

Ковтонюк И.Б.¹, Шаблій Г.Ф.², Волосников С.А.³

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС
ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЫ**

¹ХУПС им. И. Кожедуба, ²ГП Укргідрографія, ³ГП ХКБМ им. А.А. Морозова

Существует большое количество задач, связанных с движением транспортных объектов – судов, колесных и гусеничных машин, летательных аппаратов – типа “подвижная платформа – силовая установка”, когда необходимо определить траекторию движения в определенных условиях внешней среды и управляющих воздействиях [1,2,3].

Такая задача формулируется следующим образом [3].

Рассмотрим подвижную платформу некоторой традиционной конструкции, допускающую управление ее положением при движении по плоской поверхности за счет целенаправленно формируемой силы f_1 , создаваемой движителем, и силы f_2 , создающей момент вращения M , разворачивающий платформу вокруг вертикальной оси (рис. 1).

Будем считать, что положение органа управления подачи топлива U_1 и положение штурвала U_2 пропорциональны f_1 и f_2 соответственно. Пусть сила ϑ_1 – сила сопротивления движению платформы, связанная с внешней средой, а ϑ_2 – сила сопротивления повороту.

На плоскости движение рассматривается в прямоугольной системе координат Oxy . В этой системе координат заданы координаты точки $O_1(x_{01}; y_{01})$. Пусть также рекомендована траектория движения, по которой платформа должна пройти через отметку в виде (рис. 1)

$$k_1x + k_2y = b. \tag{1}$$

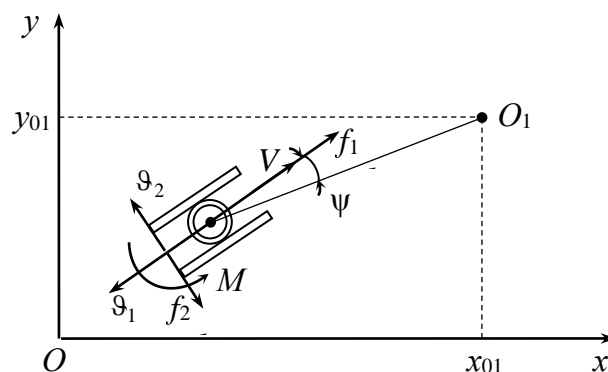


Рисунок 1 – Система координат и схема сил, действующих на платформу

Тогда система дифференциальных уравнений, описывающих движение подвижной платформы на плоскости xOy , представляется в виде

$$\frac{dx}{dt} = V_x = V \cos \psi ; \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y = V \sin \psi , \quad (3)$$

где V – скорость платформы, а ψ – курс платформы.

$$\frac{dV_x}{dt} = k_{11}u_1 - k_{12}V - k_{13}V^2 + b_{12}\vartheta_1 \sin \psi ; \quad (4)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = k_{21}Vu_2 + b_{21}\vartheta_2 \cos \psi ; \quad (5)$$

$$u_1 = (+1; 0) ; \quad u_2 = (+1; -1) , \quad (6)$$

где $u_1 = 1$ соответствует максимальной скорости движения (задний ход не рассматривается); $u_2 = 1$ – максимально правое положение штурвала; $u_2 = -1$ – максимально левое.

Система дифференциальных уравнений (2)–(6), описывающая движение подвижной платформы на плоскости, не может быть решена до тех пор, пока не будут определены коэффициенты в уравнениях (4) и (5) (k_{11} , k_{12} , k_{13} , k_{21} , b_{12} , b_{21} , ϑ_1 , ϑ_2), которые, в свою очередь, как правило, не числовые константы, а функции некоторых переменных, зависящих от времени. Определение этих коэффициентов представляется отдельной, весьма сложной задачей, требующей довольно большого объема экспериментальных исследований. Это обусловлено тем, что на различных средах (водная, грунт) будут наблюдаться различные условия движения, обусловленные сопротивлением движению, повороту, различными для штурвала и манипуляторов законами управляющих воздействий, и, наконец, приспособляемостью двигателя или силовой установки для наземных платформ. Все это в конечном итоге приводит к тому, что уравнения, составляющие нестационарную систему (2)–(6), становятся еще и нелинейными по времени (t). Это существенно усложняет решение такой системы. В конечном итоге, если неизвестные коэффициенты и будут определены, то такая система может быть решена численными методами с обязательным определением условия сходимости решения, то есть, определения обеспечивающего его шага по времени. Здесь следует особо подчеркнуть тот факт, что, получая каждый раз частное решение, полученное численным методом, трудно выявить закономерности влияния различных факторов на моделируемый процесс. Чтобы выявить такое влияние хотя бы по одному фактору, необходимо, зафиксировав значения остальных переменных, варьировать значением этого фактора и, таким образом, “набирать” статистику. После этого, проанализировав ее, переходить к следующему фактору и так далее, пока все они не будут перебраны. Однако, эта весьма трудоемкая процедура не гарантирует выявление достоверных или близких к ним закономерностей влияния различных

факторов, поскольку, во-первых, требует перебора вариантов условий, во-вторых, в виду пространственного и временного шагов, может пропускать характерные точки функции, описывающей искомую закономерность.

Этих недостатков лишен аналитический метод решения дифференциальных уравнений. Основным его преимуществом является то, что полученное в аналитическом виде решение позволяет проводить параметрические исследования. Кроме этого, аналитическое решение не требует доказательства его сходимости и устойчивости. Тем не менее, основным недостатком аналитического метода решения является то, что не все дифференциальные уравнения могут быть решены этим методом. Так, далеко не каждое дифференциальное уравнение даже первой степени можно свести к виду, допускающему разделение переменных. Задача еще более усложняется, если степень уравнения достаточно высока.

Поэтому первым шагом к получению аналитического решения является корректная постановка задачи. Для этого исходную постановку задачи (2)–(6) сведем к следующей (рис. 1).

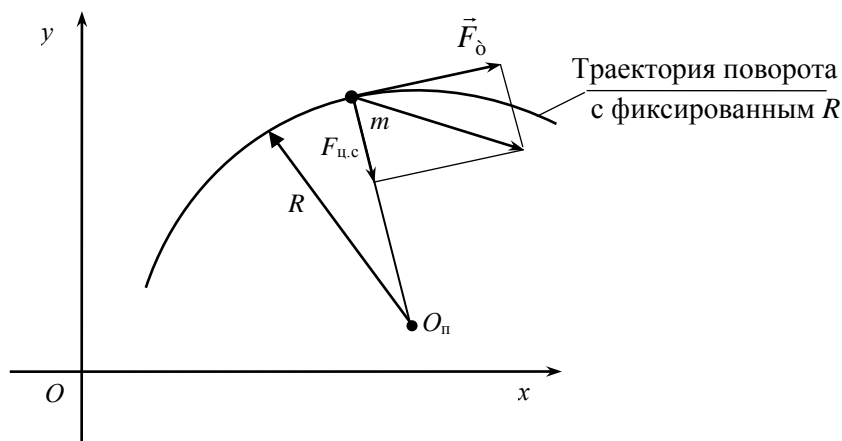


Рисунок 2

Тело массой m движется со скоростью V под воздействием силы тяги F_T и совокупности сил, вызывающих радиальное движение (управляющее воздействие, ветер, волнение, течение, сопротивление повороту, центробежная сила), которые сведены к фиктивной центростремительной силе

$$F_{ц.с} = m \cdot a_{ц.с},$$

где $a_{ц.с}$ – центростремительное ускорение. Здесь следует подчеркнуть, что $a_{ц.с}$ может быть как положительной по знаку, так и отрицательной. Положительное значение $a_{ц.с}$ соответствует направлению вектора $\vec{F}_{ц.с}$ к центру поворота – точке $O_п$ (рис. 2) и движению поворота. Отрицательное значение $a_{ц.с}$ соответствует направлению вектора $\vec{F}_{ц.с}$ от центра к периферии и движению платформы в состоянии “занос”, когда радиус движения превосходит радиус поворота R под воздействием центробежной силы, превышающей силы сопротивления. Эти характеристики для каждого типа (серии) подвижных платформ определяются экспериментально, система дифференциальных уравнений, которую предстоит решить, имеет вид:

$$m \frac{d}{dt} V_x(t) = -\alpha \cdot V_x(t); \quad (7)$$

$$m \frac{d}{dt} V_y(t) = -m a_{ц.с} - \alpha \cdot V_y(t), \quad (8)$$

где m – масса платформы, V_x, V_y – составляющие проекции скорости на оси Ox и Oy соответственно, α – коэффициент пропорциональности.

Запишем уравнение (7) в виде

$$m \frac{d}{dt} V_x(t) + \alpha V_x(t) = 0 \quad (9)$$

и произведем преобразование Лапласа, в результате чего получим [4]

$$m(S \cdot L(V_x(t), S) - V_x(0)) + \alpha L(V_x(t), S). \quad (10)$$

В этих уравнениях символом L обозначено преобразование Лапласа (наиболее распространенное обозначение, иногда обозначают Lap или $Laplas$).

Произведем замену: $L(V_x(t), S)$ на $V1(S)$ – это Лаплас-образ искомой функции, и $V_x(0)$ на $V0_x$ – проекция начальной скорости на горизонтальную ось.

В результате решения алгебраического уравнения

$$m(S \cdot V1(S) - V0_x) + \alpha V1(S) = 0 \quad (11)$$

находим Лаплас-образ искомой функции

$$m \frac{V0_x}{mS + \alpha}. \quad (12)$$

В результате обратного преобразования Лапласа находим функцию – оригинал

$$V0_x \cdot e^{(-t) \frac{\alpha}{m}}. \quad (13)$$

Таким образом, составляющая скорости на ось Ox как функция времени с учетом функции – оригинала (13) запишется в виде

$$V_x(t) = V0_x \cdot \exp(-\alpha \frac{t}{m}). \quad (14)$$

Аналогичным образом проводятся преобразования и для второго уравнения системы (8), которое перепишем в виде

$$m \frac{d}{dt} V_y(t) + \alpha V_y(t) + m \cdot a_{ц.с} = 0. \quad (15)$$

После преобразования Лапласа и замены $L(V_y(t), S)$ на $V_2(S)$ – Лаплас-образ искомой функции и $V_y(0)$ на $V0_y$ – проекция начальной скорости на ось Oy , получим алгебраическое уравнение

$$m(S \cdot V_2 - V0_y) + \alpha V_2 + m \frac{a_{ц.с}}{S} = 0. \quad (16)$$

В результате решения алгебраического уравнения (16) находим Лаплас-образ искомой функции:

$$m \frac{V0_y \cdot S - a_{ц.с}}{S(mS + \alpha)}. \quad (17)$$

После обратного преобразования Лапласа находим функцию-оригинал в виде:

$$m \left(\frac{-1}{\alpha} a_{ц.с} + \frac{e^{\frac{(-t)\alpha}{m}}}{m} V0_y + \frac{1}{\alpha} e^{\frac{(-t)\alpha}{m}} a_{ц.с} \right). \quad (18)$$

Выражение (18) определяет составляющую скорости на ось Oy как функцию времени в виде

$$V_y(t) = m \left(\frac{-1}{\alpha} a_{ц.с} + \frac{V0_y}{m} \exp\left(-\alpha \frac{t}{m}\right) + \frac{a_{ц.с}}{\alpha} \exp\left(-\alpha \frac{t}{m}\right) \right). \quad (19)$$

Полученные выражения для составляющих скорости на оси координат как функции времени (14) и (19) позволяют определить и зависимости координат от времени на основе известных выражений

$$x(t) = \int_0^t V_x(t) dt, \quad (20)$$

$$y(t) = \int_0^t V_y(t) dt. \quad (21)$$

После интегрирования этих выражений с соответствующей подстановкой вместо $V_x(t)$ и $V_y(t)$ функций, определяемых выражениями (14) и (19), получим аналитические выражения горизонтальной и вертикальной координат от времени

$$y(t) = \frac{-1}{\alpha} m \cdot e^{-\frac{t}{m}} \cdot V_{0x} + \frac{1}{\alpha} m \cdot V_{0x}; \quad (22)$$

$$y(t) = -m \frac{a_{ц.с} \cdot t \cdot \alpha \cdot e^{\frac{t}{m}} + \alpha V_{0y} + m \cdot a_{ц.с} \cdot e^{-\frac{t}{m}}}{\alpha^2} + \frac{\alpha V_{0y} + m \cdot a_{ц.с}}{\alpha^2} m. \quad (23)$$

Таким образом, выражения (14) и (19) определяют составляющие скорости движущейся платформы, а (22) и (23) – координаты ее центра масс как функции времени, что позволяет определить (построить) траекторию движения.

В заключение решения модельной задачи отметим, что хотя исходная постановка задачи формулировалась как система уравнений, решение осуществлялось последовательно для каждого из двух уравнений. Такая постановка и последующее решение возможны в тех случаях, когда проекции на координатные оси сил, действующих на тело, зависят только от проекций соответствующих скоростей, что не всегда удается обусловить.

Несмотря на то, что аналитические решения математических задач не требуют доказательств, полученное решение должно быть физическим, то есть не противоречить физическим представлениям о процессе, который описывается. Для этого решается тестовая задача, такая, для которой решение известно при определенных заданных условиях. Поэтому прежде чем перейти к исследованию полученных решений (14), (19) и (22), (23) решается тестовая задача.

В качестве тестовой задачи рассмотрим случай, когда $a_{ц.с} = 0$, $\alpha = 1$. Такие условия соответствуют отсутствию управляющих воздействий, вызывающих поворот платформы. Это означает, что нет факторов, приводящих к искривлению траектории, то есть платформа движется прямолинейно. Подстановка этих условий в выражения для координат от времени (22) и (23) дает следующее:

$$x(t) = -m e^{-\frac{t}{m}} V_{0x} + m V_{0x} = m V_{0x} - m e^{-\frac{t}{m}} V_{0x} = m V_{0x} \left(1 - e^{-\frac{t}{m}} \right); \quad (24)$$

$$y(t) = -m \frac{V_{0y}}{\alpha^2} e^{-\frac{t}{m}} + m \frac{\alpha V_{0y}}{\alpha^2} = m \frac{V_{0y}}{\alpha} - m \frac{\alpha V_{0y}}{\alpha^2} e^{-\frac{t}{m}} = m V_{0y} \left(1 - e^{-\frac{t}{m}} \right). \quad (25)$$

Как видно из (24) и (25) траекторией движения платформы для заданных условий является прямая линия.

Таким образом, на основе результатов тестовой задачи можно заключить, что модель отражает физические представления о процессе.

Литература

1. Ковтонюк И.Б. Потребное управление летательным аппаратом с учетом отклонения траектории полета от заданной / О.Б. Анипко, И.Б. Ковтонюк // Інтегровані

технології та енергозбереження. – Харків : Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”, 2009. – №3. – С. 58–63.

2. Шаблій Г.Ф. Обеспечение экологической безопасности от потенциально опасных судов с использованием системы мониторинга судоходства / Г.Ф. Шаблій, О.Б. Анипко // Інтегровані технології та енергозбереження. – Харків : Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”, 2015. – №1. – С. 92–95.

3. Зараковский Г.М. Закономерности функционирования эргатических систем / Г.М. Зараковский, В.В. Павлов. – М.: Радио и связь, 1986. – 232 с.

4. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров : пер. с англ. / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1978. – 832 с.

Bibliography (transliterated)

1. Kovtonyuk I.B. Potrebnoe upravlenie letatelnyim apparatom s uchetom otkloneniya traektorii poleta ot zadannoy. O.B. Anipko, I.B. Kovtonyuk. Integrovani tehnologiyi ta energozberezhennya. – Harkiv: Natsionalniy tehnicnyi universitet “Harkivskiy poitehnicnyi institut”, 2009. – #3. – P. 58–63.

2. Shabliy G.F. Obespechenie ekologicheskoy bezopasnosti ot potentsialno opasnyih sudov s ispolzovaniem sistemyi monitoringa sudohodstva. G.F. Shabliy, O.B. Anipko. Integrovani tehnologiyi ta energozberezhennya. – Harkiv : Natsionalniy tehnicnyi universitet “Harkivskiy politehnicnyi institut”, 2015. – #1. – P. 92–95.

3. Zarakovskiy G.M. Zakonomernosti funktsionirovaniya ergaticheskikh sistem / G.M. Zarakovskiy, V.V. Pavlov. – M.: Radio i svyaz, 1986. – 232 p.

4. Korn G. Spravochnik po matematike dlya nauchnyih rabotnikov i inzhenerov : per. s angl. / G. Korn, T. Korn. – M. : Nauka, 1978. – 832 p.

УДК 621.45.02.024:05.054

Ковтонюк І.Б., Шаблій Г.Ф., Волосников С.А.

**АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
РУХУ ЦЕНТРА МАС РУХОМОЇ ПЛАТФОРМИ**

Наведено аналітичне рішення задачі математичного моделювання руху центра мас рухомої платформи, яке може бути використане при визначенні траєкторії руху транспортних об'єктів типу “рухома платформа – силова установка”.

Kovtonyuk I.B., Shabliy G.F., Volosnykov S.A.

**ANALYTICAL SOLUTION OF MATHEMATICAL MODELING OF THE CENTER
OF MASS MOVING PLATFORM**

The analytical solution of mathematical modeling of the center of mass moving platform that can be used in determining the trajectory of transport objects such as "mobile platform – power plant."