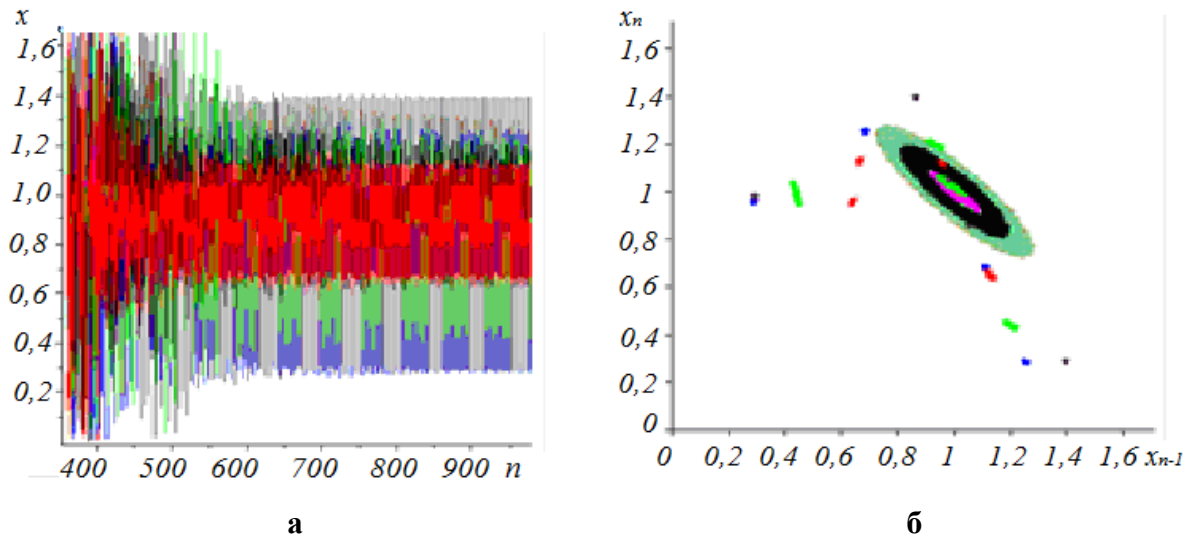


Рис. 3. Динамика решений системы (8): а – в плоскости (n, x_n) ; б – в плоскости (x_{n-1}, x_n)

Выводы

В статье предложен метод определения наперед неизвестных неустойчивых циклов дискретных систем с хаотической динамикой. Подход для решения задачи основан на локальной стабилизации циклов с использованием вспомогательной системы управления, построенной на перемешивании координат предыстории или функций этих координат, так что вспомогательная система может иметь несколько уровней перемешивания. Отметим, однако, что использование различных уровней перемешивания не позволяет уменьшить длину предыстории, необходимую для стабилизации цикла. Но, что важно, может увеличивать скорость сходимости к этому циклу. Кроме того, использование внутреннего перемешивания (перемешивания первого уровня) существенно сокращает объем вычислений, т.к. отпадает необходимость вычислять значение функции, которая задает динамическую систему, большее число раз, чем в системе без перемешивания. Также мы надеемся, что использование перемешивания первого уровня облегчит физическую реализацию предложенной схемы управления хаосом в нелинейных дискретных системах.

Список литературы

1. Ott, E. Controlling chaos. Phys. Rev / E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke. – 2000. – Lett. 64. – Pp. 1196 – 1199.
2. Pyragas, K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback / K. Pyragas // Phys. – 1999. – Vol. 170. – 421 p.
3. Just, W. Control of chaos by time-delayed feedback: A survey of theoretical and experimental aspects / W. Just, H. Benner, E. Schoell // In: B. Kramer (Ed.), Advances in Solid State Physics. – 2003. – Vol. 43. – Springer, Berlin. – 589 p.
4. Hoevel, P. Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods / P. Hoevel, E. Schoell // Phys. – 2005. – Rev. E. – Vol. 72.
5. Vieira, D.S. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay / D.S. Vieira, A.J. Lichtenberg // Phys.Rev. – 2001. – E 54, Pp. 1200–1207.
6. Morgul, O. On the stability of delayed feedback controllers / O. Morgul. // Phys. – 2003. – Lett. A 314. –Pp. 278 – 285.

7. Dmitrishin, D. Methods of harmonic analysis in nonlinear dynamics / D. Dmitrishin, A. Khamitova // *Comptes Rendus Mathematique*. –2013. – Vol. 351. – Issues 9-10. – Pp. 367–370.
8. Dmitrishin, D. Fejer polynomials and Chaos / D. Dmitrishin, A. Khamitova, A. Stokolos // *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. – 2014. – Pp. 49–75.
9. Дмитриришин, Д. Перемешивание как способ управления хаосом / Д. Дмитриришин, И. Скринник // *Информатика и математические методы моделирования*. – 2016. –Т.1. – №1. – С. 11-18.
10. Tian, L. Predictive control of sudden occurrence of chaos/ L. Tian, G. Dong // *Int. J. Nonlinear Science*. – 2008 – 5(2), Pp. 99-105.
11. Oono, Y. Descret model of chemical turbulence. / Y. Oono, M. Kohmoto // *Phys. Rev. Lett*. – 2001. –Vol. 55. – No. 27. – Pp. 2927 – 2931.

ПЕРЕМІШУВАННЯ ТА ЦИКЛИ У НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМАХ З ХАОТИЧНОЮ ДИНАМІКОЮ

І.М. Скринник

Одеський національний політехнічний університет,
пр. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: anton_dora@mail.ru

У статті розвивається метод перемішування, сформульований за участю автора раніше. Введено поняття рівнів перемішування. Показана можливість знаходження невідомих наперед циклів заданої довжини шляхом локальної стабілізації цих циклів. Наведені приклади.

Ключові слова: нелінійні дискретні системи, управління хаосом.

MIXING AND CYCLES IN LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH CHAOTIC DYNAMICS

I.M. Skrinnik

Odessa national polytechnic university,
1, Shevchenko Ave., Odessa, 65044, Ukraine; e-mail: anton_dora@mail.ru

The article develops the mixing method. The concept of mixing levels. The possibility of finding unknown prescribed lengths of cycles by the local stabilization of these cycles. Examples.

Keywords: linear discrete systems, chaos control.