
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 621.372.061:517.3

Н.Б. Лопух, Я.Д. П'янило

Числова модель фільтрації газу в пористих середовищах із використанням дробових похідних за часом

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ,
вул. Дж. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна*

Створено математичну нестационарну модель процесу фільтрації газу в підземному сховищі (ПСТ), яке задається пластом пористого неоднорідного середовища. Для побудови числового розв'язку крайових завдань математичної моделі руху газу в ПСТ розроблено алгоритм, взаємопов'язаними частинами якого є дискретизація за часом ділянки завдання, триангуляція просторової ділянки та ітераційна схема, що діє на кожному часовому підінтервалі. Побудовано модифікований метод скінченних елементів із використанням схеми Грюнвальда-Летнікова для дробових похідних за часом. Розглянуто дробові похідні Капутто та Ріммана-Ліувіля. Проведено числовий аналіз із використанням експериментальних вхідних даних. Результатами експерименту підтверджено характеристична зміна тиску газу в пористому середовищі за наявності нетипової фільтрації. Встановлено, що порядок дробової похідної може служити параметром адаптації математичної моделі.

Ключові слова: математична модель, нестационарний рух газу, дробові похідні, лінеаризація, метод скінченних елементів.

N.B. Lopukh, Ya.D. Pyanylo

Numerical Model of Gas Filtration in the Porous Medium with Use of Fractional Derivatives in Time

*Centre of Mathematical Modelling of Institute of Applied Problems of
Mechanics and Mathematics named after Ya.S. Pidstryhach NASU,
15, Dudayeva Str., Lviv, 79005, Ukraine*

Non-stationary model of gas filtration process in underground storage which is set by the layer of the porous non-uniform media is created. The algorithm is developed for creation of the numerical solution of boundary problems of mathematical model of gas flow in UGS. The interconnected parts of the algorithm are discretization of task region, the triangulation of spatial region and the iterative procedure operating at each time step. The modified finite elements method with use of the Gryunvald-Letnikov scheme for fractional derivatives in time is constructed. Caputto and Rimman-Liouville fractional derivatives are considered. The numerical analysis with use of experimental entrance data is carried out. The results of experiment confirm physical meaning of gas pressure in the porous media in the presence of an atypical filtration. It is established that the order of a fractional derivative can serve as the parameter of adaptation of mathematical model.

Key words: mathematical model, nonstationary gas motion, fractional derivatives, linearization, finite element method.

Стаття постуила до редакції 20.11.2014; прийнята до друку 15.12.2014.

Вступ

Актуальною проблемою математичного моделювання є адекватність математичних моделей досліджуваним об'єктам. Відомо, що багато фізичних процесів описуються динамічними системами, в яких враховуються похідні дробових порядків [3, 6, 7]. Межі застосування диференціальних рівнянь дробового порядку значно ширші, ніж диференціальних рівнянь із цілочисловим диференціюванням, оскільки останні є їх частковим випадком.

Підвищений інтерес до диференціальних рівнянь дробового порядку [1, 2] обумовлено їх фізичною інтерпретацією. Показано, що перехід до похідної дробового порядку за часом дозволяє враховувати ефекти пам'яті системи. Це дозволяє отримувати принципово нові результати, більш глибоко осмислити відомі результати, створити нові адекватні кількісні моделі досліджуваних явищ.

Метою роботи є застосування дробового числення для дослідження процесів фільтрації вуглеводнів у складних пористих середовищах, зокрема, фільтрації газу в пластах підземних сховищ.

I. Створення математичної моделі фільтрації газу в пористому середовищі

Процес масопереносу в пористих середовищах розглядається на прикладі фільтрації газу та рідини, яка описується рівнянням із дробовою похідною за часовою змінною [1, 4]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial z} \right) = 2mh \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) + 2qp_{at} \right), \quad (1)$$

де $l=2$ для газу та $l=1$ для нестисливої рідини;

$\alpha \in (0, 2]$ – степінь дробової похідної;

$k = k(x, y, z, t)$, $m = m(x, y, z)$ та $h = h(x, y, z)$ – коефіцієнти проникності, пористості та товщина середовища відповідно;

μ – динамічна в'язкість речовини;

p_{at} – атмосферний тиск;

q – густина відбору;

χ – коефіцієнт стисливості газу для обчислення якого побудована значна кількість емпіричних формул на основі експериментальних даних, зокрема:

$$\chi = \frac{1}{1 + fp}, \quad (2)$$

де $f = (24 - 0.21t^\circ C) \cdot 10^{-4}$, а $p(x, y, z, t)$ вимірюється в атмосферах.

Відбори газу з пористих середовищ здійснюються через I свердловин, які розміщені в точках (x_i^0, y_i^0, z_i^0) на протязі деякого проміжку часу $t \in [t_{1i}, t_{2i}]$, ($i = \overline{1, I}$). Тому густина відбору визначається формулою:

$$q = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^I q_i(x, y, z, t) \delta(x - x_i^0) \delta(y - y_i^0) \delta(z - z_i^0) [\eta(t - t_{1i}) - (t - t_{2i})], \quad (3)$$

де q_i – відбір газу з i -ої свердловини в момент часу t ;

$\delta(x)$ – дельта-функція Дірака;

$\eta(t - t_{ji})$ – одинична функція Хевісайда.

II. Постановка завдання

Нехай $\Omega_3 \subset R^3$ – тривимірний ділянка (об'єм), яку займає пористе середовище. На Ω_3 задана множина точок (множина свердловин) з координатами $\{x_i, y_i, z_i\}$, $i = 1, \dots, n$ та значення тисків $p(x_i, y_i, z_i, t_0)$ у цих точках у момент часу t_0 . Розподіл тиску газу $p(x, y, z, t)$ в пласті описується нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних (1). Параметри цього рівняння залежать як від координат, так і від часу. Разом з тим, як показує практика, зміна параметрів є незначною. Тому, в певних просторово-часових межах їх можна вважати сталими. Для уточнення їх значень необхідно будувати обернені завдання математичної фізики.

З геологічних досліджень відомо, що газонафтоносні пласти мають незначну товщину (порядку до декількох десятків метрів) та значні розміри в горизонтальних напрямках (декілька десятків квадратних кілометрів) [4, 5]. У більшості випадків пласти є близькими до горизонтальних. У випадку газоносних пластів перепад тиску газу між верхньою і нижньою межею пласту є незначним. Тому процеси фільтрації газу в них можна вважати двовимірними.

Таким чином, нехтуючи градієнтом тиску за вертикальною координатою, рівняння (1) можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) = 2mh \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) + 4mhqp_{st}. \quad (4)$$

Рівняння (4) на межі Γ_2 ділянки Ω (рис. 1) задовольняє крайову умову Неймана:

$$\Phi p(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2, \quad (5)$$

де

$$\Phi p \stackrel{def}{=} \frac{k \cdot h}{\mu \cdot z} \frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{k \cdot h}{\mu \cdot z} \frac{\partial p}{\partial y} v_y; \quad v_x = \cos(v, x), \quad v_y = \cos(v, y), \quad (6)$$

та умову на Ω_* :

$$p(x_i, y_i, t^j) = p_{i,j}, \quad (x_i, y_i) \in \Omega_*; \quad (7)$$

Γ_2 – зовнішня межа ділянки Ω ; Ω_* – підмножина ділянки Ω , яка охоплює координати точок із відомими значеннями тисків p_i^j , j – часовий індекс; v – зовнішня нормаль до ділянки $\Omega \subset R^2$.

Оскільки поступлення газу через межу Γ_2 немає, то під час формулювання завдання математичної фізики за граничну умову доцільно брати рівність нулю градієнта тиску по нормалі до межі, тобто $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$. Якщо за точку відліку брати кінець нейтрального періоду, початкове значення тиску можна рахувати сталим, рівним виміряному значенню p_0 .

III. Числова реалізація

Числова модель базується на методі скінченних елементів у поєднанні з ітераційною процедурою, що діє на кожному часовому підінтервалі [1, 4, 5]. Двовимірна ділянка (рис. 1) розбивається на елементарні трикутні елементи. Розбиття ділянки проводиться таким чином, щоби координати відомих значень тиску (x_i, y_i) співпадали з координатами вершин трикутників, а (\bar{x}_i, \bar{y}_i) – вузли вершин трикутників, значення в яких необхідно знайти.

У загальному випадку диференціальне рівняння у частинних похідних другого порядку відносно невідомої функції p записується у вигляді:

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + gp = f, \quad x \in \Omega_2 \subset R^2, \quad (8)$$

де p – шукана функція, a_{ij}, g, f – неперервні функції у ділянці визначення.

На підставі варіаційного підходу [4, 5] з рівняння (8) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень функції:

$$\sum_j u_j (A\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad i, j = 1..n. \quad (9)$$

Далі можна застосувати два підходи:

- 1) оскільки вихідне рівняння є нелінійним, то в результаті варіаційного підходу отримати нелінійну алгебраїчну систему рівнянь, розв'язок якої знаходиться наближеними або числовими методами;
- 2) вихідне рівняння лінеаризується і отримується лінійна система алгебраїчних рівнянь.

Як показує практика, доцільно застосовувати другий підхід у сукупності з процедурою ітерації коефіцієнтів і шуканого розв'язку.

Лінеаризацію лівої частини рівняння (4) проведемо наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^2}{\partial \zeta} \right) \approx 2 \frac{kh}{\mu\chi} \tilde{p} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \cdot \tilde{p} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{p}), \quad (10)$$

де $\zeta \in \{x, y\}$ – просторова координата.

У правій частині рівняння (10) параметр χ винесемо з-під похідної як постійну величину:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) \approx \frac{1}{\chi} \frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}. \quad (11)$$

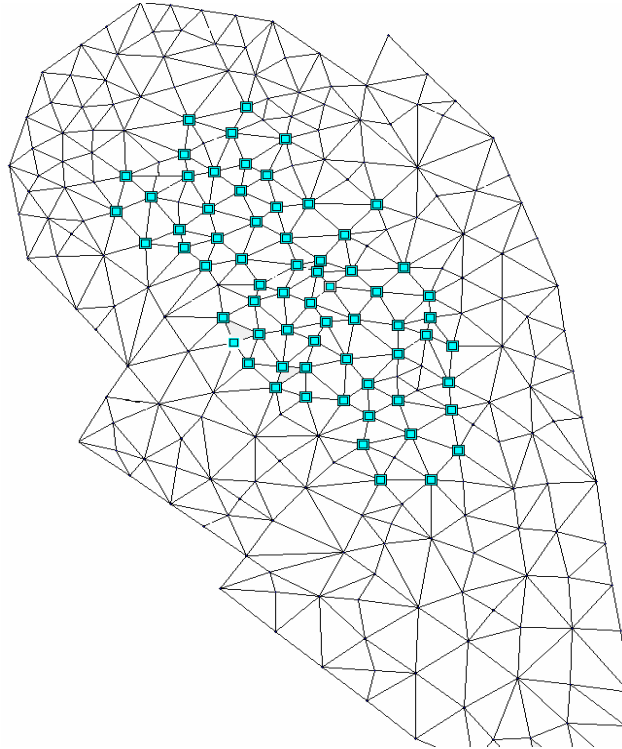


Рис. 1. Розбиття на трикутні елементи пористого середовища.

Оператор дробової похідної у термінах Капуго визначається так [1, 2]:

$${}^c D_\tau^\alpha = \frac{{}^c \partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \int_0^\tau \frac{\frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi^{m+1}} \varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{\alpha-m}} d\xi, \quad (12)$$

де $m = [\alpha]$, $[\cdot]$ – ціла частина дійсного числа. Дробову похідну $\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}$ розкладемо за схемою Грюнвальда-Летнікова:

$${}^{GL} D_\tau^\alpha p := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} p(\tau - j\Delta t). \quad (13)$$

Оператор Грюнвальда-Летнікова апроксимується на проміжку $[0, \tau]$ з підінтервальним кроком Δt як:

$${}^{GL} D_\tau^\alpha p(\tau) \approx \sum_{j=0}^{[\tau/\square t]} c_j^{(\alpha)} p(\tau - j\square t), \quad (14)$$

де $c_j^{(\alpha)}$ – коефіцієнти Грюнвальда-Летнікова, які визначаються як:

$$c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j}. \quad (15)$$

На базі рекурентного співвідношення [1]:

$$c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha}, \quad c_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) c_{j-1}^{(\alpha)} \quad (16)$$

можна обчислити коефіцієнти $c_j^{(\alpha)}$. Для $j=1$ маємо $c_1^{(\alpha)} = -\alpha(\Delta t)^{-\alpha}$.

Використавши лінеаризацію (10) та дискретизаційну схему для дробової похідної (13)-(15), приведемо рівняння (4) до форми:

$$\tilde{p} \frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tilde{p} \frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = mh \frac{1}{\chi} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} (p) + 2mhqp_{st} + F(\tilde{p}, k, h, \mu, \chi), \quad (17)$$

де

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} p(t) = \sum_{j=0}^f c_j^{(\alpha)} p(t_{f-j}) - \sum_{k=0}^m \frac{(t_f)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} p(t_k); \quad (18)$$

$$F(\tilde{p}, k, h, \mu, \chi) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \cdot \tilde{p} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \cdot \tilde{p} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}. \quad (19)$$

Для приведення лінеаризованого рівняння (17) до форми (8) використовується схема дискретизації за часом, вважаючи, що \tilde{p} – ітераційно-наближене значення розв’язку p на попередньому кроці ітерації. Тоді параметри у рівнянні (8) матимуть такий вигляд:

$$d = \frac{c_0}{\tilde{p}} \frac{mh}{\chi}, \quad (20)$$

$$f = \left(-2mhp_{st}q + F(\tilde{p}, k, h, \mu, \chi) + \frac{mh}{\chi} \left(\sum_{j=1}^i c_j p(t_j - j\Delta t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} p(t_0) \right) \right) / \tilde{p}. \quad (21)$$

Схема методу скінченних елементів (МСЕ) [4, 5] застосовується ітераційно для лінеаризованого рівняння (17) для кожного моменту часу $t = i\Delta t$, $i = 1, \dots, I$ із уточненням коефіцієнтів:

$$\left. \begin{aligned} \text{стисливості: } \chi &= \frac{1}{1 + f\tilde{p}}, \\ \text{проникності } k &= \mu l \Delta Q / S \Delta p, \\ \text{та наближеного розв’язку } \tilde{p} &= p. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

IV. Числовий експеримент

Пропонована схема розв’язування диференціального рівняння апробована в ході обчислювального експерименту на основі таких даних: площа пористого середовища $S = 16$ млн м^2 ; $\mu = 0,000011$ Па·с; $h = 18$ м; $R = 506,7$ Дж/кг·К; $T = 293$ К; $\chi = 0,89$; $m = 0,3$; $k \in (0,8 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2, 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2)$.

Вхідна інформація задавалась значеннями тисків у контрольних, змірних і робочих свердловинах у нейтральний період та значеннями об’ємних відборів газу на протязі відбору газу зі сховища.

Як видно з рис. 2, зі зменшенням α спад тиску в ділянці свердловини збільшується.

З рис. 3а і 3б видно, що зі зменшенням порядку дробової похідної тиск газу в ділянці свердловини зменшується, а на більш віддалених ділянках, навпаки, зростає. Така динаміка зміни тисків дозволяє забезпечити незалежність середньопластового тиску від параметра α .

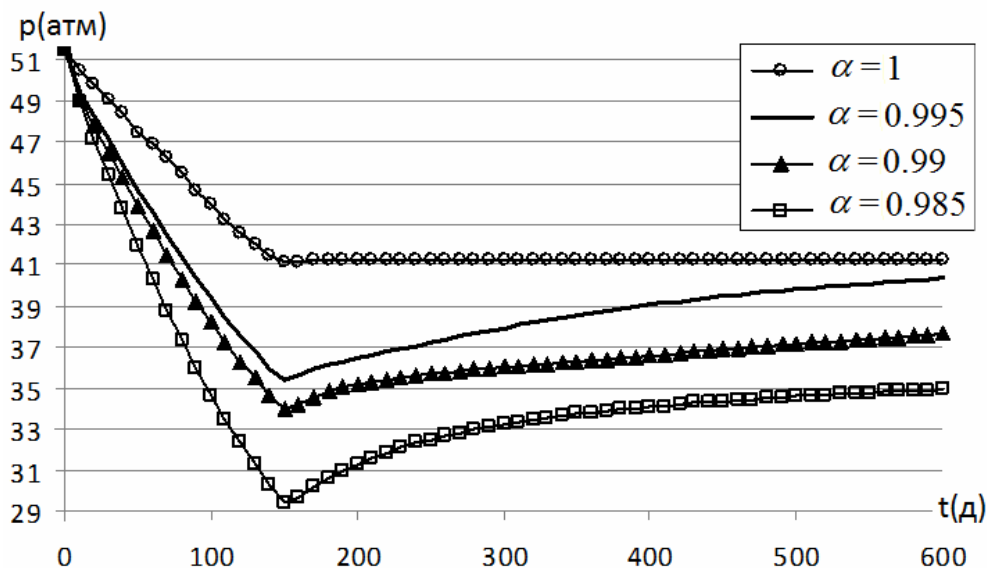


Рис. 2. Зміна тиску газу в робочій свердловині N1(512, 432) за різними значеннями степеня дробової похідної α .

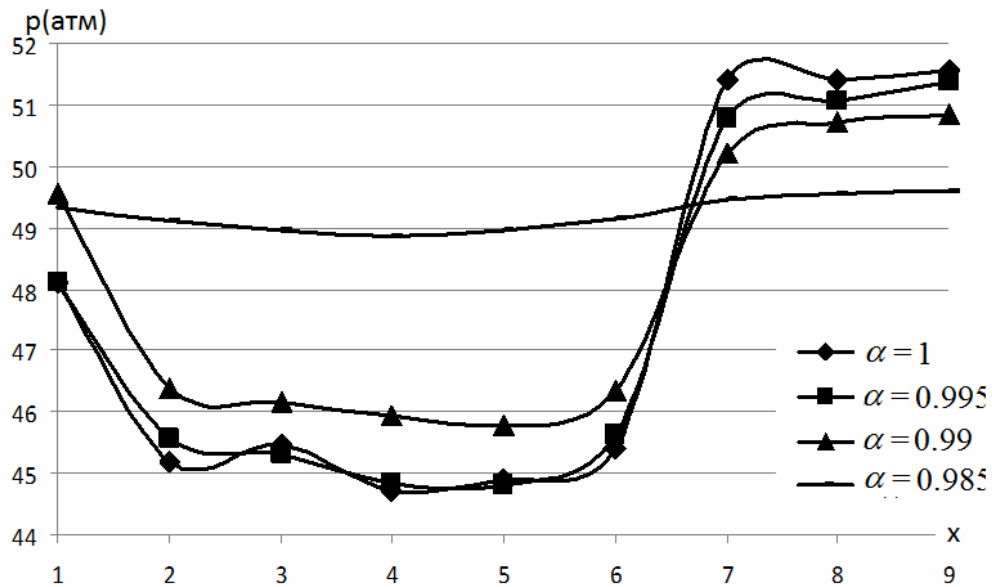


Рис. 3а. Динаміка змін тисків газу для різних α у вертикальному перерізі пласту через свердловину (точка 4 – відповідає координаті свердловини) за $t=30$ діб.

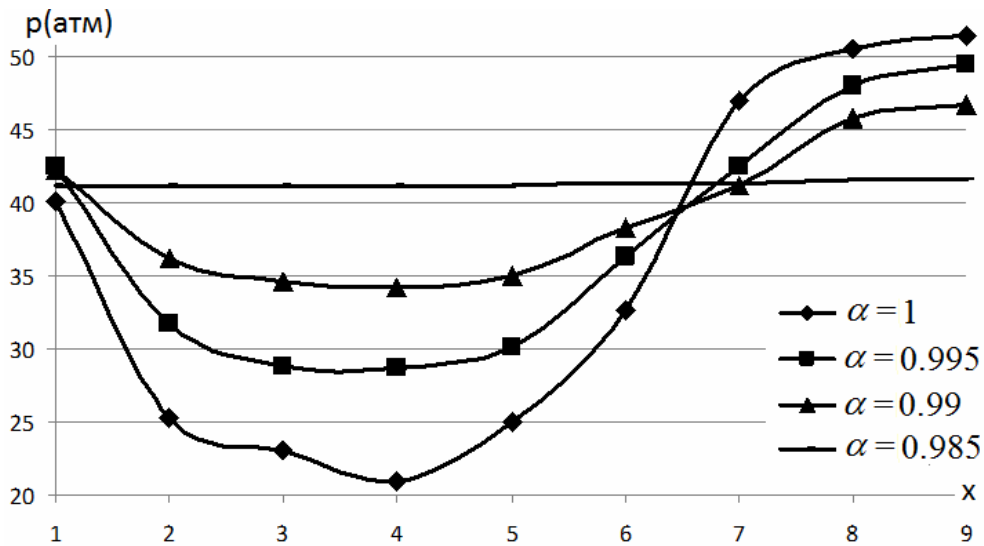


Рис. 3б. Динаміка змін тисків газу для різних α у вертикальному перерізі пласту через свердловину (точка 4 – відповідає координаті свердловини) за $t=200$ діб.

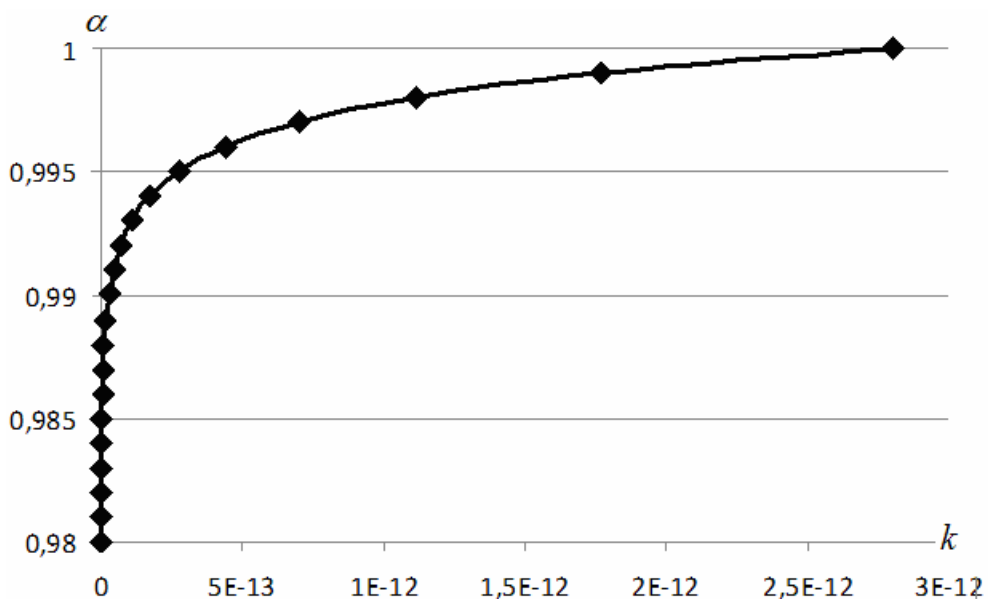


Рис. 4. Зв'язок між параметрами k і α .

Необхідною умовою адекватності побудованої моделі є контроль балансування маси газу в сховищі:

$$M = \int_V \rho dv \quad (23)$$

Оскільки моделюється процес відкачування газу зі сховища, то запас газу можна обчислити двома способами: за сумою об'ємних відборів газу, і за середньопластовим тиском газу. На базі проведених числових експериментів встановлено, що балансування маси газу здійснюється за рахунок коефіцієнта проникності газу k . На підставі числових експериментів для різних режимів фільтрації газу та для різних степенів похідної за часом α виявлено такий зв'язок між параметрами k і α (рис. 4).

Залежність k і α апроксимується рівнянням:

$$k(\alpha) = 2.8 \cdot 10^{200(\alpha-1)-12} \quad (24)$$

Висновки

1. Аналіз результатів обчислювального експерименту показує, що в залежності від вибору параметра порядку похідної за часом α динаміка середньопластових тисків не змінюється.

2. Результати експерименту підтверджують характер зміни тиску газу у пористому середовищі за наявності нетипової фільтрації, при цьому якщо параметр $\alpha = 1$, то значення розрахованих середньопластових тисків співпадають із експериментальними даними.

3. Отримані результати дають можливість оцінювати вплив порядку дробової похідної Капутто за часом на процес фільтрації газу в пластах підземних сховищ. Показано, що порядок дробової похідної може служити додатковим параметром адаптації математичної моделі.

Література

1. R. Carmona & M. Ludkovski (2005), "Gas storage and supply guarantees: an optimal switching approach," submitted to Management Science.
2. Cook, Robert D., Concept and Applications of Finite Element Analysis, fourth edition, John Wiley & Sons, 2002.
3. В.В. Васильев, Л.А. Симаков, Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем (Научное издание НАН Украины, Киев, 2008).
4. Н. Лопух, М. Притула, Н. Притула, Я. П'янило, Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерні науки та інформаційні технології, 638, 239 (2009).
5. Я.Д. П'янило, Н.Б. Лопух, П.П. Галій, Нафтова і газова промисловість, Вип. 1, 38 (2011).
6. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения (Наука и техника, Минск, 1987).
7. А.В. Псху, Уравнения в частных производных дробного порядка (Наука, Москва, 2005).

Лопух Назарій Богданович – кандидат технічних наук, науковий співробітник.

П'янило Ярослав Данилович – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, директор Центру математичного моделювання.