УДК 004.61

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 7 (2017), No. 1-2, pp. 74-80

МОДЕЛІ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЮЮЧИМ АРГУМЕНТОМ

С.А. Положаєнко

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: sanp277@gmail.com

Запропоновано математичні моделі систем з розподіленими параметрами, які характеризуються запізнюваннями по аргументу за часом. Моделі отримано для систем k-го порядку, що дозволяє застосовувати їх у більшості прикладних задач математичної фізики. Виконано якісне дослідження запропонованих моделей, в результаті чого строго доведено існування та єдиність розв'язків відповідних диференційних рівнянь у частинних похідних, які утворюють ці моделі.

Ключові слова: математична модель, аргумент із запізнюванням, основна початкова задача, метод кроків, метод стислих відображень, аналітичні розв'язки диференційних рівнянь

Вступ

Стрімкий розвиток спеціальних розділів теорії автоматичного управління зумовив останнім часом підвищений інтерес до вивчення диференційних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП), що мають аргумент t із запізненням, і які розглядаються в якості математичного опису (математичних моделей) систем з розподіленими параметрами (РП-систем), що характеризуються властивостями післядії.

У найбільш загальному випадку ДРЧП у «нормальній» формі з частинними похідними k-го порядку та із запізнюванням по одному виділеному аргументу t має вигляд

$$\frac{\partial^k \Phi(t,x)}{\partial t^k} = F\left[t, x, \Phi(t,x), \Phi(t-\tau,x), \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{k-1}\Phi(t,x)}{\partial t^{k-1}}, \ldots, \frac{\partial \Phi(t-\tau,x)}{\partial t}, \ldots, \right.$$
$$\left. \frac{\partial^{k-1}\Phi(t-\tau,x)}{\partial t^{k-1}}, \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{k-1}\Phi(t,x)}{\partial x^{k-1}}, \frac{\partial \Phi(t-\tau,x)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{k-1}\Phi(t-\tau,x)}{\partial x^{k-1}}\right], \ (t-\tau>0). \quad (1)$$

При $\tau = 0$ рівняння (1) переходить у звичайне ДРЧП (без запізнювання).

Рівняння першого та другого порядків із запізнюванням по одному аргументу може бути представлено у вигляді

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} = F\left[t, x, \Phi(t,x), \Phi(t-\tau,x), \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial^{k-1}\Phi(t,x)}{\partial t^{k-1}}, \frac{\partial \Phi(t-\tau,x)}{\partial x}\right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(t,x)}{\partial t^2} = F\left[t, x, \Phi(t,x), \Phi(t-\tau,x), \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial \Phi(t-\tau,x)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x}, \right.$$
$$\left. \frac{\partial \Phi(t-\tau,x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 \Phi(t,x)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Phi(t,x)}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 \Phi(t-\tau,x)}{\partial x^2}\right]. \quad (3)$$

При цьому вважається, що рівняння визначено в обмеженій зв'язаній області Ω n-мірного евклідова простору змінних $x=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ при $t_0 \le t \le t_f$; $\Phi=\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_m\}$ – шукана вектор-функція; F – задані функції своїх аргументів, які можуть характеризувати собою просторово визначений диференційний оператор; $\tau = \mathrm{const} > 0$ – запізнювання по аргументу t.

Типовою лінійною формою рівняння (2) є система

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} = L_0\Phi(t,x) + L_1\Phi(t-\tau,x) + \Phi(t,x), \tag{4}$$

де L_0 та L_1 – лінійні просторово визначені диференційні оператори.

В задачах математичної фізики запізнювання з'являються лише за часом (хоча в інших задачах не виключена можливість наявності запізнювання і по просторових змінних); тоді змінній t слід приписати зміст часової координати.

Такими диференційними рівняннями описуються процеси в замкнутих регульованих системах з розподіленими параметрами та зі зворотними зв'язками [1-3]. Поява запізнювання за часом τ зумовлено кінцевою швидкістю розповсюдження сигналів в каналах зворотних зв'язків та інерційних регуляторів.

Аналогічні рівняння можна отримати у випадку, коли Φ та її похідні входять у диференційне рівняння при більшій кількості запізнювань, ніж у наведених рівняннях [4].

В фундаментальних роботах [5-8] отримано певні теореми, що встановлюють існування та єдиність розв'язку задачі Коші, причому в [5] – для випадку, коли диференціально-різницеве рівняння у частинних похідних може бути зведено до рівняння у частинних похідних без запізнювання.

В теорії ДРЧП із запізнюваннями слід розглядати як основну початкову задачу (задачу Коші), так різноманітні крайові задачі.

Мета роботи

Мета роботи полягає у дослідженні окремих питань загальної теорії (теорем існування, неперервної залежності від параметру та початкової точки тощо) для основної початкової задачі (ОПЗ) для розподілених систем, які характеризуються аргументом із запізнюванням.

Основна частина

Основна початкова задача, наприклад, для рівнянь (2), (3) полягає у визначенні функції $\Phi(t,z)$, що має неперервні диференціали, задовольняє відповідно рівнянням (2), (3) при $t > t_0$, та умові $\Phi(t,z)=\varphi(t,z)$ при $t-\tau \le t \le t_0$ у випадку рівняння (2) та додатково умові $\dfrac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} = \psi(t,x)$ при $t-\tau \le t \le t_0$ у випадку рівняння (3), де $\varphi(t,z)$ та $\psi(t,x)$ – задані безперервні функції, що мають назву початкових. Відрізок часової осі $[t_0-\tau, t_0]$, на якому задано початкові функції, має назву початкової множини та позначається E_t. При цьому $\Phi(t,z)$ повинно переходити в $\varphi(t,z)$ неперервно.

Існування та єдиність розв'язку. Доведення існування та єдиності розв'язку ОПЗ для рівнянь у частинних похідних із запізнюваннями можна провести для певних форм рівнянь різноманітними прийомами та методами, одні з яких полягають у безпосередній побудові розв’язків за допомогою інтеграції, інші – засновано на представленні розв’язків рядами, на дослідженні топологічної структури розв’язків диференційних рівнянь та формулюванні і доведенні відповідних теорем.

Метод кроків. Найбільш природним методом розв’язування цього питання є метод послідовних наближень – метод кроків, який полягає в тому, що ОПЗ на кожному кроці зводиться до розв’язування задачі Коші для частинних похідних без відхилення аргументу [9]. Наприклад, для рівняння (2) на першому кроці $(t_0, t_0+\tau)$ маємо

$$\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t} = F\left[t,\Phi(t,x),\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x},\varphi(t-\tau,x),\frac{\partial\varphi(t-\tau,x)}{\partial x}\right]. \tag{5}$$

Існування та єдиність розв’язку рівняння (5) при $t_0 < t \le t_0+\tau$ безпосередньо випливає з теорем, які подано в [10] для нелінійних рівнянь без запізнювання.

Розглядаючи розв’язок на інтервалі $[t_0, t_0+\tau]$ як початкове значення рівняння (2), визначеного для $t \ge t_0+\tau$, можна поширити розв’язок на інтервал $[t_0+\tau, t_0+2\tau]$, використовуючи ті ж самі теореми. Продовжуючи цей процес, можна отримати розв’язки для інтервалів $[t_0+2\tau, t_0+3\tau]$, $[t_0+3\tau, t_0+4\tau]$ тощо.

Цей метод, таким чином, дає можливість побудувати розв’язок $\Phi(t,z)$ рівняння (2) та більш загального рівняння (1) на деякому кінцевому відрізку часової осі та одночасно доводить:

– існування розв’язку в околі точки $(t_0,\varphi(t_0,x),x)$, якщо функції φ та F неперервні в області зміни своїх аргументів t та x, яка розглядається (а функція φ ще така, що диференціюється по x у випадку рівняння (2) та $k-1$ раз диференціюється по t та x у випадку рівняння (1));

– його єдиність, якщо функція F задовольняє одній з умов, що забезпечує єдиність розв’язку звичайного ДРЧП без відхилень аргументу, наприклад, умові Гельдера-Ліпшиця по всіх аргументах, починаючи з третього, або більш жорсткій умові – умові аналітичності.

Теорема існування та єдиності розв’язків аналітичних диференційних рівнянь. Будемо вважати, що праві частини диференційного рівняння виду

$$\frac{\partial\Phi_i(t,x)}{\partial t} = F_i\left[t,x,\Phi_1,\dots,\Phi_m,\Phi_1(t-\tau,x),\dots,\Phi_m(t-\tau,x),\dots,\frac{\partial\Phi_m(t-\tau,x)}{\partial x}\right], \tag{6}$$

і початкові функції $\Phi_i(t,z)=\varphi_i(t,z)$ на E_{t_i} ($i=1,2,\dots,m$) є регулярними функціями своїх аргументів в деякому околі точки $t=t_0\in E_{t_i}$, $x=x_0\in\Omega$. Аналітичність рівнянь та початкових функцій означає, що функції F_i та φ_i можуть бути задані степеневими рядами

$$\varphi_i(t,z)=\sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{\infty} a^i_{\nu_1,\nu_2}(\tau)(t-t_0)^{\nu_1}(x-x_0)^{\nu_2},$$

$$F_i(t,x,\Phi_1,\dots)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{m+2}=0}^{\infty} b^i_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{m+2}}(\tau)(t-t_0)^{\nu_1}(x-x_0)^{\nu_2}\times \tag{7}$$

$$\times\prod_{i=1}^{m}(\Phi_i-\Phi_{i0})^{\nu_i+2}\cdot(\overline{\Phi}_i-\overline{\Phi}_{i0})^{\nu_i+2}\cdot(q_i-q_{i0})^{\nu_i+2}\cdot(\overline{q}_i-\overline{q}_{i0})^{\nu_i+2},$$

що збігаються у відповідних областях. Тут позначено:

$$\Phi_{i0} = \Phi_i(t_0, x_0),\ \overline{\Phi}_i = \Phi_i(t-\tau, x),\ \overline{\Phi}_{i0} = \Phi_i(t_0-\tau, x_0),$$

$$q_i = \frac{\partial \Phi_i(t,x)}{\partial x},\ q_{i0} = \frac{\partial \Phi_i(t_0,x_0)}{\partial x},\ \overline{q}_i = \frac{\partial \Phi_i(t-\tau,x)}{\partial x},\ q_{i0} = \frac{\partial \Phi_i(t_0-\tau,x_0)}{\partial x}.$$

При цьому

$$a^i_{\nu_1,\nu_2} = \frac{1}{\nu_1!\nu_2!}\left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2}\varphi_i}{\partial t^{\nu_1}\partial x^{\nu_2}}\right)_{\substack{t=t_0,\\ x=x_0}},\ b^i_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{m+2}} = \frac{1}{\nu_1!\nu_2!\dots\nu_{m+2}!}\left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_{m+2}}F_i}{\partial t^{\nu_1}\partial x^{\nu_2}\dots\partial q_m^{\nu_{m+2}}}\right)_{\substack{t=t_0,\\ x=x_0,\\ \dots\\ \overline{q}_m=\overline{q}_{m0}}}.$$

Стверджується, що задача Коші для такої системи із запізнюванням має єдиний розв'язок у класі аналітичних функцій, який тому може бути представлено степеневим рядом

$$\Phi_i(t,x) = \sum_{\substack{i=0\\ k=0}}^{\infty} C^i_{ik}(t-t_0)^i(x-x_0)^k. \tag{8}$$

Це твердження є аналогом теореми Ковалевської для рівнянь виду (6). Доведення цього положення може бути виконано за допомогою методу «мажорант» так само, як це виконано для звичайних ДРЧП [10]. Слід лише зазначити наступне. При доведенні теореми Ковалевської в випадку, який розглядається, для спрощення бажано будувати розкладення розв'язків, функцій F_i і початкових функцій φ_i в степеневі ряди в околі t_0, тобто в околі правої границі області E_{t_i} та $x = x_0 \in \Omega$. Більш того, без втрати загальності, можна будувати розкладання в околі точки $t_0 = 0 \in E_{t_i}$, $x = x_0 \in \Omega$ за припущення, що початкові функції на E_{t_i} задовольняють умові $\varphi_i(t,x) \equiv 0$. Якщо б це було не так, то можна було б увести різниці $t - t_0$, $x - x_0$ в якості нових незалежних змінних, а різниці $\Phi_i - \varphi_i$ – в якості нових невідомих функцій V_i, для яких всі початкові значення тотожно дорівнюють нулю, в той час, як загальний вигляд рівнянь залишається незмінним, тобто розглядати основну початкову задачу з нульовими початковими умовами.

Принцип стислих відображень. Як вже зазначалося, метод кроків дає розв'язок задачі у досить широкому класі неперервних функцій, одначе він (метод) не може бути застосований у випадку дуже малого τ, тобто у випадку, коли початкова множина E_{t_i} збігається до однієї точки.

Аналог теореми Ковалевської стверджує існування аналітичного розв'язку задачі Коші для аналітичних рівнянь. Виникає питання, чи існують в цьому випадку інші розв'язки? Дійсно, для того, щоб система функцій $\Phi_1,\dots,\Phi_m$ була розв'язком задачі, немає потреби вимагати, щоб вони мали похідні тих порядків, які входять у рівняння (6), які розглядаються.

У загальному випадку, а також для випадків, коли метод кроків не можна застосовувати, а необхідно визначити існування та єдиність розв'язку у класі неаналітичних функцій, відповідь можуть дати теореми, засновані на розгляді топологічної структури диференційних рівнянь, зокрема принципу стислих відображень.

Розглянемо, наприклад, задачу Коші для рівнянь гіперболічного типу другого порядку із запізнюванням

$$\frac{\partial^2\Phi(t,x)}{\partial t\partial x}=f\left[t,x,\Phi(t,x),\Phi(t-\tau,x),\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x},\frac{\partial\Phi(t-\tau,x)}{\partial x}\right], \tag{9}$$

та початковою умовою $\Phi(t,x)\big|_{t\in E_{t_i}}=\varphi(t,x)$, де $\varphi(t,x)$ – неперервна по t і x та така, що один раз диференціюється по x, функція.

Тоді справедлива наступна *теорема*: якщо в рівнянні (9) функція f неперервна в околі точки $\left(t_0,x_0,\varphi(t_0,x_0),\varphi(t_0-\tau,x_0),\frac{\partial\varphi(t_0,x_0)}{\partial x},\frac{\partial(t_0-\tau,x_0)}{\partial x}\right)$ за сукупністю всіх аргументів, а по аргументах, починаючи з третього, задовольняє умовам Ліпшиця рівномірно відносно t і x, то існує єдиний неперервний по t і x, та такий, що один раз диференціюється по x розв'язок рівняння (9), і такий, що задовольняє на E_{t_i} початковій умові.

Доведення теореми. Виконаємо заміну рівняння (9) на еквівалентне інтегральне рівняння (в силу зауваження початкові умови вважаються нульовими $\varphi\equiv 0$)

$$\Phi(t,x)=\iint_D f\left[t,x,\Phi(t,x),\Phi(t-\tau,x),\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x},\frac{\partial\Phi(t-\tau,x)}{\partial x}\right]dx\,dt, \tag{10}$$

де область D – область визначення функції f на площині $x0t$, яка містить в собі значення $t_0\le t\le t_0+h$, $x_0\le x\le x_0+\sigma$ та графічно являє собою криволінійний трикутник. Теорему буде доведено, якщо буде показано, що оператор A

$$A[\Phi(t,x)]=\iint_D f\left[t,x,\Phi(t,x),\Phi(t-\tau,x),\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x},\frac{\partial\Phi(t-\tau,x)}{\partial x}\right]dx\,dt,$$

завданий у повному метричному просторі M:

– переводить елементи простору M в елементи того ж самого простору;

– $\rho[A(y),A(z)]\le\alpha\rho(y,z)$, де y та z – будь-які точки простору M; $0<\alpha<1$ і не залежить від вибору точок y та z, а $\rho(y,z)$ – відстань між точками y та z у просторі M.

Зауважимо, що виконання цих двох умов гарантує існування єдиної нерухомої при дії оператора A точки Φ^* простору M. Цю точку може бути віднайдено методом послідовних наближень, тобто $\Phi^*=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n^*$ де $\Phi_n^*=A(\Phi_{n-1}^*)$ $(n=1,2,...)$. При цьому точка Φ_0^* – обирається довільно в просторі M.

Таким чином, розглянемо простір M, елементами якого є функції $\Phi(t,x)$, неперервні по t і x та такі, що один раз диференціюються по x при $t_0\le t\le t_0+h$, $x_0\le x\le x_0+\sigma$, причому на E_{t_0} всі ці функції дорівнюють початковим функціям. Відстань задамо формулою

$$\rho[y(t,x),z(t,x)]=\sup_D|y(t,x)-z(t,x)|+\sup_D\left|\frac{\partial y(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}\right|. \tag{11}$$

При такому визначенні відстані M буде повним метричним простором, збіжність в якому означає рівномірну в D збіжність послідовності функцій Φ_n^* та послідовності їх частинних похідних $\frac{\partial \Phi_n^*}{\partial x}$ до граничної функції Φ^* та її похідної $\frac{\partial \Phi^*}{\partial x}$.

Очевидно, при достатньо малих h та σ перша умова принципу стислих відображень буде виконаною: $A[\Phi(t,x)]$ неперервна, якщо $\Phi(t,x)$, а також визначена при $t_0 \le t \le t_0 + h_1$, $x_0 \le x \le x_0 + \sigma_1$ за достатньо малих h_1 та σ_1.

Перевіримо виконання другої умови принципу стислих відображень. В силу виконання умов Ліпшиця з постійною Ліпшиця L маємо:

$$\sup_D \left| A[y(t,x)] - A[z(t,x)] \right| = \sup_D \left| \iint_D \left\{ f\left[t, x, y(t,x), y(t-\tau,x), \frac{\partial y(t,x)}{\partial x}, \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \frac{\partial y(t-\tau,x)}{\partial x}\right] - f\left[t, x, z(t,x), z(t-\tau,x), \frac{\partial z(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial z(t-\tau,x)}{\partial x}\right]\right\} dx\,dt \right| \le$$
$$\le L \sup_D \left| \iint_D \left\{ |y(t,x) - z(t,x)| + |y(t-\tau,x) - z(t-\tau,x)| + \left| \frac{\partial y(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial z(t,x)}{\partial x} \right| + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left| \frac{\partial y(t-\tau,x)}{\partial x} - \frac{\partial z(t-\tau,x)}{\partial x} \right| \right\} dx\,dt \right| \le$$
$$\le 2Lh\sigma \left\{ \sup_D |y(t,x) - z(t,x)| + \sup_D \left| \frac{\partial y(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial z(t,x)}{\partial x} \right| \right\} = 2Lh\sigma\rho[y(t,x), z(t,x)].$$

Тоді при $h\sigma + h \le \frac{\alpha}{2L}$, де $0 < \alpha < 1$, другу умову принципу стислих відображень буде виконано. Таким чином, при $h \le \min\left\{\frac{\alpha}{4L}, h_1\right\}$, $\sigma \le \min\{1, \sigma_1\}$ можна стверджувати, що існує єдина нерухома точка оператора A, тобто єдиний неперервний і такий, що один раз диференціюється по x розв'язок основної початкової задачі для рівняння (10).

Висновки

У випадку ОПЗ для рівняння більш загального виду, ніж (10), доведення за допомогою принципу стислих відображень конструктивно нічим не відрізняється від наведеного вище доведення, якщо належним чином задати відстань в метричному просторі та увести додаткові обмеження такі, як гіперболічний тип рівняння. Розглянута теорема має місце і у випадках змінного запізнювання $\tau = \tau(t,x)$, якщо накласти додаткову умову неперервності по t та x функції $\tau(t,x)$. Доведення цього твердження можна здійснити за допомогою принципу стислих відображень в просторі з тою ж самою метрикою.

Список литературы

1. Бутковский, А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский . — М.: Наука, 1975. — 368 с.
2. Мацевитый, Ю.М. Моделирование нелинейных процессов в распределенных системах / Ю.М. Мацевитый, В.Е. Прокофьев. — К.: Наукова думка, 1985. — 303 с.

3. Бессекерский, В.А. Теория систем автоматического регулирования / А.В. Бессекерский, Е.П. Попов. — М.:1975. — 768 с.
4. Верлань, А.Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов / А.Ф. Верлань, С.А. Положаенко, Н.Г. Сербов. — К.: Наукова думка, 2011. — 416 с.
5. Гуль, И.М. Задача коши для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных с функциональными аргументами / И.М. Гуль // УМН. – 1985. — №2. — С. 153 — 156.
6. Петухов, Р.В. О задаче Коши для дифференциальных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом в гильбертовом пространстве / В.Р. Петухов // Изв. ВУЗов. — Математика. – 1990. — Вып. 6. — С.195-202.
7. Wang, P.R.C. Stability of distributed-parameter processes witch time-delays / P.K.C. Wang, M.L. Bandy // Electron. and Control. – 2003. – Vol. 15, №4. — P. 343-362.
8. Азбелев, Н.В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
9. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1989. — 831 с.
10. Петровский, И.Г. Лекции по уравнениям в частных производных / И.Г. Петровский. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.

МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

С. А. Положаенко

Одесский национальный политехнический университет,
просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: sanp277@gmail.com

Предложены математические модели систем с распределенными параметрами, которые характеризуются запаздывающим аргументом по времени. Модели получены для систем k -го порядка, что позволяет использовать их для большинства прикладных задач математической физики. Выполнено качественное исследование предложенных моделей, в результате чего строго доказано существование и единственность решений соответствующих дифференциальных уравнений, которые образуют данные модели.
Ключевые слова: математическая модель, запаздывающий аргумент, основная начальная задача, метод шагов, метод сжатых отображений, аналитические решения дифференциальных уравнений

MODELS OF DISTRIBUTED SYSTEMS WITH DELAYED ARGUMENT

S. A. Polozhaenko

Odesa National Polytechnic University,
1 Shevchenko Str., Odessa, 65044, Ukraine; e-mail: sanp277@gmail.com

Mathematical models of systems with distributed parameters that are characterized by a delayed time argument are proposed. The models are obtained for systems of the k -th order, which makes it possible to use them for the majority of applied problems of mathematical physics. A qualitative study of the proposed models is carried out, as a result of which the existence and uniqueness of the solutions of the corresponding differential equations that form the model data is rigorously proved.
Keywords: mathematical model, delayed argument, basic initial problem, step method, compressed mapping method, analytical solutions of differential equations