УДК 004.056:061.68; 004.3.75:061.68

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 6 (2016), No. 3, pp. 215-226

ОПТИМАЛЬНІСТЬ НЕУСІЧЕНОЇ ПОСЛІДОВНОЇ ПРОЦЕДУРИ ВАЛЬДА В ЗАДАЧАХ ПЕРЕВІРКИ ДВОХ ПРОСТИХ ПРОГНОЗІВ НЕСАНКЦІОНОВАНОГО ДОСТУПУ В ІНФОРМАЦІЙНИХ МЕРЕЖАХ ДЕРЖАВИ

В.Б. Дудикевич[1], І.Р. Опірський[1], П.І. Гаранюк[1], О.А. Вавpічен[2]

[1] Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. Ст.Бандери,12, Львів,79000,Україна; e-mail: iopirsky@gmail.com
[2] Національна академія Державної прикордонної служби України ім. Б.Хмельницького,
вул. Шевченка, 46, м. Хмельницький, 29003, Україна

В роботі математично обґрунтовано та виведено вирази, що точно описують послідовне правило Вальда, і в рамках зроблених припущень та досліджень виведено вирази оптимальної перевірки двох простих прогнозів, що в свою чергу дозволяє отримати подальший розвиток вирішенню проблеми прогнозування несанкціонованого доступу. На основі дослідження оптимальності не усіченого послідовного правила Вальда отримано рівності, що зв’язують ймовірності помилок з заданими порогами і пороги з заданими ймовірностями помилок які справедливі для загального випадку залежних неоднорідних спостережень і для незалежних однорідних спостережень.

Ключові слова: несанкціонований доступ, інформаційні системи держави, процедура Вальда, прогноз, прогнозування, поріг, оптимальне послідовне правило, спостереження

Вступ

Створення прогнозів – дуже специфічний процес, тому їх перевірка представляє собою важкий і потрібний етап прогнозування. В загальному випадку знайти конструктивне рішення не завжди вдається навіть в двох альтернативних прогнозах. Тому основну увагу приділимо випадкам, коли побудова конструктивних рішень можлива. Розглянемо не тільки двох альтернативні, але і багато альтернативні процедури. В багатьох практичних задачах закони розподілу ймовірностей досліджуваних випадкових процесів і не спостережуваних ситуацій відомі не повністю, а в кращому випадку – з точністю до сукупності заважаючи параметрів. Задачі прогнозування несанкціонованого доступу (НСД) тісно пов’язані з задачами контролю поточного стану інформаційних мереж держави (ІМД), як вирішуються автоматично і характеризуються по-перше, великим об’ємом оброблюваної інформації і, по-друге, значною одноманітністю порівняно невеликого числа основних операцій. Як показує досвід, програми контролю і прогнозування мають в окремих випадках тисячі команд, а їх виконання зводиться до багаторазових звернень до пам’яті і підпрограмою контролю і прогнозу. Перечисленні особливості дають вирішальний вплив на питання раціонального розміщення вихідних даних, програм контролю та прогнозу в пам’яті ЕОМ і на організацію структури програм.

Таким чином, проблема визначення основних алгоритмів при перевірці прогнозів НСД в ІМД, а також розвитку теорії прогнозування НСД в ІМД на базі математичного апарату теорії ймовірностей є актуальним і потребує детального і подальшого наукового дослідження. В нашій роботі ми продовжуємо поглиблюватись у проблему прогнозування НСД в ІМД, використовуючи, конкретно в цій статті, сучасний математичний апарат теорії ймовірності, а саме використовуючи процедури Вальда.

Метою даної роботи є дослідження та аналіз використання двопорогової послідовної неусіченої процедури Вальда для перевірки двох простих прогнозів несанкціонованого доступу до інформаційних мереж держави.

Основна частина

Розглянемо не усічену послідовну перевірку двох альтернативних прогнозів при незалежних, можливо, неоднорідних спостереженнях при дотримані умови $R_n^N(T_n)=\min\{R_n^0(T_n),R_{nП}^V(T_n)\}, n=\overline{1,N-1},$, для виконання якого в даному випадку достатньо виконати умову $g_{ij}(n)P_i(\tau^0>n)\to 0, n\to\infty,\ N\to\infty$, відповідно з теоремою 1 [1] оптимальне не усічене правило може бути отримано з усіченого шляхом граничного переходу $N\to\infty$. Тому оптимальна неусічена процедура має вигляд:

$$u_n^0(\Lambda_n)=\begin{cases}1, \Lambda_n\ge B_n,\\ 0, \Lambda_n\le A_n,\\ u_П, \Lambda_n\in(A_n,B_n), n\ge 1,\end{cases} \tag{1}$$

де пороги A_n, B_n знаходяться з рівнянь $G_{n0}(\Lambda_n)=G_{nП}(\Lambda_n), G_{n1}(\Lambda_n)=G_{nП}(\Lambda_n),$ в яких $G_{nП}(\Lambda_n)=\lim\limits_{N\to\infty}G^N{}_{nП}(\Lambda_n)$.

Таким чином, при довільній залежності втрат від номера кроку спостереження і неоднаково розподілених спостережень оптимальна не усічена процедура перевірки двох простих прогнозів полягає в порівнянні відношення правдоподібності (ВП) з двома змінними (що залежать від n) порогами.

Припустимо тепер, що спостереження однорідні $(p_{in}(x_n)=p_i(x_n)),$ а функція втрат має вигляд:

$$g_{ij}(n)=\varphi_{ij}+c_{ij}n, i,j=0,1, \tag{2}$$

де c_i - вартість затримки у винесенні рішення на один крок при $\theta=i$; φ_{ij} - втрати при прийнятті j-го рішення в i-й ситуації $(\theta=i)$, що не залежить від n.

Для виконання умови $\rho^0\equiv\rho(\delta_0)=\lim\limits_{N\to\infty}\rho_N(u_0^N),$ достатньо виконання умови $nP_i(\tau^0>n)\to 0, n\to\infty, i=0,1$. Останні виконуються у випадку кінцевого середнього ризику (СР) $\rho^0=\rho(\tau^0)$.

Припустимо, що оптимальні пороги не залежать від $n\ (A_n=A, B_n=B)$. Тоді, підставляючи (2) в $G_{nj}(\Lambda_n)=\chi\Lambda_n g_{1j}(n)+g_{0j}(n)$ і

$$G_{nП}^N(\Lambda_n)=\sum_{\nu=1}^{N-n}\sum_{j=0}^{1}\{\chi\Lambda_n g_{1j}(n+\nu)P_{1j}^{(\nu)}(\Lambda_n,n,N)+g_{0j}(n+\nu)P_{0j}^{(\nu)}(\Lambda_n,n,N)\}, n=\overline{1,N-1};$$

отримаємо:

$$G_{nП}(\Lambda_n) = \widetilde{G}_П(\Lambda_n) + n(c_0 + c_1\chi\Lambda_n);$$
$$G_{nj}(\Lambda_n) = \widetilde{G}_j(\Lambda_n) + n(c_0 + c_1\chi\Lambda_n),$$

де

$$\widetilde{G}_j(\Lambda_n) = \chi\Lambda_n\varphi_{1j} + \varphi_{0j};$$

$$\widetilde{G}_П(\Lambda_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}\left[\ \chi\Lambda_n(\varphi_{1j} + c_1\nu)P_{1j}^{(\nu)}(\Lambda_n) + (\varphi_{0j} + c_0\nu)P_{0j}^{(\nu)}(\Lambda_n)\ \right], n = 1,2,...; \tag{3}$$

$$P_{ij}^{(\nu)}(\Lambda_n) = \int_{\{X_{n+1}^П\}} P_{ij}^{(\nu-1)}(\Lambda_{n+1})p_i(x_{n+1})dx_{n+1}, \nu \geq 2;\ P_{ij}^{(1)}(\Lambda_n) = \int_{\{X_{n+1}^j\}} p_i(x_{n+1})dx_{n+1};$$

$$X_{n+1}^П = \{x_{n+1} : \Lambda^`(x_{n+1}) \in (A/\Lambda_n, B/\Lambda_n)\};$$

$$X_{n+1}^0 = \{x_{n+1} : \Lambda^`(x_{n+1}) \leq (A/\Lambda_n)\};$$

$$X_{n+1}^1 = \{x_{n+1} : \Lambda^`(x_{n+1}) \geq B/\Lambda_n\};$$

не залежать від n. Оптимальні пороги A і B при цьому знаходяться з рівнянь

$$G_j(\Lambda) = \widetilde{G}_П(\Lambda), j = 0,1, \tag{4}$$

і виявляються постійними. Відповідно, при лінійній залежності втрат від номера кроку спостереження і однаково розподілених спостережень оптимальна послідовна процедура базується на порівнянні ВП з двома постійними порогами. Вперше ця процедура була запропонована і досліджена А. Вальдом [2]. Тому в подальшому будемо називати двопорогову послідовну неусічену процедуру

$$u_n^*(\Lambda_n) = \begin{cases} 1, \Lambda_n \geq B, \\ 0, \Lambda_n \leq A, \\ u_П, \Lambda_n \in (A,B), n \geq 1, \end{cases} \tag{5}$$

процедурою Вальда.

Пороги A, B, що входять в (5), залежать від відношень між коефіцієнтами $\varphi_{ij}, c_i, i, j = 0,1,$ апріорної ймовірності P_1 і степені різноманітності прогнозів (щільностей $p_1(x), p_0(x)$). Знайдені пороги з рівняння (4) в реальному вигляді представляють собою проблему.

Вважаючи в (4) $P_{ij}^{(\nu)}(\Lambda_n) = 0, \quad \nu \geq 2;\ P_{ij}^{(1)}(\Lambda_n) = 0, \quad i \neq j;\ P_{11}^{(1)}(\Lambda_n) = P_{00}^{(1)}(\Lambda_n) = 1,$ $\Lambda_n \in (A,B),$ отримаємо лінійну апроксимацію для функції $\widetilde{G}_П(\Lambda_n)$. Очевидно, що відповідні цій апроксимації пороги (див. (4))

$$\underline{A} = \frac{c_0}{\chi(\varphi_{10} - \varphi_{11} - c_1)},\ \overline{B} = \frac{\varphi_{01} - \varphi_{00} - c_0}{\chi^{c}{}_1}$$

є нижньою та верхньою границями відповідно для оптимальних значень A, B, при чому A і B тим ближчі до $\underline{A}$ і $\overline{B}$, чим більше відрізняються розподілення $p_1(x), p_0(x)$.

Розглянемо тепер умовно екстремальну задачу, в якій необхідно знайти оптимальне послідовне правило $u_0(x)$, що мінімізує середній час спостереження $\overline{\tau}(u(x)) = M\tau(u) = P_1\overline{\tau}_1(u) + (1-P)\overline{\tau}_0(u)(\overline{\tau}_1 = M_i\tau)$ в класі послідовних правил, що мають кінцеві середні довжини $\overline{\tau}_i < \infty, i = 0{,}1,$ і задовольняють обмеження

$$\alpha_i(u(x)) \le \overline{\alpha}_i, i = 0{,}1, \tag{6}$$

де $\alpha_i(u) = P_i(u_\tau(x^{\tau_1}) = j),\ i \ne j = 0{,}1,$ – ймовірні помилки рішень; $\overline{\alpha}_i$ – задані ймовірності помилкових рішень. Позначимо клас таких правил через $\Delta(\overline{\alpha_0}, \overline{\alpha_1})$.

Припустимо, що існує функція $u(x) \in \Delta(\overline{\alpha_0}, \overline{\alpha_1})$, така, що $\alpha_i u(x) < \overline{\alpha_1}, i = 0{,}1$ (умова Слейтера). Тоді умовно екстремальна задача може бути зведена до безумовної [1]: $L(\lambda_0, \lambda_1, u_0(x)) = \min\limits_{u(x)} L(\lambda_0, \lambda_1, u_0(x)),$ де λ_0, λ_1 - невизначені множники; $L(\lambda_0, \lambda_1, u_0(x)) = \overline{\tau}(u(x)) + \sum\limits_{i=0}^{1} \lambda_1(\alpha_i(u(x)) - \overline{\alpha}_i).$

Допустимо також, що $\alpha_i(u_0(x)) = \overline{\alpha}_i, i = 0{,}1.$ Тоді $\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0.$ Слідуючи міркуваннями [1], отримаємо, що апостеріорний ризик (АР)

$$R_{nj}(\Lambda_n) = (1 + \chi\Lambda_n)^{-1}\left\{\widetilde{\varphi}_{0j} - \overline{\alpha}_0 + \left[(1-P_1)/\lambda_0 + \chi\Lambda_n P_1/\lambda_1\right]n + \chi\Lambda_n(\widetilde{\varphi}_{1j} - \overline{\alpha}_1)\right\}, \tag{7}$$

де $\widetilde{\varphi}_{ij} = \begin{cases} 1, i \ne j, \\ 0, i = j. \end{cases}$

Звідси витікає, що розглянута умовно екстремальна задача еквівалентна байєсівській при функції втрат $g_{ij}(n) = \varphi_{ij} + c_i n,\ i, j = 0{,}1,$ де $\varphi_{ij} = \begin{cases} 1 - \overline{\alpha}_i, i \ne j, \\ -\overline{\alpha}_i, i = j. \end{cases}$ $c_i = \pi_{0i}/\lambda_i,\ i = 0{,}1,$ $(\pi_{00} = 1 - \pi_{01}),$ і, відповідно, при незалежних однорідних спостереженнях оптимальне правило (5) з порогами $A(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \pi_{01}),\ B(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \pi_{01}),$ що залежать від обмежень і апріорної ймовірності π_{01}.

Однак виявляється, що правило Вальда мінімізується в класі $\Delta(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1)$ не тільки безумовну середню довжину спостереження, але і дві умовні середні довжини $\overline{\tau_i}$. Сам по собі цей факт не є тривіальним, і, очевидно, якщо він має місце, то оптимальні пороги $A = A(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1), B = B(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1),$ не залежать від апріорної ймовірності π_{01}. Позначимо через $\Delta^0(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1)$ клас послідовних не усічених правил, для яких в (6) справедливі рівності

$$\Delta^0(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1) = \{u(x) : \alpha_i(u(x)) = \overline{\alpha}_i,$$
$$\overline{\tau}_i(u(x)) < \infty, i = 0{,}1 \},\ \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_0 < 1. \tag{8}$$

Припустимо, що для будь-якого значення $\pi_{01} \in (0{,}1)$ знайдуться $g_1(\pi_{01}) > 0,$ $g_0(\pi_{01}) > 0,$ такі, що байєсівське правило

$u_0(x) = \arg \inf\limits_{u(x)\in\Delta} \sum\limits_{i=0}^{1} \pi_{0i}\left[g_i(\pi_{01})\alpha_i(u(x)) + \overline{\tau}_i(u(x))\right]$, де Δ - клас різних нерандомізованих правил, належить класу $\Delta^0(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)$. Тоді у відповідності з теоремою 1 [1]. правило $u_0(x)$ є оптимальним в умовно екстремальній задачі:

$$\overline{\tau}_i u_0(x) = \inf_{u(x)\in\Delta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)} \overline{\tau}\ (u(x)), i = 0,1. \tag{9}$$

Оскільки, як було показано вище, оптимальним байєсівським правилом є (5), при виконанні вказаного припущення воно оптимальне в сенсі (8), тобто мінімізує дві умовні середні довжини в класі $\Delta^0(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)$. З існування необхідних констант $g_i(\pi_{01}), i = 0,1$, витікає із леми 6 гл. 3 монографії [3], котра тут не відтворюється.

Отримані результати можна сумувати і вигляді наступної теореми.

Теорема 2. Якщо спостереження $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ незалежні і однаково розподілені як при прогнозі H_0 так і при H_1, то: при функції втрат (2) оптимальним байєсівським правилом є правило Вальда $u^*(\Lambda) = \{u^*{}_n(\Lambda_n), n \geq 1\}$, що визначене співвідношенням (6); верхня і нижня границя для порогів визначаються рівністю (7); якщо послідовне правило Вальда $u^*(\Lambda) \in \Delta^0(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)(\overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 > 1)$, то воно мінімізує умовні середні тривалості спостереження $\overline{\tau}_i, i = 0,1$, в класі (послідовних і непослідовних) правил $\Delta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)$, що мають ймовірності помилок не більше заданих $\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1$ і кінцеві $\overline{\tau}_i, i = 0,1$.

Відзначимо наступні обставини. Випадок $\tau_i = \infty$ не представляє інтересу. Однак можна показати, що правило (6) оптимальне і в цьому випадку. Якщо правило Вальда не належить класу $\Delta^0(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)$, але належить $\Delta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)$, то, в класі $\Delta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)$ може знайтись найкраще (9) правило. Приклад такого роду приведений в [4]. Теорема справедлива і для загального випадку спостереження процесу x_t в дискретному $(t \in \{0,1,2,...\})$ або неперервному $(t \in [0,\infty])$ часі, якщо логарифми ВП (ЛВП) $z_t = \ln \Lambda_t$ має незалежні однорідні прирощення.

В [3] показано, що в задачі перевірки прогнозів про середнє значення вінерівського процесу правило Вальда оптимальне в класі

$$\widetilde{\Delta}(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1) = u(x) : \beta(\alpha_0(u),\alpha_1(u)) \geq \beta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1),$$
$$\beta(\alpha_1(u),\alpha_0(u)) \geq \beta(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_0)$$

більш широким, ніж $\Delta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)$. Тут

$$\beta(x,y) = (1-x)\ln[(1-x)/y] - x\ln[(1-y)/x], \tag{10}$$

причому $M_1\tau(u^*) = 2\beta(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_0), M_0\tau(u^*) = 2\beta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)$.

Визначимо зв'язок порогів *A*, *B* і середніх тривалостей $\overline{\tau}_i{}^* = M_1\tau^*$ з заданими ймовірностями помилок $\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1$, де

$$\tau^* = \inf\{n : z_n \notin (\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)\} = \inf\{n : \Lambda_n \notin (A,B)\}$$

- тривалість Вальда $(z_n \ln \Lambda_n)$. Позначимо через $\delta_1 = z_{\tau^*} - a_1, \delta_0 = z_{\tau^*} - a_0$ перескоки порогів $a_1 \ln B$, $a_0 \ln A$ ЛВП в момент зупинки τ^*. Для ймовірностей помилок правила Вальда маємо

$$\alpha_0^* = \int\limits_{\{u_{\tau^*}^*=1\}} p_0(x_1^{\tau^*})dx_1^{\tau^*} = \int\limits_{\{u_{\tau^*}^*=1\}} e^{-Z_{\tau^*}} p_1(x_1^{\tau^*})dx_1^{\tau^*} = B^{-1} \int\limits_{\{u_{\tau^*}^*=1\}} e^{-\delta_1} p_1(x_1^{\tau^*})dx_1^{\tau^*} = B^{-1}(1-\alpha_1^* - \varepsilon_1)e_1;$$

$$\alpha_0^* = \int\limits_{\{u_{\tau^*}^*=0\}} p_1(x_1^{\tau^*})dx_1^{\tau^*} = \int\limits_{\{u_{\tau^*}^*=0\}} e^{Z_{\tau^*}} p_0(x_1^{\tau^*})dx_1^{\tau^*} = A \int\limits_{\{u_{\tau^*}^*=1\}} e^{\delta_0} p_0(x_1^{\tau^*})dx_1^{\tau^*} = A(1-\alpha_0^* - \varepsilon_0)e_0; \quad (11)$$

де $e_0 = M_0(e^{\delta_0} \left| u^*_{\tau^*} = 0 \right.)$ і $e_1 = M_1(e^{\delta_1} \left| u^*_{\tau^*} = 1 \right.)$, $\varepsilon_i = P_i(\tau^* = \infty)$ – ймовірності не закінчення спостережень. Допустимо, що правило Вальда закінчується з ймовірністю $1: P_i(\tau^* < \infty) = 1,\ i = 0,1$ (ці умови слабкіші, чим постульовані в теоремі 2 умови кінцевості $\bar{\tau}^*{}_i$). Тоді $\varepsilon_i = 0$ з (11) отримуємо формули, що зв'язують ймовірності помилок з заданими порогами і пороги з заданими ймовірностями помилок:

$$\alpha_0^*(A,B) = \frac{e_1(1-e_0A)}{B - e_0e_1A}; \quad \alpha_0^*(A,B) = \frac{e_0A(B-e_1)}{B-e_0e_1A}; \quad (12)$$

$$A(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1) = \frac{\bar{\alpha}_1}{(1-\bar{\alpha}_0)e_0}, \quad B(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1) = \frac{(1-\bar{\alpha}_1)e_1}{\bar{\alpha}_0}. \quad (13)$$

Рівність (13) забезпечує строгі рівності $\alpha^*{}_i = \bar{\alpha}_i$ у випадку, коли розподілення z_n не решітчасте. В іншому випадку можуть існувати такі значення $\bar{\alpha}_i$ при яких $\alpha^*{}_i \neq \bar{\alpha}_i$.

Позначимо через $S_\tau = \sum_{n=1}^{\tau} s'_n$ суму незалежних однаково розподілених величин s'_n, де τ – деякий момент зупинки. Якщо $M\left|s'\right| < \infty, \bar{\tau} = M_\tau < \infty,$ то справедлива рівність [2,4]:

$$MS_\tau = \bar{\tau}Ms', \quad (14)$$

що носить назву тотожності Вальда. Якщо до того ж $M(s')^2 < \infty,$ то [2,4]

$$M(S_\tau - \bar{\tau}Ms')^2 = \bar{\tau}Ds',$$

де $Ds' = M(s' - Ms')^2$.

Нехай $z' = \ln[p_1(x)/p_0(x)]$ і $I_1 = M_1 z'(x) \neq 0, I_0 = -M_0 z'(x) \neq 0,$ що справедливо, коли міра точок x, в яких $p_0(x) = p_1(x),$ рівна 0. Величини I_1, I_0 називають інформаційними кількостями (числами) Кульбака-Лейблера [5]. Вони характеризують кількість інформації , що міститься в спостереженнях x на користь прогнозу H_1 проти H_0 і на користь H_0 проти H_1 відповідно. Нехай також

$$M_i[\ z'(x)\ ]^2 < \infty, i = 0,1, \quad (15)$$

що забезпечує кінцеве l_i серед перескоків $M_i\delta_i$ та e_i. Тоді для любого кінцевого моменту τ у відповідності з тотожністю (14) маємо

$$M_i z_\tau = I_1 M_1 \tau,\ M_0 z_\tau = I_0 M_0 \tau. \qquad (16)$$

Для моменту τ^*, очевидно,

$$M_i z_{\tau^*} = M_1(a_1 + \delta_1 \big| u^*_{\tau^*} = 1) P_i(u^*_{\tau^*} = 1) + M_1(a_0 + \delta_0 \big| u^*_{\tau^*} = 0) P_i(u^*_{\tau^*} = 0). \qquad (17)$$

З (16), (17) отримуємо

$$\bar{\tau}_1^* = \left[\alpha_1^*(a_0 + \bar{\delta}_{01}) + (1-\alpha_1^*)(a_1 + \bar{\delta}_{11})\right] / I_1;\ \bar{\tau}_1^* = -\left[\alpha_0^*(a_1 + \bar{\delta}_{10}) + (1-\alpha_0^*)(a_0 + \bar{\delta}_{00})\right] / I_0, \qquad (18)$$

де $\bar{\delta}_{ij} = M_j(\delta_i \big| u^*{}_{\tau^*} {=} i), i, j = 0{,}1,$ - умовні середні перескоки. Використовуючи (13), з (18) отримуємо зв'язок умовних середніх тривалостей правила Вальда з заданими ймовірностями помилок:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1^* = (\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1) &= \left[\beta((\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_0) + (1-\bar{\alpha}_1)(\bar{\delta}_{11} + \ln e_1) + \bar{\alpha}_1(\bar{\delta}_{01} - \ln e_0)\right] / I_1; \\ \bar{\tau}_0^* = (\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1) &= \left[\beta((\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1) - (1-\bar{\alpha}_0)(\bar{\delta}_{00} - \ln e_0) - \bar{\alpha}_0(\bar{\delta}_{10} + \ln e_1)\right] / I_0, \end{aligned} \qquad (19)$$

де $\beta(x, y)$ - функція, визначена в (10).

Для використання (12), (13), (18), (19) в практичних розрахунках необхідне визначення величин $\delta_{ij}, e_i,$ що в загальному випадку представляє собою важку задачу. Тому доцільно отримати асимптотичні і наближені формули. В якості першого наближення можуть служити формули Вальда [2], що ігнорують ефект перескоку порогів. Припускаючи в (13) і (19)) $e_i = 1, \delta_{ij} = 0,$ отримуємо

$$A(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1) \approx \frac{\bar{\alpha}_1}{1-\bar{\alpha}_0},\ B(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1) \approx \frac{\overline{1-\alpha_1}}{\bar{\alpha}_0}; \qquad (20)$$

$$\bar{\tau}_1^*(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1) \approx \beta(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_0) / I_1,\ \bar{\tau}_0^*(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1) \approx \beta(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1) / I_0. \qquad (21)$$

Точність формул (20), (21) зростає при наближенні прогнозу (при зменшенні в середньому збільшень ЛВП за крок) і при зменшенні заданих ймовірностей помилок. Справді, якщо $\bar{\alpha}_i \to 0,$ то при виконанні умови (15) $\bar{\delta}_{ij} < \infty, e_i < \infty$ і з (14), (19) витікає, що вибір порогів по формулі Вальда (20) забезпечує асимптотичні рівності

$$\alpha_0^* = e_1\bar{\alpha}_0(1 + O(\bar{\alpha}_1\ )),\ \alpha_1^* = e_0\bar{\alpha}_1(1 + O(\bar{\alpha}_0\ )), \qquad (22)$$

$$\bar{\tau}_1^* = \frac{|\ln\bar{\alpha}_0|}{I_1}(1 + o(1)),\ \bar{\tau}_0^* = \frac{|\ln\bar{\alpha}_1|}{I_0}(1 + o(1)). \qquad (23)$$

Головні члени співвідношення (22) при малих $\bar{\alpha}_i$ співпадають з правими частинами (21). Якщо, до цього зближаються прогнози, то $e_i \to 1$ і, відповідно, головні члени (22) дорівнюють $\bar{\alpha}_0$ і $\bar{\alpha}_1$. Таким чином, точність формул (21) може видатись задовільними навіть в випадку достатньо інформативних спостережень при малих $\overline{\alpha}_i$, так як $\overline{\delta}_{ij}$ і $\ln e_i$ входять в (13) мультиплікативно.

З сказаного слідує, що формули (20) можуть видатись досить грубими, забезпечуючи ймовірності помилок значно менше аніж необхідно (див. (22)). Їх уточнення, зв'язане з оцінкою e_i, може бути проведено з допомогою теорії відновлення [6]. Результати робіт [3, 6] дозволяють записати наступні асимптотичні точні формули:

$$\alpha_0^* = (A,B) = \frac{\beta_1(1-\beta_0 A)}{B-\beta_0\beta_1 A} + o(\frac{A}{B});$$
$$\alpha_1^* = (A,B) = \frac{\beta_0 A(B-\beta_1)}{B-\beta_0\beta_1 A} + o(\frac{A}{B}), A \to 0, B \to \infty; \tag{24}$$

$$A(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1) = \frac{\overline{\alpha}_1}{(1-\overline{\alpha}_0)\beta_0}(1+o(\overline{\alpha}_0^{\gamma_0})+o(\overline{\alpha}_1^{1+\gamma_1}))^{-1};$$
$$B(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1) = \frac{\beta_1(1-\overline{\alpha}_1)}{\overline{\alpha}_0}(1+o(\overline{\alpha}_0^{\gamma_1})+o(\overline{\alpha}_1^{1+\gamma_0}))^{-1}, \overline{\alpha}_i \to 0, \tag{25}$$

де константи β_i,γ_i залежать від розподілу спостереження і визначаються співвідношенням

$$\beta_0 = \frac{\varphi\_(1)}{\varphi'\_(0)}; \ \beta_1 = \frac{\varphi_+(0)}{\varphi'_+(1)}, \tag{26}$$

в яких $\varphi \pm (\lambda)$ – компоненти канонічної факторизації [6] функції $\varphi(\lambda) = 1 - M_0 \exp\{\lambda z'(x)\}(\varphi(\lambda) = \varphi + (\lambda)\varphi - (\lambda))$. В деяких випадках в співвідношеннях (24), (25) символ o замінюється на O [3].

З (24) і (25) слідує, що якщо пороги вибрати по формулам

$$B(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1) = \frac{\beta_1(1-\overline{\alpha}_1)}{\overline{\alpha}_0}; \ A(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1) = \frac{\overline{\alpha}_1}{(1-\overline{\alpha}_0)\beta_1}, \tag{27}$$

то $\alpha^*_i \approx \overline{\alpha}_i$, причому точність зростає експоненціально швидко при збільшенні $|\alpha_i|$. В той же час якщо пороги вибрати по формулам Вальда (20), то $\alpha^*_i \approx \beta_j \overline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i \to 0 (i,j=0,1, i \neq j)$. Таким чином, Вальдівська апроксимація дає хороші результати тільки в тому випадку, коли мала абсолютна величина перескоку $(\beta_i \approx 1)$, тобто фактично при $\overline{\alpha}_i << 1$. Для середніх тривалостей з (18), (24), (27) при достатньо малих $\overline{\alpha}_i$ витікає наступна апроксимація:

$$\overline{\tau}_1^*(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1) \approx \left[\beta(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_0) + \overline{\delta}_1 + \ln\beta_1\right]/I_1; \quad \overline{\tau}_0^*(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1) \approx \left[\beta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1) + \overline{\delta}_0 + \ln\beta_0\right]/I_0, \tag{28}$$

де $\overline{\delta}_i = M_i \delta_i$ - середні перескоки $\delta_i + z_{\tau i} - a_i$ в односторонніх правилах $\tau_1 = \inf\{n : z_n \geq a_1\}$; $\tau_0 = \inf\{n : z_n \leq a_0\}$, які можуть бути вичислені з використанням теорії відновлення [6].

Покажемо, що для умовних середніх тривалостей $\overline{\tau}_i(u) = M_{i\tau}(u)$ довільного правила $u(x) \in \Delta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)$ при виконанні умови (15) справедливі рівності

$$\bar{\tau}_1(u) \ge \beta(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_0)/I_0;\ \bar{\tau}_0(u) \ge \beta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)/I_0. \tag{29}$$

Для цього знадобиться наступна лема, доказ якої елементарно можна знайти [5].

Лема. Нехай $(X,\mathfrak{I})$ - вимірюваний простір, в якому визначені взаємно абсолютно неперервні σ-кінцеві міри P і $\mu, z(x) = \ln\frac{dP}{d\mu}(x).$ Для довільних неперетинних множин $Y_i \in F$, $i \ge 0,$ таких, що $\bigcup_{i\ge 0} Y_i = X,$ має місце нерівність

$$\int_X z(x)d\mu(x) \ge \sum_{i\ge 0} P(Y_i)\ln\frac{P(Y_i)}{\mu(Y_i)}, \tag{30}$$

рівність в якому досягається тільки в тому випадку , коли $P(Y_i) = \mu(Y_i), i \ge 0.$

Припускаючи спочатку $P = P_1, \mu = P_0,$ а потім $P = P_0, \mu = P_1$ і $Y_i = \{u_\tau = i\},$ з (30) отримуємо

$$M_1 z_{\tau(u)} \ge \sum_{i=0}^{1} P_1(u_\tau = i)\ln\frac{P_1(u_\tau = i)}{P_0(u_\tau = 0)} = \alpha_1(u)\ln\frac{\alpha_1(u)}{1-\alpha_0(u)} + (1-\alpha(u))\ln\frac{1-\alpha_1(u)}{\alpha_1(u)} =$$

$$= \beta(\alpha_1(u), \alpha_0(u));$$

$$M_0 z_{\tau(u)} \le -\sum_{i=0}^{1} P_0(u_\tau = i)\ln\frac{P_0(u_\tau = i)}{P_1(u_\tau = i)} = -\left[\alpha_0(u)\ln\frac{\alpha_0(u)}{1-\alpha_1(u)} + (1-\alpha_0(u))\ln\frac{1-\alpha_0(u)}{\alpha_1(u)}\right] =$$

$$= -\beta(\alpha_0(u), \alpha_1(u)).$$

Справедливість невірності (29) слідує тепер з (30), (16) і обставини, що функція $\beta(x,y)$ є спадною в області $x + y \le 1.$

З теореми 2 оптимальність правила Вальда витікає тільки в тому випадку, коли справедливі точні рівності $a^*_i = \overline{a}_i.$ Як вказувалось вище, ці рівності виконуються для не решітчастих розподілень при виборі порогів по формулам (13), в яких точно вичислити величини e_i зазвичай не вдається. З співвідношення (21) витікає, що нижні оцінки (29) для умовних середніх тривалостей наближено досягаються для правил Вальда, коли можна знехтувати перескоками порогів $\delta_{i.}$. Останні, як вже відмічалось, справедливі при розрізненні «близьких» прогнозів і при малих $\overline{a}_i$ (див. також (23)). Таким чином, правило Вальда з порогами (20) в цьому випадку близьке до оптимального, причому степінь наближення тим вище, чим «ближче» щільність $p_0(x), p_1(x)$ і менше $\overline{a}_i$. Найкращі результати, однак, дають формули (27), що включаються при виборі порогів степінь схожості щільностей $p_0(x), p_1(x)$.

Підкреслимо, що рівності (20) стають точними, коли стають відсутні перескоки порогів статистикою ЛВП. Це справедливо, наприклад, коли час спостереження і траєкторії ЛВП неперервні. Якщо ЛВП є гаусовським процесом з незалежними однорідними приростами, то точними є рівності (21). Рівність (12), (13), (20) справедливі для загального випадку залежних неоднорідних спостережень, в той час як (18), (19), (21), (23)–(28) – для незалежних однорідних спостережень.

Розглянемо випадок залежних спостережень $x_1,...,x_n,...,$ таких, що існують взаємно однозначні декорелятивні перетворення $F^{(n)}(x^n{}_1)=\left\{F_k(x^k{}_1), k=\overline{1,n}\right\}$, що не залежать від номера прогнозу i. Тоді згідно (18), (19)

$$\Lambda_n(x_1^n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\widetilde{p}_{1k}(\widetilde{x}_k)}{\widetilde{p}_{0k}(\widetilde{x}_k)}=\widetilde{\Lambda}_n(\widetilde{x}_1^n), n\geq 1, \tag{31}$$

де $\bar{x}_k=F_k(x^k{}_1)$; щільності $p_{ik}(\bar{x}_k)$ залежать від k, так як $\bar{x}_k, k\geq 1,$ не однаково розподілені.

Якщо до того ж виконана умова $R_n^0(x_1^n)=R_n^N(T_n)$, $n=\overline{1,N}$, то оптимальною (в байєсівському сенсі) здається процедура (1) з змінними порогами. Структурна схема оптимальної системи розпізнання представлена на рис. 1. Для строгої оптимальності правила Вальда (як в байєсівській постановці при втратах виду (1), так і в умовно екстремальній постановці – в класі $\Delta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)$) необхідно, щоб ЛВП $\bar{z}_n=\ln\Lambda_n=\sum_1^n\widetilde{z}'_k$ $(\widetilde{z}'_k=\ln[\widetilde{p}_{1k}(\widetilde{x}_k)/\widetilde{p}_{0k}(\widetilde{x}_k)])$ представляв процес з незалежними однорідними приростами. Справді, момент зупинки, що відповідає правилу Вальда, в силу (31) можна записати у вигляді $\tau(u(\Lambda))=\inf\{n\geq 1:\widetilde{z}_n\notin(\ln A,\ln B)\}$.

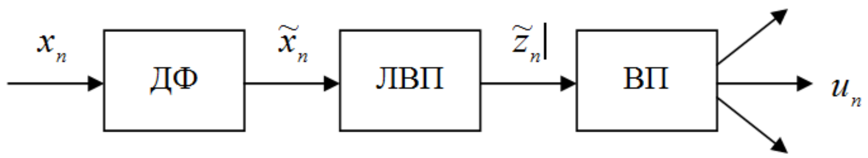

Рис. 1. Структурна схема оптимальної системи розпізнання двох прогнозів при залежних спостереженнях: ДФ – декорелятивний фільтр; ЛВП – блок формування ЛВП; ВП – двохпороговий вирішальний пристрій з змінними порогами.

Якщо величини $\widetilde{z}'_k, k\geq 1,$ однаково розподілені (це означає однорідність $\{\widetilde{z}_n, n\geq 1,\}$, застосовується теорема 2, в відповідності до якої правило (5) оптимальне в класі $\Delta(\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1)$. В деяких задачах значення $\widetilde{z}'_k$ однаково розподілені при $k\geq M\geq 2.$ Тому з збільшенням часу спостереження процес $\{\widetilde{z}_n\}$ стає однорідним і в випадку великої середньої тривалості правило Вальда оптимальне. При цьому справедлива рівність (29), в яких $I_1=M_1\widetilde{z}', I_0=-M_0\widetilde{z}', (\widetilde{z}'=\widetilde{z}_k, k\geq M),$ а також при «близьких» прогнозах і малих $\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_1$ наближення рівності (21).

Щоб проілюструвати сказане, розглянемо задачу повірки двох прогнозів $H_0:\theta=0, H_1:\theta=1$ про середнє значення марковської послідовності $\{x_n, n\geq 1\}: x_n+S_\theta+\eta_n, \theta=0{,}1,$ де S_θ, S_1 - дві константи; $\{\eta_n, n\geq 1\}$ задовольняють співвідношенню $\eta_{n+1}=R\eta_n+\xi_{n+1}, n\geq 1, \eta_0=0,$ де $\{\xi_n, n\geq 1\}$ - послідовність незалежних однаково розподілених величин з нульовим середнім, що має розподіл з щільністю $f(\xi)$. Декорельовані перетворення мають вигляд $F_k(x^k{}_1)=x_k-Rx_{k-1}, k\geq 2, F_1(x_1)=1;$ при цьому $\widetilde{x}_k=S_\theta(1-R)+\xi_k, k\geq 2; x_1=\widetilde{x}_1.$

Відповідно, $\widetilde{z}_n=\sum_1^m\widetilde{z}'_k; z'_k=\ln\dfrac{f(\widetilde{x}_k-S_1(1-R))}{f(\widetilde{x}_k-S_0(1-R)}, k\geq 2;\ z'_1=\ln\dfrac{f(\widetilde{x}_1-S_1)}{f(\widetilde{x}_1-S_0)}.$

Значення $\tilde{z}'_k, k \geq 2,$ незалежні і однаково розподілені, величина $\tilde{z}'_1$ незалежна від значень $\tilde{z}'_k, k \geq 2,$ і відрізняється від них по розподіленню. Процес $\{\tilde{z}_n, n \geq 1\},$ є марковським неоднорідним, а $\{\varepsilon_n, n \geq 2\}$ – однорідним $\left\{\varepsilon_n, \sum_2^n \tilde{z}'_k\right\}$. Тому, якщо перше спостереження носить новий вклад, що виконано при великому середньому числі кроків спостереження, то правило Вальда близьке до оптимального і можна користуватись всіма отриманими результатами.

Висновки

На основі математичного обґрунтування та виведення виразів, що точно описують послідовне правило Вальда і в рамках зроблених припущень та досліджень виведено вирази оптимальної перевірки двох простих прогнозів, що в свою чергу дозволило отримати подальший розвиток вирішенню проблеми прогнозування НСД. На основі дослідження оптимальності не усіченого послідовного правила Вальда отримано рівності, що зв'язують ймовірності помилок з заданими порогами і пороги з заданими ймовірностями помилок справедливі для загального випадку залежних неоднорідних спостережень і для незалежних однорідних спостережень.

З отриманих співвідношень витікає, що нижні оцінки для умовних середніх тривалостей, наближено досягаються для правил Вальда, коли можна знехтувати перескоками порогів $\delta_{i.}$. Таким чином, отримане і досліджене правило Вальда з порогами в нашому випадку близьке до оптимального, причому степінь наближення тим вище, чим «ближче» щільність $p_0(x), p_1(x)$ і менше $\overline{a}_i$.

При деяких умовах, а саме коли величини $\tilde{z}'_k, k \geq 1,$ однаково розподілені, застосовується запропонована нами теорема 2, у відповідності до якої правило Вальда (двопорогова послідовна не усічена процедура) оптимальне в класі $\Delta(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1)$. В деяких задачах значення $\tilde{z}'_k$ однаково розподілені при $k \geq M \geq 2.$ Тому з збільшенням часу спостереження процес $\{\tilde{z}_n\}$ стає однорідним і у випадку великої середньої тривалості правило Вальда оптимальне. Отже, правило Вальда близьке до оптимального і можна користуватись всіма отриманими результатами.

Список літератури

1. Опірський, І.Р. Оптимізація послідовних процесів прийняття рішень при умовно екстремальній постановці задачі / І.Р. Опірський // СНУ ім. В.Даля: Інформаційна безпека. – 2014. - №4(16). –С.120-127.
2. Орлов, А. И. Теория принятия решений: учебник. — М.: Экзамен, 2006. — 573 с.
3. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Под ред. Ю.В.Прохорова. — М.: Большая российская энциклопедия, 2003. — 912 с.
4. Ширяев, А.Н. Вероятность. В 2-х кн. Кн.2 – 3-е изд. – М: МЦНМО, 2004. – 408 с.
5. Кудряшов, Б.Д. Теория информации.– СПб: Питер, 2009.–320 с.
6. Siegmund, D. Sequential Analysis. Tests and confidence intervals.–N.Y.: Springer veriage, 2005.– 270 p.

ОПТИМАЛЬНОСТЬ НЕ УСЕЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ ВАЛЬДА В ЗАДАЧАХ ПРОВЕРКИ ДВУХ ПРОСТЫХ ПРОГНОЗОВ НСД В ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕТЯХ ГОСУДАРСТВА

В.Б. Дудыкевич[1], И.Р. Опирский[1], П.И. Гаранюк[1], О.А.Ввавричен[2]

[1]Национальный университет «Львовская политехника»,
ул. Бандеры, 12, Львов, 79000, Украина; e-mail: iopirsky@gmail.com
[2]Национальная академия Государственной пограничной службы Украины им. Б.Хмельницкого,
ул. Шевченко, 46, г. Хмельницкий, 29003, Украина

В работе математически обоснованы и выведены выражения, которые точно описывают последовательное правило Вальда. В рамках сделанных предположений и исследований выведено выражения оптимальной проверки двух простых прогнозов, что в свою очередь позволяет получить дальнейшее развитие решению проблемы прогнозирования НСД. На основе исследования оптимальности не усеченного последовательного правила Вальда получено равенства, связывающие вероятности ошибок с заданными порогами и пороги с заданными вероятностями ошибок которые справедливы для общего случая зависимых неоднородных наблюдений и для независимых однородных наблюдений.

Ключевые слова: несанкционированный доступ, информационные системы государства, процедура Вальда, прогноз, прогнозирование, порог, оптимальное последовательное правило, наблюдения

OPTIMALITY IS NOT TRUNCATED CONSISTENT PROCEDURES WALD IN SCAN TASKS OF TWO SIMPLE BETS UA IN INFORMATION NETWORKS STATE

V.B. Dudykevich[1], I.R. Opirsky[1], P.I. Garanyuk[1], O.A.Vavrichen[2]

[1] National University "Lviv Polytechnic",
Str. Bandera, 12, Lviv, 79000, Ukraine; e-mail: iopirsky@gmail.com
[2] National Academy of State Border Service of Ukraine. B. Khmelnitsky,
Str. Shevchenko, 46, Khmelnytskyi, 29003, Ukraine

The paper is mathematically valid and withdrawn expression that describes sequential rule Wald. As part of the assumptions and research derived the optimal expression of testing two simple prediction, which in turn allows you to further development addressing unauthorized access prediction. Based on a study of optimality is not truncated serial entitled to receive equity Wald linking the probability of errors with the set thresholds and thresholds with given probabilities of error which are valid for the general case of dependent observations of inhomogeneous and homogeneous for independent observations.

Keywords: unauthorized access, information system of the state, the procedure Wald, forecast, forecasting, threshold, optimum sequence typically, observation.