

# СИНТЕЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА В СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЕ С АСТАТИЗМОМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С.А. Бобриков, Е.Д. Пичугин, Н.Н. Дикий

Одесский национальный политехнический университет,  
просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: bobrikov1932@mail.ru

Проведен синтез цифрового регулятора для следящей системы с астатизмом третьего порядка. Выполнено моделирование системы в пакете MATLAB-Simulink. Разработан метод расчета цифрового регулятора по заданным параметрам неизменяемой части следящей системы и требуемым показателям качества. Показателями выбраны максимальное перерегулирование в переходной характеристике и максимальная перегрузка привода по моменту в режиме разгона. Используется преобразование непрерывной передаточной функции регулятора в дискретную. Приведен пример расчета и результаты моделирования.

**Ключевые слова:** система управления, астатизм, цифровой регулятор, передаточные функции непрерывная и дискретная, моделирование, переходная характеристика, перегрузка привода по моменту, показатели качества управления

## Введение

Как известно, интегрирование сигнала ошибки в системе управления позволяет свести к нулю установившуюся ошибку при постоянном входном сигнале; двойное интегрирование ошибки сводит к нулю установившуюся ошибку при изменении входного сигнала с постоянной скоростью; при тройном интегрировании сигнала ошибки (астатизм третьего порядка) равна нулю установившаяся ошибка при постоянном ускорении входного сигнала.

Очевидно, что эти свойства астатических систем позволяют выполнять особо точные системы управления, например, системы слежения за движущимся объектом, высокоточные транспортные системы дозирования и пр. Методы анализа и синтеза подобных систем рассмотрены, например, в работах [1,2,3]. В работах [4,5,6] рассмотрены методы синтеза систем с астатизмом второго порядка.

В данной статье рассмотрен метод синтеза системы с астатизмом третьего порядка, позволяющий определить параметры цифрового управляющего устройства по заданным показателям качества при известных параметрах заданной неизменяемой части системы.

Метод основан на том, что передаточная функция разомкнутой системы, представленная как произведение передаточных функций регулятора и неизменяемой части, имеет заданный вид, с параметрами, определяемыми по принятым показателям качества. После определения передаточной функции разомкнутой системы находят непрерывную передаточную функцию регулятора путём деления передаточной функции разомкнутой системы на передаточную функцию неизменяемой (заданной) части. Затем находят дискретную передаточную функцию цифрового регулятора  $K(z)$  путём подстановки в непрерывную передаточную функцию  $K(p)$  выражения [7,10]:

$$p = \frac{2(z-1)}{T_0(z+1)}. \quad (1)$$

### Цель работы

Целью работы является разработка метода синтеза цифрового регулятора для следящей системы с астатизмом третьего порядка. Система должна иметь максимальное перегуливание в переходной характеристике не более заданной величины, при условии, что перегрузка привода по моменту в переходном процессе не превысит заданного значения.

В качестве объекта управления принят двигатель постоянного тока с усилителем мощности. Передаточная функция заданной части системы при этом имеет вид:

$$K_3(p) = \frac{K_3}{(T_y p + 1)(T_m p + 1)p}, \quad (2)$$

где  $K_3$  – коэффициент усиления заданной части системы,  $T_y$ ,  $T_m$  – соответственно постоянные времени усилителя мощности и двигателя.

### Основная часть

Принимаем следующее условие: передаточная функция разомкнутой системы  $K_c(p)$  (рис.1), включающей управляющее устройство  $K_p(p)$  и заданную, неизменяемую часть системы  $K_3(p)$ , соединенных последовательно, имеет вид:

$$K_c(p) = K_p(p)K_3(p) = \frac{K(Tp+1)^2}{p^3}. \quad (3)$$

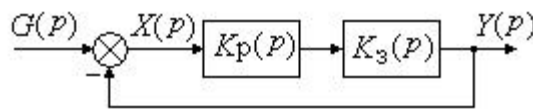


Рис. 1. Структурная схема системы

При таком виде передаточной функции свойства системы полностью определяются лишь двумя параметрами: коэффициентом усиления системы  $K$  и постоянной времени  $T$ .

Разделив желаемую передаточную функцию (3) на передаточную функцию заданной части системы (2) получим передаточную функцию регулятора:

$$K_p(p) = \frac{K(Tp+1)^2(T_y p + 1)(T_m p + 1)}{p^2 K_3 (T_d p + 1)^2}. \quad (4)$$

В передаточную функцию регулятора введены ещё две дополнительные постоянные времени  $T_d$ , которые необходимы для обеспечения физической

реализуемости регулятора: степень полинома числителя не может быть больше степени полинома знаменателя. Для того, чтобы влияние дополнительных постоянных времени было минимальным, их величина выбирается на порядок меньше наименьшей постоянной времени в заданной части системы.

Наличие в регуляторе дифференцирующих звеньев приводит к большим всплескам напряжения на выходе регулятора при подаче на вход ступенчатого сигнала. Для подтверждения этого определим начальное значение выходного сигнала регулятора (4) при условии, что на входе действует единичный ступенчатый сигнал. При этом изображение выходного сигнала имеет вид:

$$U_1(p) = \frac{1}{p} K_p(p) = \frac{K(Tp + 1)^2(T_y p + 1)(T_m p + 1)}{p^3 K_3(T_d p + 1)^2}.$$

Начальное значение оригинала  $u_1(t)$  найдем, используя теорему о начальном и конечном значениях изображения и оригинала:

$$u_1(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p U_1(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K(Tp + 1)^2(T_y p + 1)(T_m p + 1)}{p^2 K_3(T_d p + 1)^2} = \frac{KT^2 T_y T_m}{K_3 T_d^2}.$$

Дополнительные постоянные времени в знаменателе  $T_d$  должны быть на порядок меньше наименьшей постоянной времени в заданной части системы ( $T_y, T_m$ ). При этом начальный всплеск напряжения на выходе регулятора может принимать существенно большие значения. Для ограничения максимальных значений выходного сигнала на выходе регулятора устанавливаем нелинейное звено типа «насыщение» с ограничением максимальной величины до значения  $U_{2max} = \pm 2$  (в относительных единицах), что вполне допустимо в реальных условиях работы заданной части системы (усилитель мощности и двигатель).

Для определения динамических свойств системы были проведены экспериментальные исследования системы на модели в пакете MATLAB-Simulink. Схема модели приведена на рис.2.

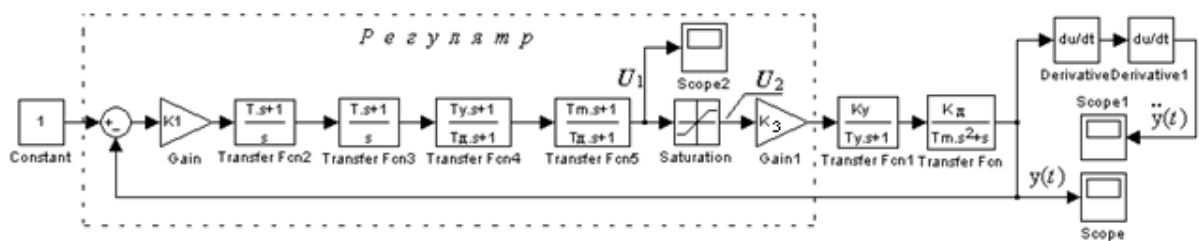
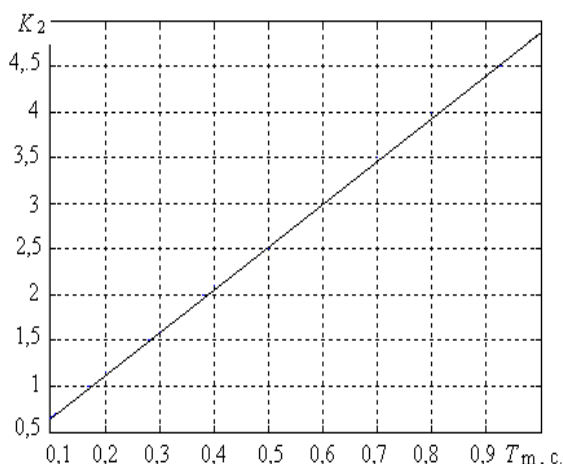


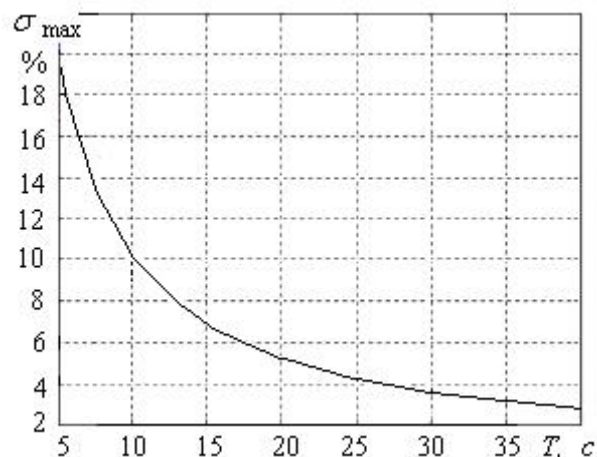
Рис. 2. Схема модели в пакете Simulink

При моделировании рассматривались переходные характеристики системы при различных значениях настраиваемых параметров  $K = K_1 K_3 K_y K_d$  и  $T$  (рис. 2). Исследования проводились при значениях постоянной времени двигателя в интервале  $T_m = (0.1-1)$  с и постоянной времени усилителя  $T_y = (0.01-0.05)$  с. В переходной характеристике определялась величина максимального перерегулирования  $\sigma_{max}, \%$ . Настраиваемые параметры подбирались так, чтобы максимальная величина ускорения выходной величины  $\ddot{y}(t) \in (8.5, 9)$ , что соответствует допустимой величине перегрузки

по моменту для двигателей постоянного тока. Выполнение этого условия определяет минимальное время переходного процесса.



**Рис. 3.** Зависимость коэффициента  $K_2$  от пост. времени двигателя при максимальной перегрузке привода по моменту  $\lambda = (8.5 - 9)$



**Рис. 4.** Зависимость максимального перерегулирования от  $T$

Анализ результатов моделирования позволил получить зависимость величины коэффициента усиления  $K_2 = K_3 K_y K_d$  (рис. 2) от постоянной времени двигателя, при условии, что максимальное ускорение выходной величины принимает значение в интервале (8.5, 9) (рис. 3). Величина коэффициента  $K_1$  принята равной 0.1.

Максимальное перерегулирование зависит от произведения  $KT^2 = K_1 K_2 T^2$ . При этом величина коэффициента  $K$  влияет на кривую переходного процесса в значительно меньшей степени, чем величина постоянной времени  $T$ . Чем больше  $KT^2$ , тем меньше  $\sigma_{\max}$ . На рис. 4 приведен график зависимости  $\sigma_{\max}$  от  $T$  при условии, что  $K_1 = 0.1$ , а величина коэффициента  $K_2$  определена по значению  $T_m$  (рис. 3).

При значительном увеличении  $KT^2$  система становится неустойчивой. Определим предельное значение  $KT^2$ , соответствующее границе устойчивости. Нелинейное звено (насыщение) принимаем как линейное с коэффициентом, равным 1, что соответствует его максимальному значению.

Передаточная функция разомкнутой системы (рис. 2) имеет вид:

$$K(p) = \frac{K_1(Tp+1)^2(T_y p+1)(T_m p+1)K_3 K_y K_d}{p^2(T_d p+1)^2(T_y p+1)(T_m p+1)p} = \frac{K(Tp+1)^2}{p^3(T_d p+1)^2},$$

принимаем:  $K_1 K_3 K_y K_d = K$ .

Передаточная функция замкнутой системы равна:

$$W(p) = \frac{K(Tp+1)^2}{p^3(T_d p+1)^2 + K(Tp+1)^2}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0,$$

где  $a_0 = T_d^2$ ;  $a_1 = 2T_d$ ;  $a_2 = 1$ ;  $a_3 = KT^2$ ;  $a_4 = 2KT$ ;  $a_5 = K$ .

Используя алгебраический критерий устойчивости, запишем соответствующие неравенства:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 2T_d - T_d^2 K T^2 > 0; \quad K T^2 < \frac{2}{T_d};$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_3^2 a_0 = 2T_d K T (T - 4T_d) - K^2 T^4 T_d^2 > 0.$$

Учитывая, что  $T \gg 4T_d$ , имеем:

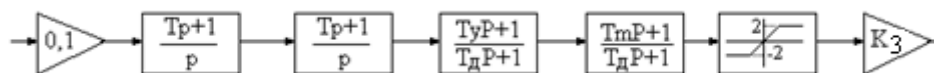
$$K T^2 < \frac{2}{T_d}. \tag{5}$$

### Порядок расчета цифрового регулятора

Задана неизменяемая часть системы (2) с параметрами  $K_y, K_d, T_y, T_m$ . Принимаем условие, что используется электропривод, допускающий максимальную перегрузку по моменту в переходном режиме  $\lambda \in (8.5, 9)$ . Максимальное перерегулирование в переходной характеристике не должно превышать заданной величины  $\sigma_{\max}$ .

1. По графику, представленному на рис. 3, находим величину коэффициента  $K_2$  по заданной величине  $T_m$ .
2. По графику, представленному на рис. 4, определяем величину постоянной времени  $T$ , по заданной величине  $\sigma_{\max}$ .
3. По структурной схеме непрерывного регулятора (рис. 5) записываем непрерывную передаточную функцию вычислителя:

$$K(p) = \frac{0.1(Tp+1)^2(T_y p+1)(T_m p+1)}{P^2(T_d p+1)^2}. \tag{6}$$



**Рис. 5.** Структурная схема непрерывного регулятора

Дополнительные постоянные времени принимаем равными  $T_d = 0.1T_y$  (полагаем, что  $T_y < T_m$ ).

4. Сделав подстановку (1) в формулу (6) получаем дискретную передаточную функцию цифрового регулятора  $K(z)$ . В регулятор должно быть введено ещё кроме

вычислителя нелинейное звено с коэффициентом в линейной части, равным единице и с насыщением  $\pm 2$ , и коэффициент  $K_3$ , равный  $K_3 = \frac{K_2}{K_y K_d}$ .

5. Проверяем выполнение условия устойчивости (5).

**Пример.**

Пусть заданы параметры непрерывной части системы:  $T_y = 0.02$  с,  $T_m = 0.25$  с,  $\sigma_{\max} < 4\%$ .

По графикам рис. 3 и рис. 4 находим:  $K_2 = 1.35$ ,  $T = 35$ ,  $T_d = 0.002$ .

Проверяем условие устойчивости:

$$KT^2 = K_1 K_2 T^2 = 0.1 \cdot 1.35 \cdot 35^2 = 165.4; \quad \frac{2}{T_d} = \frac{2}{0.002} = 1000.$$

Условие устойчивости выполнено.

Записываем передаточную функцию вычислителя непрерывного регулятора (6):

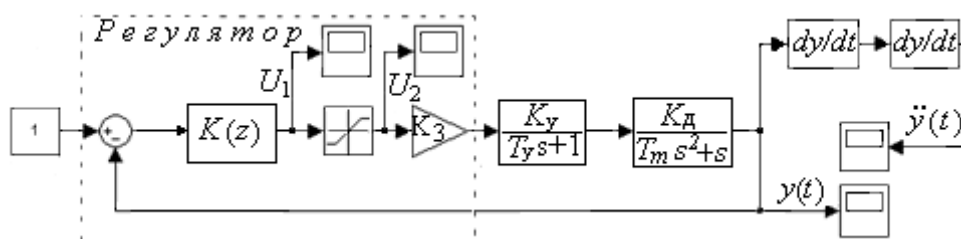
$$K(p) = \frac{0.1(35p + 1)^2(0.02p + 1)(0.25p + 1)}{p^2(0.002p + 1)^2} = \frac{0.612p^4 + 33.1p^3 + 124p^2 + 7p + 0.1}{4 \cdot 10^{-6} p^4 + 0.004p^3 + p^2}. \quad (7)$$

Сделав подстановку (1) в формулу (7) получаем дискретную передаточную функцию вычислителя. Шаг квантования принимаем, исходя из условия  $T_0 = (2 - 2.5)T_{\min}$  [10]:  $T_0 = 2.5T_d = 0.005$  с. Дискретная передаточная функция вычислителя имеет вид:

$$K(z) = \frac{s_4 z^4 + s_3 z^3 + s_2 z^2 + s_1 z + s_0}{g_4 z^4 + g_3 z^3 + g_2 z^2 + g_1 z + g_0},$$

где  $s_4 = 11.128401175$ ;  $s_3 = -41.8159965$ ;  $s_2 = 58.7272$ ;  $s_1 = -36.5200035$ ;  $s_0 = 8.48039825$ ;  $g_4 = 3.24e-4$ ;  $g_3 = -5.76e-4$ ;  $g_2 = 1.84e-4$ ;  $g_1 = 6.4e-5$ ;  $g_0 = 4e-6$ .

На рис. 6 приведена схема модели системы с цифровым регулятором.



**Рис. 6.** Схема модели системы с цифровым регулятором

На рис. 7 показана переходная характеристика, из которой видно, что максимальное перерегулирование составляет примерно 2-3%, что соответствует принятым требованиям к системе. На рис. 8 приведена кривая ускорения выходной величины. Максимальное значение ускорения составляет примерно 9 единиц, что равно максимальной перегрузке привода по моменту и соответствует принятым условиям. На рис. 9 показан сигнал на выходе цифрового вычислителя. Максимальное значение этого сигнала слишком велико ( $\times 10^4$ ) и не может быть реализовано в звене, следующим за

вычислителем. Поэтому на выходе вычислителя установлено нелинейное звено, ограничивающее сигнал до приемлемого уровня  $\pm 2$  усл. ед. На рис. 10 показан график сигнала после ограничения.

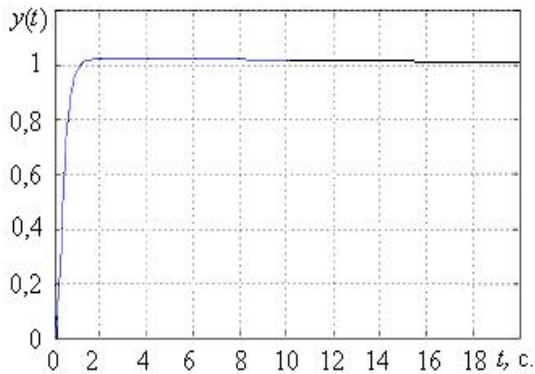


Рис. 7. Переходная характеристика

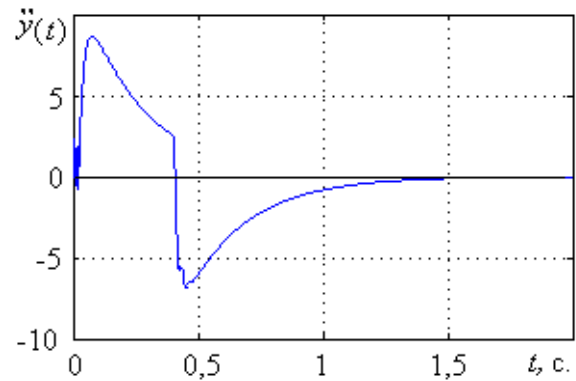


Рис. 8. График ускорения выходной величины

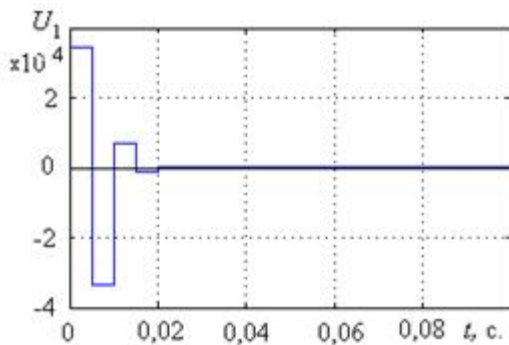


Рис. 9. Сигнал на выходе вычислителя в переходном процессе

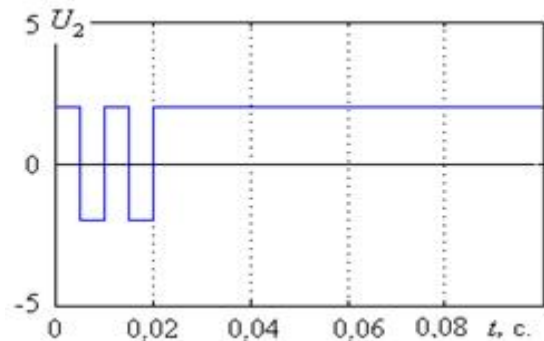


Рис. 10. Сигнал на выходе нелинейного звена

## Выводы

Разработанный метод позволяет рассчитать цифровой регулятор для следящей системы с астатизмом третьего порядка, с приводом постоянного тока при допустимой перегрузке по моменту вращения  $\lambda \in (8.5, 9)$ . Принято условие, что максимальное перерегулирование в переходной характеристике не превышает заданного значения. Метод рассчитан на использование двигателя с постоянной времени в пределах 0.1-1 с и усилителя мощности с постоянной времени в пределах 0.01-0.05 с. Использование на выходе регулятора нелинейного звена позволило применить в регуляторе дифференцирующие составляющие с необходимым по величине коэффициентом усиления, что обеспечило адекватность расчетных параметров и результатов моделирования.

## Список литературы

1. Акимов, Л.В. Исследование параметрического астатизма при синтезе регуляторов сложных электромеханических систем полиномиальным методом / Л.В. Акимов, Д.Г. Литвиненко // Электротехнические и компьютерные системы. – 2004. – № 4(80). – С. 7-14.

2. Гуль, А.И. Параметрична оптимізація багатократно інтегруючих і електромеханічних систем з критерієм максимальної добротності та запасу стійкості: дис. д-ра техн. наук; 05.09.03/ Національний технічний ун-т «Харківський політехнічний ін-т» - Х., 2004.
3. Каменский, В.А. Синтез ограниченного стабилизирующего управления для n-кратного интегратора / В.А. Каменский // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 6. – С. 33-40.
4. Бобриков, С.А. Цифровой регулятор в системе управления с астатизмом второго порядка / С.А. Бобриков, Е.Д. Пичугин // Электротехнические и компьютерные системы. – 2013. – № 12(88). – С. 55-60.
5. Бобриков, С.А. Цифровая система управления непрерывным дозатором сыпучих материалов / С.А. Бобриков, Е.Д. Пичугин // Электротехнические и компьютерные системы. – 2014. – № 14(90). – С. 7-13.
6. Бобриков, С.А. Оптимальная настройка цифрового регулятора для системы правления с астатизмом второго порядка / С.А. Бобриков, Е.Д. Пичугин, О.Б. Бабийчук // Электротехнические и компьютерные системы. – 2015. – № 17(93). – С. 80-86.
7. Бобриков, С.А. Преобразование непрерывной передаточной функции управляющего устройства в дискретную / С.А. Бобриков, Е.Д. Пичугин // Электротехнические и компьютерные системы. – 2013. – № 10(86). – С. 68-72.
8. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1972. – 719 с.
9. Carroll, C. Discrete Compensation of Control Systems with Integrated Circuits / C. Carroll, R. White // IEEE Transactions. – 1967. – No. 5.
10. Фишман, Л.З. Условия сохранения характера границы области устойчивости непрерывной системы при замене её дискретной / Л.З. Фишман // Автоматика и телемеханика. 1991. – № 4. – С. 186-189.

### СИНТЕЗ І МОДЕЛЮВАННЯ ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА У СТЕЖАЧІЙ СИСТЕМІ З АСТАТИЗМОМ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

С.О. Бобриков, Е.Д. Пичугин, Н.Н. Дикий

Одеський національний політехнічний університет  
просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: bobrikov1932@mail.ru

Проведений синтез цифрового регулятора для стежачої системи з астатизмом третього порядку. Виконано моделювання системи в пакеті MATLAB - Simulink. Розроблений метод розрахунку цифрового регулятора за заданими параметрами незмінної частини стежачої системи і необхідними показниками якості. Показниками вибрано максимальне перерегулювання в перехідній характеристиці і максимальне перевантаження приводу по моменту в режимі розгону. Використовується перетворення безперервної передатної функції регулятора в дискретну. Наведений приклад розрахунку і результати моделювання.

**Ключові слова:** система управління, астатизм, цифровий регулятор, передатні функції безперервна і дискретна, моделювання, перехідна характеристика, перевантаження приводу по моменту, показники якості управління

### SYNTHESIS AND DESIGN OF DIGITAL REGULATOR IN SERVOSYSTEM WITH ASTATISM OF THE THIRD ORDER

S.A. Bobrikov, E.D. Pichugin, N.N. Dikiy

Odesa National Polytechnic University,  
1 Shevchenko Str., Odesa, 65044, Ukraine; e-mail: bobrikov1932@mail.ru

The synthesis of digital regulator is conducted for a servosystem with the astatism of the third order. The design of the system is executed in the package of MATLAB - Simulink. The method of calculation of digital regulator is worked out on preset parameter of unalterable part of servosystem and required indexes of quality. Indexes are choose a maximal overcorrection in transitional description and maximal overload of drive on a moment in the mode of acceleration. Transformation of continuous transmission function of regulator is used to discrete. An example of calculation and design results are made.

**Keywords:** control system, astatism, digital regulator, transmission functions continuous and discrete, design, transitional description, overload of drive on a moment, indexes of management quality