УДК 512

Т.Р. СЕЙФУЛЛИН

ПОРОЖДЕНИЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ

Ключевые слова: *корневой функционал, порождение корневых функционалов, полиномиальные уравнения, разностная производная.*

Понятие корневого функционала у автора появилось в связи с изучением линейных соотношений (сизигий) $n+1$ полиномов от n переменных в работах [1, 2]. Оказалось, что с каждым общим корнем системы полиномов связано определенного вида соотношение, которое названо корневым. Однако возникла проблема описания соотношений полиномов, связанных с кратными корнями, и для этого пришлось обобщить понятие корня на случай кратных корней. Этим обобщением является понятие корневого функционала. С помощью корневых функционалов явно описываются все линейные соотношения $n+1$ полиномов от n переменных в случае, когда идеал системы полиномов 0-мерен [2]. (В дальнейшем полученные результаты были обобщены на весь комплекс Кошуля в [3–5].) Для получения этого результата потребовалось изучение корневых полиномов для системы n полиномов от n переменных [1]. В работе [1] было показано, что в случае, когда идеал системы полиномов 0-мерен, существует определенный корневой функционал, названный единичным. В работах [1, 6] показано, что если такой функционал найден, то можно просто определить, принадлежит ли полином идеалу или нет, найти для полинома из идеала явно его линейное выражение через полиномы системы полиномов, найти число общих корней системы полиномов с учетом их кратности, построить базис идеала и прочее. Таким образом, становится актуальной проблема поиска корневых функционалов. Эта проблема, в отличие от проблемы поиска общих корней системы полиномов, является задачей линейной алгебры.

У автора одной из ранних идей нахождения корневых функционалов n полиномов от n переменных является идея поиска корневых функционалов для $n-1$ первых полиномов, а затем поиск среди них корневых функционалов для последнего полинома. В настоящей статье для случая $n-1$ полиномов от n переменных рассматривается билинейная операция порождения корневых функционалов, позволяющая по двум корневым функционалам построить третий корневой функционал. Впоследствии после перехода от n полиномов от n переменных к n однородным полиномам от $n+1$ переменных была рассмотрена эта операция. При обратном же переходе к неоднородным полиномам однородные корневые функционалы переходят в ограниченные корневые функционалы, а операция порождения переходит в операцию расширения. Нарушая хронологию возникновения, ограниченным корневым функционалам и операции расширения посвящены более ранние работы [6–8], но за основу в написании настоящей статьи взята работа [7].

Дальнейшие результаты, касающиеся операции порождения корневых функционалов, изложены в [9, 10].

1. ОПЕРАЦИЯ ПОРОЖДЕНИЯ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — переменные, $\mathbf{R}[x]$ — кольцо полиномов от переменных x с коэффициентами из $\mathbf{R}$.

Степенью монома $x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$ называется $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, здесь $\alpha\in\mathbf{N}^n$. Степенью полинома $F(x)$ называется максимальная степень монома с ненулевым коэффициентом, степень полинома $F(x)$ обозначается $\deg(F)$. Если $F(x)=0$, то будем считать, что $\deg(F)=-\infty$. Полином называется однородным степени d, если степени всех его мономов с ненулевыми коэффициентами равны d.

Для множества A обозначим $A^{p\times q}$ множество матриц $||a_l^k||_{l=1,q}^{k=1,p}$, где $p,q\in\mathbf{N}$, $a_l^k\in A$.

Определение 1.1. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — переменные. Обозначим $\mathbf{R}[x]^{\le d}$ множество всех полиномов степени $\le d$. Заметим, что $\mathbf{R}[x]^{\le\infty}=\mathbf{R}[x]$, и если $d<0$, то $\mathbf{R}[x]^{\le d}=\{0\}$. Обозначим $\mathbf{R}[x]^{=d}$ множество всех однородных полиномов степени d. Заметим, что если $d<0$, то $\mathbf{R}[x]^{=d}=\{0\}$.

Определение 1.2. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — переменные, обозначим $\mathbf{R}[x]_*$ совокупность всех линейных над $\mathbf{R}$ отображений $\mathbf{R}[x]$ в $\mathbf{R}$, элементы из $\mathbf{R}[x]_*$ будем обозначать $l(x_*)$, где $x_*=(x_*^1,\ldots,x_*^n)$, и называть линейными функционалами, или просто функционалами. Обозначим действие $l(x_*)$ на $F(x)\in\mathbf{R}[x]$ следующим образом: $l(x_*).F(x)$.

Обозначим $[F(x)]$ оператор умножения на полином $F(x)$, тогда для любого полинома $G(x)$ имеет место $[F(x)].G(x)=F(x)\cdot G(x)$.

Обозначим $l(x_*)\cdot F(x)$ функционал $l(x_*).[F(x)]$, тогда для любого полинома $G(x)$ имеет место $l(x_*)\cdot F(x).G(x)=l(x_*).[F(x)].G(x)=l(x_*).F(x)\cdot G(x)$.

Определение 1.3. Пусть $\mathbf{A}$ — коммутативное кольцо, включающее $\mathbf{R}$ и имеющее единицу, совпадающую с единицей кольца $\mathbf{R}$. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — переменные, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbf{A}^n$, обозначим $\mathbf{1}_x(\lambda)= =\mathbf{1}_{(x_1,\ldots,x_n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ отображение

$$\mathbf{R}[x]\ni F(x)\mapsto\mathbf{1}_x(\lambda).F(x)=F(\lambda)\in\mathbf{A}.$$

Определение 1.4. Пусть $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_s(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, где $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — переменные.

Для ковектора полиномов $g(x)=(g^1(x),\ldots,g^s(x))^{\mathrm{T}}$ обозначим

Обозначим

$$f(x)g(x) = \sum_{i=1}^{s} f_i(x)g^i(x).$$

$$(f(x))_x^{\le d} = \{\sum_{i=1}^{s} f_i(x)g^i(x) | \forall i = 1, s : g^i(x) \in \mathbf{R}[x]^{\le d-\deg(f_i)}\}.$$

Заметим, что $(f(x))_x^{\le d} \subseteq \mathbf{R}[x]^{\le d}$.

Обозначим

$$(f(x))_x = \{\sum_{i=1}^{s} f_i(x)g^i(x) | \forall i = 1,\ s : g^i(x) \in \mathbf{R}[x]\}.$$

Заметим, что $(f(x))_x^{\le \infty} = (f(x))_x$, и если $d < 0$, то $(f(x))_x^{\le d} = \{0\}$.

Пусть полиномы $f(x)$ — однородные, обозначим

$$(f(x))_x^{=d} = \{\sum_{i=1}^{s} f_i(x)g^i(x) | \forall i = 1,\ s : g^i(x) \in \mathbf{R}[x]^{=d-\deg(f_i)}\}.$$

Заметим, что $(f(x))_x^{=d} \subseteq \mathbf{R}[x]^{=d}$.

Функционал из $\mathbf{R}[x]_*$, аннулирующий $(f(x))_x$, назовем корневым функционалом полиномов $f(x)$.

Комментарий 1.1. Будем иметь в виду только такие функционалы $l(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$, что $l(x_*) \cdot \mathbf{R}[x]$ конечнопорожденный как модуль над $\mathbf{R}$, но не будем использовать это условие в статье. Назовем такие функционалы точечными. Можно показать, что множество всех точечных функционалов является модулем над $\mathbf{R}[x]$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$. Локальным функционалом в точке $x \equiv \lambda$ назовем функционал, который аннулирует некоторую степень идеала $(x - \lambda)_x = (x_1 - \lambda_1, \dots, x_n - \lambda_n)_x$; в частности, $\mathbf{1}_x(\lambda)$ аннулирует $(x - \lambda)_x$, т.е. является локальным в точке $x \equiv \lambda$. Очевидно, что локальные функционалы яляются точечными. Можно показать, что если $\mathbf{R}$ — алгебраически замкнутое поле, то любой точечный функционал есть сумма локальных функционалов, т.е. является точечным распределением.

Если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ — корень полиномов $f(x)$, т.е. $\forall i = 1,\ s : f_i(\lambda) = 0$, то $\mathbf{1}_x(\lambda)$ — корневой функционал полиномов $f(x)$. Если $\mathbf{R}$ — поле и $L(x_*)$ — ненулевой локальный корневой функционал полиномов $f(x)$ в точке $x \equiv \lambda$, то $x \equiv \lambda$ — корень полиномов $f(x)$. Тогда для поиска локальных корневых функционалов полиномов $f(x)$ необходимо находить корни полиномов $f(x)$, т.е. решать систему полиномиальных уравнений, в то время как для нахождения точечных корневых функционалов полиномов $f(x)$ необходимо решать систему линейных уравнений. Понятие локального корневого функционала полиномов $f(x)$ в точке $x \equiv \lambda$ обобщает понятие корня в точке $x \equiv \lambda$ на случай кратных корней.

Определение 1.5. Модуль $\mathfrak{M}$ над $\mathbf{R}$ назовем полуградуированным модулем над $\mathbf{R}$, если задано семейство его подмодулей $\{\mathfrak{M}^{\le d} | d \in \mathbf{Z}\}$ такое, что $\forall d \in \mathbf{Z}$: $\mathfrak{M}^{\le d} \subseteq \mathfrak{M}^{\le d+1}$, и $\mathfrak{M} = \bigcup_{d \in \mathbf{Z}} \mathfrak{M}^{\le d}$. Если $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}^{\le d}$, то будем говорить, что $\mathbf{m}$ имеет степень $\le d$, или говорить, что $\mathbf{m}$ имеет костепень $\ge -d$.

Положим $\mathbf{R}^{\le d} = \mathbf{R}$ для $d \ge 0$ и $\mathbf{R}^{\le d} = \{0\}$ для $d < 0$, тогда $\mathbf{R}$ является полуградуированным модулем над $\mathbf{R}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — полуградуированные модули над $\mathbf{R}$. Линейное над

$\mathbf{R}$ отображение $\psi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ назовем полуоднородным степени $\leq \delta$, если $\forall d \in \mathbf{Z} : \psi(\mathfrak{M}^{\leq d}) \subseteq \mathfrak{N}^{\leq d+\delta}$. Обозначим $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})^{\leq \delta}$ множество всех полуоднородных отображений степени $\leq \delta$, оно является модулем над $\mathbf{R}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — полуградуированные модули над $\mathbf{R}$, назовем их изоморфными полуградуированными модулями над $\mathbf{R}$, если существуют два взаимно обратных отображения $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})^{\leq 0}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})^{\leq 0}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ и N — полуградуированные модули над $\mathbf{R}$ такие, что для некоторых $\delta', \delta'' \in \mathbf{Z}$ имеет место $(\forall d' < \delta' : \mathfrak{M}^{\leq d'} = \{0\}) \& (\forall d'' < \delta'' : \mathfrak{N}^{\leq d''} = \{0\})$. Обозначим

$$(\mathfrak{M} \otimes \mathrm{N})^{\leq d} = \sum_{d', d'' \in \mathbf{Z}} (\mathfrak{M}^{\leq d'} \otimes \mathfrak{N}^{\leq d''}),$$

где $d' + d'' = d$, $d' \geq \delta'$, $d'' \geq \delta''$. Эта сумма содержит конечное число слагаемых. Тензорное произведение $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ с такой полуградуировкой является полуградуированным модулем над $\mathbf{R}$.

Определение 1.6. Модуль M над $\mathbf{R}$ называется градуированным модулем над $\mathbf{R}$, если задано семейство его подмодулей $\{\mathfrak{M}^{=d} \mid d \in \mathbf{Z}\}$ такое, что $\mathfrak{M} = \sum_{d \in \mathbf{Z}} \mathfrak{M}^{=d}$. Если $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}^{=d}$, то будем говорить, что $\mathbf{m}$ имеет степень $= d$, или говорить, что $\mathbf{m}$ имеет костепень $= -d$.

Положим $\mathbf{R}^{=d} = \mathbf{R}$ для $d = 0$ и $\mathbf{R}^{=d} = \{0\}$ для $d \neq 0$, тогда $\mathbf{R}$ является градуированным модулем над $\mathbf{R}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — градуированные модули над $\mathbf{R}$. Линейное над $\mathbf{R}$ отображение $\psi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ называется однородным степени $= \delta$, если $\forall d \in \mathbf{Z} : \psi(\mathfrak{M}^{=d}) \subseteq \mathfrak{N}^{=d+\delta}$. Обозначим $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})^{=\delta}$ множество всех однородных отображений степени $= \delta$, оно является модулем над $\mathbf{R}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — градуированные модули над $\mathbf{R}$, они называются изоморфными градуированными модулями над $\mathbf{R}$, если существуют два взаимно обратных отображения $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})^{=0}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})^{=0}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — градуированные модули над $\mathbf{R}$ такие, что для некоторых $\delta', \delta'' \in \mathbf{Z}$ имеет место $(\forall d' < \delta' : \mathfrak{M}^{=d'} = \{0\}) \& (\forall d'' < \delta'' : \mathfrak{N}^{=d''} = \{0\})$. Обозначим

$$(\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N})^{=d} = \sum_{d', d'' \in \mathbf{Z}} (\mathfrak{M}^{=d'} \otimes \mathrm{N}^{=d''}),$$

где $d' + d'' = d$, $d' \geq \delta'$, $d'' \geq \delta''$. Эта сумма содержит конечное число слагаемых. Тензорное произведение $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ с такой градуировкой является градуированным модулем над $\mathbf{R}$.

Определение 1.7. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — переменные. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, обозначим $[x^\alpha]_*$ функционал такой, что $[x^\alpha]_* . x^\beta = 1$, если $\beta = \alpha$, и $[x^\alpha]_* . x^\beta = 0$, если $\beta \neq \alpha$, где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$. Такие функционалы назовем мономами, при этом $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ является костепенью монома, $-|\alpha|$ является степенью монома.

Дополнение 1.1. Для любого $l(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ имеет место $l(x_*) = \sum_\alpha (l(x_*).x^\alpha) \cdot [x^\alpha]_*$, где $\alpha \in \mathbf{N}^n$. Эта сумма, вообще говоря, бесконечна.

Если $l(x_*)$ — функционал костепени $\geq \Delta$, то все его мономы с ненулевыми коэффициентами имеют костепень $\geq \Delta$, и наоборот. $\mathbf{R}$

Если $l(x_*)$ — однородный функционал костепени $=\Delta$, то все его мономы с ненулевыми коэффициентами имеют костепень $=\Delta$, и наоборот.

Соглашение 1.1. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — переменные. Положим $(\mathbf{R}[x])^{\le d}=\mathbf{R}[x]^{\le d}$ для $d\in\mathbf{Z}$, тогда $\mathbf{R}[x]$ является полуградуированным модулем над $\mathbf{R}$. При рассмотрении неоднородных полиномов будем считать $\mathbf{R}[x]$ снабженным этой полsуградуировкой.

Пусть $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_s(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, положим $((f(x))_x)^{\le d}=(f(x))_x^{\le d}$, тогда $(f(x))_x$ является полуградуированным модулем над $\mathbf{R}$. При рассмотрении неоднородных полиномов будем считать $(f(x))_x$ снабженным этой полуградуировкой.

Положим $(\mathbf{R}[x])^{=d}=\mathbf{R}[x]^{=d}$ для $d\in\mathbf{Z}$, тогда $\mathbf{R}[x]$ является градуированным модулем над $\mathbf{R}$. При рассмотрении однородных полиномов будем считать $\mathbf{R}[x]$ снабженным этой градуировкой.

Пусть $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_s(x))$ — однородные полиномы из $\mathbf{R}[x]$, положим $((f(x))_x)^{=d}=(f(x))_x^{=d}$, тогда $(f(x))_x$ является градуированным модулем над $\mathbf{R}$. При рассмотрении однородных полиномов будем считать $(f(x))_x$ снабженным этой градуировкой.

Определение 1.8. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$, $\hat{u}=(\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_n)$ — переменные. Разностной производной полинома $F(x)$ из $\mathbf{R}[x]$ назовем и обозначим $\nabla F(x,y)$ ковектор из $\mathbf{R}[x,y]^{n\times 1}$ такой, что

$$\hat{u}\,\nabla F(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\hat{u}_k\nabla^k F(x,y) \,@\,@\, (x-y)\nabla F(x,y)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)\nabla^k F(x,y)=F(x)-F(y).$$

Назовем линейное над $\mathbf{R}$ отображение $\mathbf{R}[x]\to\mathbf{R}[x,y]^{n\times 1}$, сопоставляющее полиному $F(x)$ его разностную производную $\nabla F(x,y)$, оператором разностной производной и обозначим его $\nabla_x(x,y)$, тогда имеет место

$$\hat{u}\,\nabla_x(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\hat{u}_k\nabla_x^k(x,y) \,@\,@\, (x-y)\nabla_x(x,y)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)\nabla_x^k(x,y)=\mathbf{1}_x(x)-\mathbf{1}_x(y).$$

Пусть $F(x)\in\mathbf{R}[x]^{\le d}$, назовем разностную производную $\nabla F(x,y)$ полинома $F(x)$ полуоднородной, если $\nabla^k F(x,y)$ является полиномом степени $\le d-1$ для $k=1,n$.

Назовем оператор разностной производной $\nabla_x(x,y)$ полуоднородным, если для любого полинома $F(x)\in\mathbf{R}[x]^{\le d}$ ковектор полиномов $\nabla_x(x,y).F(x)$ является его полуоднородной разностной производной. Тогда $\nabla_x^k(x,y)$ является полуоднородным линейным над $\mathbf{R}$ отображением степени ≤ -1 для $k=1,n$.

Пусть $F(x)\in\mathbf{R}[x]^{=d}$, назовем разностную производную $\nabla F(x,y)$ полинома $F(x)$ однородной, если $\nabla^k F(x,y)$ является однородным полиномом степени $=d-1$ для $k=1,n$.

Назовем оператор разностной производной $\nabla_x(x, y)$ однородным, если для любого полинома $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{=d}$ ковектор полиномов $\nabla_x(x, y).F(x)$ является его однородной разностной производной. Тогда $\nabla_x^k(x, y)$ является однородным линейным над $\mathbf{R}$ отображением степени $=-1$ для $k=1, n$.

Лемма 1.1. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ — переменные. Разностная производная полинома $F(x)$ из $\mathbf{R}[x]$ существует, например,

$$\nabla^k F(x, y)=\frac{F(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)-F(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)}{x_k-y_k}$$

для $k=1, n$.

Пусть $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leq d}$, тогда $\nabla^k F(x, y)$ является полиномом степени $\leq d-1$ для $k=1, n$, т.е. для полинома $F(x)$ существует полуоднородная разностная производная $\nabla F(x, y)$. Отображение $\mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x, y]^{n \times 1}$, сопоставляющее полиному $F(x)$ ковектор $\nabla F(x, y)$, является линейным над $\mathbf{R}$ отображением, следовательно, оно является полуоднородным оператором разностной производной, т.е. существует полуоднородный оператор разностной производной.

Пусть $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{=d}$, тогда $\nabla^k F(x, y)$ является однородным полиномом степени $=d-1$ для $k=1, n$, т.е. для однородного полинома $F(x)$ существует однородная разностная производная $\nabla F(x, y)$. Отображение $\mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x, y]^{n \times 1}$, сопоставляющее однородному полиному $F(x)$ ковектор $\nabla F(x, y)$, является линейным над $\mathbf{R}$ отображением, следовательно, оно является однородным оператором разностной производной, т.е. для однородных полиномов существует однородный оператор разностной производной.

Лемма 1.2. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$, $\hat{u}=(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n)$ — переменные.

1. Если $\nabla F(x, y)$ — полуоднородная (однородная) разностная производная (однородного) полинома $F(x)$, то $\nabla' F(x, y)=\nabla F(y, x)$ является полуоднородной (однородной) разностной производной полинома $F(x)$.

Если $\nabla_x(x, y)$ — полуоднородный (однородный) оператор разностной производной, то $\nabla_x{}'(x, y)=\nabla_x(y, x)$ является полуоднородным (однородным) оператором разностной производной.

2. Пусть $V(x)=F(x)G(x)$, тогда $\nabla F(x, y)G(x)+F(y)\nabla G(x, y)$ есть разностная производная полинома $V(x)$.

3. Пусть $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leq d}$, пусть $\nabla' F(x, y)$ и $\nabla'' F(x, y)$ — две полуоднородные разностные производные полинома $F(x)$, тогда

$$\hat{u}\, \nabla' F(x, y)=\hat{u}\, \nabla'' F(x, y)+\sum_{k, l}((x_k-y_k)\hat{u}_l-(x_l-y_l)\hat{u}_k) \cdot T^{kl}(x, y),$$

где $k<l$ и $\deg(T^{kl}) \leq d-2$.

4. Пусть $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{=d}$, пусть $\nabla' F(x, y)$ и $\nabla'' F(x, y)$ — две однородные разностные производные полинома $F(x)$, тогда

$$\hat{u}\, \nabla' F(x, y)=\hat{u}\, \nabla'' F(x, y)+\sum_{k, l}((x_k-y_k)\hat{u}_l-(x_l-y_l)\hat{u}_k) \cdot T^{kl}(x, y),$$

где $k<l$ и $T^{kl}(x, y)$ — однородный полином степени $=d-2$.

Доказательство.1. Имеет место

$$(x-y)\nabla' F(x,y)=(x-y)\nabla F(y,x)=$$
$$-(y-x)\nabla F(y,x) = -(F(y)-F(x))=F(x)-F(y),$$

следовательно, $\nabla' F(x,y)$ является разностной производной полинома $F(x)$.

Если $F(x)\in \mathbf{R}[x]^{\le d}$ и $\nabla F(x,y)$ — полуоднородная разностная производная, то имеет место $\nabla^k F(x,y)\in \mathbf{R}[x,y]^{\le d-1}$ для $k=\overline{1,n}$, тогда $\nabla'^k F(x,y)= =\nabla^k F(y,x)\in \mathbf{R}[x,y]^{\le d-1}$, следовательно, $\nabla' F(x,y)=\nabla F(y,x)$ является полуоднородной разностной производной.

Если $F(x)\in \mathbf{R}[x]^{=d}$ и $\nabla F(x,y)$ — однородная разностная производная, то имеет место $\nabla^k F(x,y)\in \mathbf{R}[x,y]^{=d-1}$ для $k=\overline{1,n}$, тогда $\nabla'^k F(x,y)=\nabla^k F(y,x)\in \mathbf{R}[x,y]^{=d-1}$, следовательно, $\nabla' F(x,y)=\nabla F(y,x)$ является полуоднородной разностной производной.

Из первой части утверждения следует, что $\nabla_x{}'(x,y)=\nabla_x(y,x)$ сопоставляет любому полиному $F(x)\in \mathbf{R}[x]$ его полуоднородную (однородную) разностную производную. Из линейности над $\mathbf{R}$ отображения $\nabla_x(x,y)$ следует линейность над $\mathbf{R}$ отображения $\nabla_x{}'(x,y)=\nabla_x(y,x)$. Таким образом, $\nabla_x{}'(x,y)$ является полуоднородным (однородным) оператором разностной производной.

2. Имеет место

$$(x-y)\big(\nabla F(x,y)G(x)+F(y)\nabla G(x,y)\big)=$$
$$=((x-y)\nabla F(x,y))G(x)+F(y)((x-y)\nabla G(x,y))=$$
$$=(F(x)-F(y))G(x)+F(y)(G(x)-G(y))=$$
$$=F(x)G(x)-F(y)G(y)=V(x)-V(y),$$

следовательно, имеет место доказываемое утверждение.

3, 4. Обозначим $W^k(x,y)=\nabla'^k F(x,y)-\nabla''^k F(x,y)$, положим

$$T^{kl}(x,y)=\nabla_x^k(x,y).W^l(x,y)=$$
$$=\frac{1}{x_k-y_k}(W^l(y_{<k},x_k,x_{>k},y)-W^l(y_{<k},y_k,x_{>k},y)).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что имеют место равенства 3 и 4 леммы (см. также конец стр. 45 — начало стр. 46 [3]). В утверждении 3 степени полиномов $\nabla'^l F(x,y)$ и $\nabla''^l F(x,y)$ являются $\le d-1$, поэтому $\deg(W^l)\le d-1$, тогда $\deg(T^{kl})\le \deg(W^l)-1\le d-2$. В утверждении 4 $\nabla'^l F(x,y)$ и $\nabla''^l F(x,y)$ являются однородными полиномами степени $=d-1$, поэтому $W^l(x,y)$ является однородным полиномом степени $=d-1$, тогда $T^{kl}(x,y)$ является однородным полиномом степени $=d-2$.

Соглашение 1.2. В дальнейшем, если не оговорено противного, для неоднородных полиномов будем рассматривать только полуоднородные разностные производные и полуоднородные операторы разностных производных, а для однородных полиномов — только однородные разностные производные и однородные операторы разностных производных.

Определение 1.9. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n)$ и $y=(y_1,\dots,y_n)$ — переменные,

$f(x)=(f_1(x),\dots,f_{n-1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$.

1. Обозначим

$$J_x(x, y)=\det\|\nabla f(x, y)\ \ \nabla_x(x, y)\|.$$

2. Для функционала $L(x_*)$ обозначим $[L(x_*)]$ оператор

$$L(y_*).J_x(x, y)=L(y_*).\det\|\nabla f(x, y)\ \ \nabla_x(x, y)\|.$$

3. Для функционала $L(x_*)$ и полинома $F(x)$ обозначим $L(x_*)*F(x)=$ $=[L(x_*)].F(x)$, тогда

$$L(x_*)*F(x)=L(y_*).\det\|\nabla f(x, y)\ \ \nabla F(x, y)\|.$$

4. Для функционалов $l(x_*)$ и $L(x_*)$ обозначим $l(x_*)*L(x_*)=$ $=l(x_*).[L(x_*)]$, тогда

$$l(x_*)*L(x_*)=l(x_*).L(y_*).J_x(x, y)=l(x_*).L(y_*).\det\|\nabla f(x, y)\ \ \nabla_x(x, y)\|.$$

Указанное отображение * назовем операцией порождения.

Заметим, что так как $\nabla_x(x, y)$ является линейным над $\mathbf{R}$ отображением, то отображения $J_x(x, y)$ и $[L(x_*)]$ являются линейными над $\mathbf{R}$, а отображения * в пп. 3 и 4 определения являются билинейными над $\mathbf{R}$.

Комментарий 1.2. (К определению 1.9.) Пусть $x\equiv\lambda\in\mathbf{R}^n$ — корень полиномов $f(x)$, тогда $\mathbf{1}_x(\lambda)$ является корневым функционалом полиномов $f(x)$. Пусть матрица $\left\|\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}(\lambda)\right\|$ имеет ранг $n-1$, тогда вектор $\xi x_*=\sum\limits_k \xi_k x_*^k=$ $=\det\left\|\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}(\lambda)\ \ x_*\right\|=\det\left\|\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_k}(\lambda)\ \ x_*^k\right\|_{i=1,n-1}^{k=1,n}$ является ненулевым касательным вектором к многообразию корней полиномов $f(x)$ в точке $x\equiv\lambda$, а $L(x_*)$ $=\xi\dfrac{\partial}{\partial x}(\lambda)=\sum\limits_k \xi_k\dfrac{\partial}{\partial x_k}(\lambda)=\det\left\|\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}(\lambda)\ \ \dfrac{\partial}{\partial x}(\lambda)\right\|$ является корневым функционалом полиномов $f(x)$. Можно заметить, что

$$L(x_*)=L_1(x_*).L_2(y_*).\det\|\nabla f(x, y)\ \ \nabla_x(x, y)\| =$$
$$=\det\|\nabla f(\lambda, \lambda)\ \ \nabla_x(\lambda, \lambda)\|=\det\left\|\frac{\partial f(x)}{\partial x}(\lambda)\ \ \ \frac{\partial}{\partial x}(\lambda)\right\|,$$

где $L_1(x_*)=\mathbf{1}_x(\lambda)$, $L_2(x_*)=\mathbf{1}_x(\lambda)$, эти функционалы являются корневыми функционалами полиномов $f(x)$. Последнее равенство имеет место, так как $\nabla F(\lambda, \lambda)=\dfrac{\partial F(x)}{\partial x}(\lambda)$ для любого полинома $F(x)$ и $\nabla_x(\lambda, \lambda)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\lambda)$. В п. 3 теорем 2.3 и 3.3 будет показано, что если $L_1(x_*)$ и $L_2(x_*)$ — любые два корневых функционала полиномов $f(x)$, то $L(x_*)$ является корневым функционалом полиномов $f(x)$. Операция порождения функционалов является обобщением процедуры получения корневого функционала $\det\left\|\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}(\lambda)\ \ \dfrac{\partial}{\partial x}(\lambda)\right\|$ полиномов $f(x)$ по корню $x\equiv\lambda$ (корневому функционалу $\mathbf{1}_x(\lambda)$).

Теорема 1.1. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ — переменные, $f(x)=(f_1(x),\dots,f_{n-1}(x))$ — (однородные) полиномы из $\mathbf{R}[x]$,

$$\delta_f=\sum_{i=1}^{n-1}\deg(f_i)-n.$$

Пусть $F(x)$ — (однородный) полином. Пусть $\nabla f_i(x, y)$ — полуоднородная (однородная) разностная производная полинома $f_i(x)$ для $i=\overline{1, n-1}$, $\nabla F(x, y)$ — полуоднородная (однородная) разностная производная полинома $F(x)$, $\nabla_x(x, y)$ — полуоднородный (однородный) оператор разностной производной.

Пусть $\nabla' f_i(x, y)=\nabla f_i(y, x)$ для $i=\overline{1, n-1}$, $\nabla' F(x, y)=\nabla F(y, x)$, $\nabla_x{}'(x, y)=\nabla_x(y, x)$. Заметим, что в силу п. 1 леммы 1.2 $\nabla' f_i(x, y)$ является полуоднородной (однородной) разностной производной полинома $f_i(x)$ для $i=\overline{1, n-1}$, $\nabla' F(x, y)$ является полуоднородной (однородной) разностной производной полинома $F(x)$, $\nabla_x{}'(x, y)$ является полуоднородным (однородным) оператором разностной производной.

1. Пусть

$$R(x, y)=\det||\nabla f(x, y)\;\; \nabla F(x, y)||,\quad R'(x, y)=\det||\nabla' f(x, y)\;\; \nabla' F(x, y)||,$$
$$J_x(x, y)=\det||\nabla f(x, y)\;\; \nabla_x(x, y)||,\quad J'_x(x, y)=\det||\nabla' f(x, y)\;\; \nabla'_x(x, y)||,$$

тогда

$$R(y, x)=\det||\nabla f(y, x)\;\; \nabla F(y, x)||=\det||\nabla' f(x, y)\;\; \nabla' F(x, y)||=R'(x, y),$$
$$J_x(y, x)=\det||\nabla f(y, x)\;\; \nabla_x(y, x)||=\det||\nabla' f(x, y)\;\; \nabla'_x(x, y)||=J'_x(x, y).$$

2. Пусть $L(x_*)$ — (однородный) функционал, положим

$$H_l(y)=L(x_*).\det||\nabla f(x, y)\;\; \nabla F(x, y)||,\; H'_r(x)=$$
$$=L(y_*).\det||\nabla' f(x, y)\;\; \nabla' F(x, y)||,$$

тогда

$$H_l(x)=L(y_*).\det||\nabla f(y, x)\;\; \nabla F(y, x)||=$$
$$=L(y_*).\det||\nabla' f(x, y)\;\; \nabla' F(x, y)||=H'_r(x).$$

Положим

$$[L(y_*)]_l=L(x_*).\det||\nabla f(x, y)\;\; \nabla_y(x, y)||,$$
$$[L(x_*)]'_r=L(y_*).\det||\nabla' f(x, y)\, \nabla'_x(x, y)||,$$

тогда

$$[L(x_*)]_l=L(y_*).\det||\nabla f(y, x)\;\; \nabla_x(y, x)||=$$
$$=L(y_*).\det||\nabla' f(x, y)\;\; \nabla_x{}'(x, y)||=[L(x_*)]_r{}'.$$

3. Пусть $L_1(x_*)$ и $L_2(x_*)$ — (однородные) функционалы, тогда

$$L_2(x_*).L_1(y_*).\det||\nabla f(x, y)\;\; \nabla_x(x, y)||=$$
$$=L_1(x_*).L_2(y_*).\det||\nabla' f(x, y)\;\; \nabla'_x(x, y)||.$$

Доказательство. 1, 2. Очевидно.

3. Имеет место

$$L_2(x_*).L_1(y_*).\det||\nabla f(x, y)\;\; \nabla_x(x, y)||=$$
$$=L_1(y_*).L_2(x_*).\det||\nabla f(x, y)\;\; \nabla_x(x, y)||=$$
$$=L_1(x_*).L_2(y_*).\det||\nabla f(y, x)\;\; \nabla_x(y, x)||=$$

$$= L_1(x_*).L_2(y_*).\det||\nabla' f(x, y) \ \nabla'_x(x, y)||.$$

Комментарий 1.3. Отличие $R(y, x)$ от $R(x, y)$ и отличие $J_x(y, x)$ от $J_x(x, y)$ в п. 1 теоремы 1.1 описываются в п. 2 теоремы 2.1 для неоднородных полиномов и в п. 2 теоремы 3.1 для однородных полиномов.

При условиях п. 2 теоремы 1.1 положим

$$H_r(x) = L(y_*).\det||\nabla f(x, y) \ \nabla F(x, y)||, \ [L(x_*)]_r = L(y_*).\det||\nabla f(x, y) \ \nabla_x(x, y)||.$$

Отличие $H_l(x) = H'_r(x)$ от $H_r(x)$ и отличие $[L(x_*)]_l = [L(x_*)]'_r$ от $[L(x_*)]_r$ в п. 2 теоремы 1.1 описываются в п. 2 теорем 2.2 и 2.4 для неоднородных полиномов и в п. 2 теорем 3.2 и 3.4 для однородных полиномов.

Отличие функционала $L_2(x_*).L_1(y_*).\det||\nabla f(x, y) \ \nabla_x(x, y)||$ от функционала $L_1(x_*).L_2(y_*).\ \det||\nabla f(x, y) \ \nabla_x(x, y)||$ в п. 2 теоремы 1.1 описываются в п. 2 теорем 2.3 и 2.5 для неоднородных полиномов и в п. 2 теорем 3.3 и 3.5 для однородных полиномов. При условиях теорем 2.5 и 3.5 имеется точная коммутативность операции порождения.

Комментарий 1.4. Из п. 2 теоремы 1.1 видно, что достаточно определить только одно произведение $L(x_*) \overset{r}{*} F(x) = L(y_*).\det||\nabla f(x, y) \ \ \nabla F(x, y)||$, определенное в п. 3 определения 1.9, другое произведение $L(y_*) \overset{r}{*} F(y) = L(x_*).\det||\nabla f(x, y) \ \ \nabla F(x, y)||$ через него выражается; достаточно определить только один оператор $[L(x_*)]_r =$ $L(y_*).\det||\nabla f(x, y) \ \nabla_x(x, y)||$, определенный в п. 2 определения 1.9, другой оператор $[L(y_*)]_l = L(x_*).\det||\nabla f(x, y) \ \nabla_y(x, y)||$ через него выражается.

2. НЕОДНОРОДНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей.

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — полуградуированный модуль над $\mathbf{R}$, тогда $\mathbf{l} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathbf{R})^{\leq -\Delta}$ эквивалентно $\mathbf{l} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathbf{R})$ и $\mathbf{l}$ аннулирует $\mathfrak{M}^{\leq d}$ для всех $d < \Delta$. Заметим, что условие $\mathbf{l}$ аннулирует $\mathfrak{M}^{\leq d}$ для всех $d < \Delta$ эквивалентно условию $\mathbf{l}$ аннулирует $\mathfrak{M}^{\leq \Delta - 1}$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $\mathbf{l} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathbf{R})^{\leq -\Delta}$. Если $d < \Delta$, то $\mathbf{l}(\mathfrak{M}^{\leq d}) \subseteq \mathbf{R}^{\leq d - \Delta} = \{0\}$, поскольку $d - \Delta < 0$, следовательно, $\mathbf{l}$ аннулирует $\mathfrak{M}^{\leq d}$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\mathbf{l}$ аннулирует $\mathfrak{M}^{\leq d}$ для всех $d < \Delta$. Если $d \geq \Delta$, то $\mathbf{l}(\mathfrak{M}^{\leq d}) \subseteq \mathbf{R} = \mathbf{R}^{\leq d - \Delta}$, поскольку $d - \Delta \geq 0$. Если $d < \Delta$, то $\mathbf{l}(\mathfrak{M}^{\leq d}) \subseteq \{0\} = \mathbf{R}^{\leq d - \Delta}$, поскольку $d - \Delta < 0$. Следовательно, $\mathbf{l}$ является полуоднородным отображением степени $\leq -\Delta$.

Лемма 2.2. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — полуградуированные модули над $\mathbf{R}$, $\mathbf{l} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{N}, \mathbf{R})^{\leq -\Delta}$. Тогда отображение $\theta : \mathfrak{M} \otimes \mathrm{N} \ni \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \mapsto \mathbf{m} \cdot \mathbf{l}(\mathbf{n}) \in \mathfrak{M}$ является полуоднородным линейным над $\mathbf{R}$ отображением степени $\leq -\Delta$.

Доказательство. Ясно, что θ является линейным над $\mathbf{R}$ отображением. Любой элемент из $(\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N})^{\leq d}$ есть сумма элементов вида $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$, где $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}^{\leq d - \delta}$, $\mathbf{n} \in \mathfrak{N}^{\leq \delta}$. Тогда $\mathbf{l}(\mathbf{n}) \in \mathbf{R}^{\leq \delta - \Delta}$ и $\theta : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \mapsto \mathbf{m} \cdot \mathbf{l}(\mathbf{n}) \in$ $\in \mathfrak{M}^{\leq d - \delta} \cdot \mathbf{R}^{\leq \delta - \Delta} \subseteq \mathfrak{M}^{\leq d - \Delta}$. Покажем, что имеет место последнее включение. Если $\delta \geq \Delta$, то $\mathfrak{M}^{\leq d - \delta} \cdot \mathbf{R}^{\leq \delta - \Delta} = \mathfrak{M}^{\leq d - \delta} \cdot \mathbf{R} \subseteq \mathfrak{M}^{\leq d - \delta} \subseteq \mathfrak{M}^{\leq d - \Delta}$, первое равенство имеет место, поскольку $\mathbf{R}^{\leq \delta - \Delta} = \mathbf{R}$, здесь $\delta - \Delta \geq 0$; последнее включение имеет место, поскольку $d-\delta \le d-\Delta$. Если $\delta < \Delta$, то $\mathfrak{M}^{\le d-\delta} \cdot \mathbf{R}^{\le \delta-\Delta} = \mathfrak{M}^{\le d-\delta} \cdot \{0\} = \{0\} \subseteq \mathfrak{M}^{\le d-\Delta}$, первое равенство имеет место, поскольку $\mathbf{R}^{\le \delta-\Delta} = \{0\}$, здесь $\delta - \Delta < 0$. Следовательно, θ является полуоднородным линейным над $\mathbf{R}$ отображением степени $\le -\Delta$.

Лемма 2.3. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — полуградуированные модули над $\mathbf{R}$, $\mathbf{l} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{N}, \mathbf{R})^{\le -\Delta}$. Пусть $\psi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ — полуоднородное линейное над $\mathbf{R}$ отображение степени $\le \delta$, тогда $\mathbf{l}.\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathbf{R})^{\le -\Delta+\delta}$.

Доказательство. Имеет место $(\mathbf{l}.\psi)(\mathfrak{M}^{\le d}) = \mathbf{l}(\psi(\mathfrak{M}^{\le d})) \subseteq \mathbf{l}(\mathfrak{N}^{\le d+\delta}) \subseteq$ $\subseteq \mathbf{R}^{\le d+\delta-\Delta}$. Первое включение имеет место, поскольку $\psi(\mathfrak{M}^{\le d}) \subseteq \mathfrak{N}^{\le d+\delta}$, так как $\psi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ является полуоднородным отображением степени $\le \delta$; второе включение имеет место, так как $\mathbf{l}$ является полуоднородным отображением степени $\le -\Delta$. Следовательно, имеет место $\mathbf{l}.\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathbf{R})^{\le -\Delta+\delta}$.

Теорема 2.1. Пусть $x=(x_1, \dots, x_n)$, $y=(y_1, \dots, y_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_{n-1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$. Пусть $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\le d}$.

Положим $R(x, y) = \det||\nabla f(x, y) \;\; \nabla F(x, y)||$, тогда:

1) полином $R(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\le \delta_f + d}$, т.е. отображение $J_x(x, y)$ является полуоднородным отображением степени $\le \delta_f$;

2) полином $R(x, y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x) - f(y))_{x,y}^{\le \delta_f + d}$ независимо от выбора $\nabla F(x, y)$ и определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x) - f(y))_{x,y}^{\le \delta_f + d}$ и слагаемого $(F(x) - F(y)) \cdot \Omega(x, y)$ независимо от выбора $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\le \delta_f}$ и не зависит от $F(x)$;

3) если $F(x) \in (f(x))_x^{\le d}$, то $R(x, y) \in (f(x), f(y))_{x,y}^{\le d+\delta_f}$, т.е. отображение $J_x(x, y)$ индуцирует полуоднородное отображение $(f(x))_x \to (f(x), f(y))_{x,y}$ степени $\le \delta_f$; при некотором выборе $\nabla F(x, y)$ имеет место $R(x, y) \in (f(x))_{x,y}^{\le d+\delta_f}$, при некотором выборе $\nabla F(x, y)$ имеет место $R(x, y) \in (f(y))_{x,y}^{\le d+\delta_f}$.

Доказательство. 1. Поскольку все разностные производные — полуоднородные, то $\nabla F(x, y)$ является ковектором полиномов степени $\le d-1$, $\nabla f_i(x, y)$ является ковектором полиномов степени $\le \deg(f_i) - 1$ для $i = 1, n-1$, тогда $R(x, y)$ является полиномом степени $\le \sum_{i=1}^{n-1} (\deg(f_i) - 1) +$ $+ (\deg(F) - 1) = (\sum_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n) + \deg(F) \le \delta_f + d$.

2. Поскольку $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\le d}$ и $\nabla F(x, y)$ является полуоднородной разностной производной, то в силу п. 3 леммы 1.2 неоднозначность $\nabla F(x, y)$ имеет вид

$$\hat{u}\,\nabla' F(x, y) = \hat{u}\,\nabla F(x, y) + \sum_{k,l} ((x_k - y_k)\hat{u}_l - (x_l - y_l)\hat{u}_k) \cdot T^{kl}(x, y),$$

где $k < l$, $T^{kl}(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\le d-2}$.

Тогда $R(x, y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого

$$\sum_{k,l} \pm\det\begin{Vmatrix} \nabla^{\neq k,l} f(x, y) & 0 \\ \nabla^k f(x, y) & -(x_l - y_l) \\ \nabla^l f(x, y) & (x_k - y_k) \end{Vmatrix} \cdot T^{kl}(x, y) =$$

$$= \sum_{k,l} \pm\det\begin{Vmatrix} \nabla^{\neq k,l} f(x, y) \\ (x_k - y_k)\nabla^k f(x, y) + (x_l - y_l)\nabla^l f(x, y) \end{Vmatrix} \cdot T^{kl}(x, y) =$$

$$= \sum_{k,l} \pm\det\begin{Vmatrix} \nabla^{\neq k,l} f(x, y) \\ f(x) - f(y) \end{Vmatrix} \cdot T^{kl}(x, y) = \sum_i (f_i(x) - f_i(y))\,\omega^i(x, y).$$

Третий определитель равен второму определителю, так как матрица третьего определителя получается из матрицы второго определителя путем добавления к последней строке линейной комбинации остальных строк, т.е. для любого $i = \overline{1, n-1}$

$$((x_k - y_k)\nabla^k f_i(x, y) + (x_l - y_l)\nabla^l f_i(x, y)) + \sum_{m: \neq k,l} (x_m - y_m)\nabla^m f_i(x, y) =$$

$$= \sum_m (x_m - y_m)\nabla^m f_i(x, y) = f_i(x) - f_i(y).$$

Последнее равенство получается при расписывании определителя по последней строке. Третье выражение есть полином $\in (f(x) - f(y))_{x,y}^{\leq \delta_f + 2} \cdot \mathbf{R}[x, y]^{\leq d-2} \subseteq$ $\subseteq (f(x) - f(y))_{x,y}^{\leq \delta_f + d}$, следовательно, $\omega^i(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\leq \delta_f + d - \deg(f_i)}$, при этом $\omega^i(x, y)$ не зависит от $f_i(x)$. Здесь $T^{kl}(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\leq d-2}$; третий определитель принадлежит $(f(x) - f(y))_{x,y}^{\leq \delta_f + 2}$, поскольку в нем коэффициентом при $(f_i(x) - f_i(y))$ является определитель $\pm\det\begin{Vmatrix} \nabla^{\neq k,l} f_{\neq i}(x, y) \end{Vmatrix} \in \mathbf{R}[x, y]^{\leq D_i}$, где

$$D_i = \sum_{j: \neq i} (\deg(f_j) - 1) = \sum_{j=1}^{n-1} (\deg(f_j) - 1) - (\deg(f_i) - 1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \deg(f_j) - n + 2 - \deg(f_i) = (\delta_f + 2) - \deg(f_i).$$

Таким образом, при неоднозначности $\nabla F(x, y)$ полином $R(x, y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x) - f(y))_{x,y}^{\leq \delta_f + d}$.

Меняя местами $f_j(x)$ и $F(x)$ в доказанном выше утверждении, получаем, что при неоднозначности $\nabla f_j(x, y)$ полином $R(x, y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого вида $\sum_{i: \neq j} (f_i(x) - f_i(y))\omega^i(x, y) + (F(x) - F(y))\Omega(x, y)$, где $\omega^i(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\leq \delta_f + d - \deg(f_i)}$, $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\leq \delta_f + d - d} = \mathbf{R}[x, y]^{\leq \delta_f}$, при этом $\Omega(x, y)$ не зависит от $F(x)$. Первое слагаемое $\in (f(x) - f(y))_{x,y}^{\leq \delta_f + d}$. Таким образом, при неоднозначности $\nabla f(x, y)$ полином $R(x, y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x) - f(y))_{x,y}^{\leq \delta_f + d}$ и слагаемого вида $(F(x) - F(y))\Omega(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\leq \delta_f}$ и не зависит от $F(x)$.

3. Пусть $F(x) = f(x)g(x) \in (f(x))_x^{\leq d}$, тогда в силу п. 2 леммы 1.2 полином $F(x)$ обладает также разностной производной $\nabla' F(x, y) = \nabla f(x, y)g(x) + f(y)\nabla g(x, y)$, она является ковектором полиномов степени $\leq d - 1$, т.е. является полуоднородной разностной производной полинома $F(x)$. Заметим, что если $\deg(F) < d$, то эта разностная производная может, тем не менее, быть ковектором полиномов, среди которых имеются полиномы степени $d - 1 > \deg(F) - 1$.

Тогда

$$R'(x, y) = \det||\nabla f(x, y) \;\; \nabla' F(x, y)|| =$$

$$= \det||\nabla f(x, y) \;\; \nabla f(x, y)g(x) + f(y)\nabla g(x, y)|| =$$

$$= \det||\nabla f(x, y) \;\; f(y)\nabla g(x, y)|| = \sum_i f_i(y) \det||\nabla f(x, y) \;\; \nabla g^i(x, y)||.$$

Так как $f(x)g(x) \in (f(x))_x^{\leq d}$, то $g^i(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leq d - \deg(f_i)}$, тогда в силу п. 1 теоремы имеет место $\det||\nabla f(x, y) \;\; \nabla g^i(x, y)|| \in \mathbf{R}[x, y]^{\leq \delta_f + d - \deg(f_i)}$, следовательно, $R'(x, y) \in (f(y))_{x,y}^{\leq d + \delta_f}$.

Имеет место $R(x, y) - R'(x, y) \in (f(x) - f(y))_{x,y}^{\leq d + \delta_f}$ в силу п. 2 теоремы об однозначности $R(x, y)$ при неоднозначности $\nabla F(x, y)$, следовательно, $R(x, y) \in (f(x), f(y))_{x,y}^{\leq d + \delta_f}$.

Аналогично показывается, что $\nabla'' F(x, y) = \nabla f(x, y)g(y) + f(x)\nabla g(x, y)$ является полуоднородной разностной производной полинома $F(x)$ и $R''(x, y) = \det||\nabla f(x, y) \;\; \nabla'' F(x, y)|| \in (f(x))_{x,y}^{\leq d + \delta_f}$.

Теорема 2.2. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$.

Пусть функционал $L(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\leq \Delta - 1}$, т.е. имеет костепень $\geq \Delta$, пусть $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leq d}$.

Положим $H(x) = L(y_*).\det||\nabla f(x, y) \;\; \nabla F(x, y)||$. Тогда:

1) $H(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leq d - \Delta + \delta_f}$, т.е. отображение $[L(x_*)]$ является полуоднородным отображением степени $\leq -(\Delta - \delta_f)$.

Пусть функционал $L(x_*)$ также аннулирует $(f(x))_x$, тогда:

2) $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leq d - \Delta + \delta_f}$ при неоднозначности $\nabla F(x, y)$ и определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leq d - \Delta + \delta_f}$ и слагаемого вида $L(y_*).(F(x) - F(y))\Omega(x, y)$ при неоднозначности $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\leq \delta_f}$ и не зависит от $F(x)$;

3) если $F(x) \in (f(x))_x^{\leq d}$, то $H(x) \in (f(x))_x^{\leq d - \Delta + \delta_f}$, т.е. отображение $[L(x_*)]$ отображает $(f(x))_x$ в себя и является на нем полуоднородным отображением степени $\leq -(\Delta - \delta_f)$; при некотором выборе $\nabla F(x, y)$ имеет место $H(x) = 0$.

Доказательство. Положим $R(x, y) = \det||\nabla f(x, y)\ \nabla F(x, y)||$.

1. В силу п. 1 теоремы 2.1 $R(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\le\delta_f + d} \ni \left(\mathbf{R}[x] \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[y]\right)^{\le\delta_f + d}$, а поскольку $L(y_*)$ является функционалом степени $\le -\Delta$, то в силу леммы 2.2 полином $H(x) = L(y_*).R(x, y)$ имеет степень $\le (\delta_f + d) + (-\Delta) = d - \Delta + \delta_f$. Получаем, что $H(x) \in \mathbf{R}[x]^{\le d-\Delta+\delta_f}$.

2. Пусть полином $W(x, y) \in (f(x))_{x,y}^{\le\delta_f + d} + (f(y))_{x,y}^{\le\delta_f + d}$. Тогда полином $L(y_*).W(x, y) \in L(y_*).(f(x))_{x,y}^{\le\delta_f+d} + L(y_*).(f(y))_{x,y}^{\le\delta_f+d} = L(y_*).(f(x))_{x,y}^{\le\delta_f+d}$, равенство имеет место, так как функционал $L(y_*)$ аннулирует $(f(y))_y$. Поскольку $(f(x))_{x,y}^{\le\delta_f+d} \ni ((f(x))_x \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[y])^{\le\delta_f+d}$ и $L(y_*)$ является функционалом степени $\le -\Delta$, то в силу леммы 2.2 имеет место $L(y_*).(f(x))_{x,y}^{\le\delta_f+d} \subseteq (f(x))_x^{\le d-\Delta+\delta_f}$. Тогда $L(y_*).W(x, y) \in (f(x))_x^{\le d-\Delta+\delta_f}$.

В силу п. 2 теоремы 2.1 $R(x, y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x) - f(y))_{x,y}^{\le\delta_f+d} \subseteq (f(x))_{x,y}^{\le\delta_f+d} + (f(y))_{x,y}^{\le\delta_f+d}$ при неоднозначности $\nabla F(x, y)$. Тогда $H(x) = L(y_*).R(x, y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\le d-\Delta+\delta_f}$.

В силу п. 2 теоремы 2.1 $R(x, y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x) - f(y))_{x,y}^{\le\delta_f+d} \subseteq (f(x))_{x,y}^{\le\delta_f+d} + (f(y))_{x,y}^{\le\delta_f+d}$ и слагаемого вида $(F(x) - F(y)) \cdot \Omega(x, y)$ при неоднозначности $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\le\delta_f}$ и не зависит от $F(x)$. Тогда $H(x) = L(y_*).R(x, y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\le d-\Delta+\delta_f}$ и слагаемого вида $L(y_*).(F(x) - F(y))\Omega(x, y)$ при неоднозначности $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\le\delta_f}$ и не зависит от $F(x)$.

3. Поскольку $F(x) \in (f(x))_x^{\le d}$, то в силу п. 3 теоремы 2.1 $R(x, y) \in (f(y))_{x,y}^{\le\delta_f+d}$ при некотором выборе $\nabla F(x, y)$, тогда $H(x) = L(y_*).R(x, y) = 0$, так как $L(y_*)$ аннулирует $(f(y))_y$. Поскольку в силу п. 2 теоремы $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\le d-\Delta+\delta_f}$ при неоднозначности $\nabla F(x, y)$, то имеет место $H(x) \in (f(x))_x^{\le d-\Delta+\delta_f}$ при любом выборе $\nabla F(x, y)$.

Теорема 2.3. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$.

Пусть функционал $L_1(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\Delta_1 - 1}$, т.е. имеет костепень $\ge \Delta_1$, пусть функционал $L_2(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\Delta_2 - 1}$, т.е. имеет костепень $\ge \Delta_2$.

Положим $L(x_*) = L_1(x_*).L_2(y_*).\det||\nabla f(x, y)\ \nabla_x(x, y)||$. Тогда:

1) $L(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\Delta_1+\Delta_2-\delta_f-1}$, т.е. имеет костепень $\ge \Delta_1 + \Delta_2 - \delta_f$.

Пусть функционалы $L_1(x_*)$ и $L_2(x_*)$ также аннулируют $(f(x))_x$, тогда:

2) $L(x_*)$ определяется однозначно независимо от выбора $\nabla_x(x, y)$ и однозначно с точностью до слагаемого вида

$$L_1(x_*)(L_2(y_*).\Omega(x, y)) - L_2(x_*)(L_1(y_*).\Omega(y, x))$$

независимо от выбора $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\le \delta_f}$;

3) $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$.

Доказательство. Пусть $F(x) \in \mathbf{R}[x]$, положим

$$H(x) = L_2(y_*).\det||\nabla f(x, y) \ \nabla_x(x, y)||.F(x) = L_2(y_*).\det||\nabla f(x, y) \ \nabla F(x, y)||.$$

2. В силу п. 2 теоремы 2.2 полином $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x$, независимо от выбора $\nabla F(x, y)$. Следовательно, $L(x_*).F(x) = L_1(x_*).H(x)$ определяется однозначно, поскольку $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$. В силу произвольности $F(x) \in \mathbf{R}[x]$ функционал $L(x_*)$ определяется однозначно независимо от выбора $\nabla_x(x, y)$.

В силу п. 2 теоремы 2.2 полином $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x$ и слагаемого вида $L_2(y_*).(F(x) - F(y))\Omega(x, y)$ при неоднозначности $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\le \delta_f}$ и не зависит от $F(x)$. Тогда $L(x_*).F(x) = L_1(x_*).H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $L(x_*).(f(x))_x$, равного нулю, поскольку $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$, и слагаемого вида

$$L_1(x_*).L_2(y_*).(F(x) - F(y))\Omega(x, y) =$$

$$= L_1(x_*)(L_2(y_*).\Omega(x, y)).F(x) - L_2(y_*)(L_1(x_*).\Omega(x, y)).F(y) =$$

$$= L_1(x_*)(L_2(y_*).\Omega(x, y)).F(x) - L_2(x_*)(L_1(y_*).\Omega(y, x)).F(x) =$$

$$= (L_1(x_*)(L_2(y_*).\Omega(x, y)) - L_2(x_*)(L_1(y_*).\Omega(y, x))).F(x).$$

Следовательно, в силу произвольности $F(x) \in \mathbf{R}[x]$ функционал $L(x_*)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого вида $L_1(x_*)(L_2(y_*).\Omega(x, y)) - - L_2(x_*)(L_1(y_*).\Omega(y, x))$.

3. Пусть $F(x) \in (f(x))_x$, тогда в силу п. 3 теоремы 2.2 $H(x) \in (f(x))_x$, а поскольку $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$, то $L(x).F(x) = L_1(x_*).H(x) = 0$. Следовательно, в силу произвольности $F(x) \in (f(x))_x$ функционал $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$.

1. Имеет место $L(x_*) = L_1(x_*).[L_2(x_*)]$. Функционал $L_1(x_*)$ имеет степень $\le -\Delta_1$, в силу п. 1 теоремы 2.2 $[L_2(x_*)]$ является полуоднородным отображением степени $\le -(\Delta_2 - \delta_f)$, следовательно, в силу леммы 2.3 $L(x_*) = = L_1(x_*).[L_2(x_*)]$ является функционалом степени $\le (-\Delta_1) + (-\Delta_2 + \delta_f) = = -(\Delta_1 + \Delta_2 - \delta_f)$.

Теорема 2.4. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$.

Пусть функционал $L(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le \delta_f + \delta}$, т.е. имеет костепень $\ge \delta_f + (\delta + 1)$, где $\delta \ge 0$, пусть $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\le d}$.

Положим $H(x) = L(y_*).\det||\nabla f(x, y) \ \nabla F(x, y)||$. Тогда:

1) $H(x) \in \mathbf{R}[x]^{\le d - \delta - 1}$, т.е. отображение $[L(x_*)]$ является полуоднородным отображением степени $\le -(\delta + 1)$.

Пусть функционал $L(x_*)$ также аннулирует $(f(x))_x$, тогда:

2) $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\le d-\delta-1}$ при неоднозначности $\nabla F(x, y)$ и определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\le d-\delta-1}$ и слагаемого вида $-L(y_*).F(y)\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x]^{\le \min(\delta_f, d-\delta-1)} \subseteq$

$\subseteq \mathbf{R}[x]^{\le\delta_f}$ при неоднозначности $\nabla f(x,\ y)$, где $\Omega(x,\ y)\in\mathbf{R}[x,\ y]^{\le\delta_f}$ и не зависит от $F(x)$;

3) если $F(x)\in(f(x))_x^{\le d}$, то $H(x)\in(f(x))_x^{\le d-\delta-1}$, т.е. отображение $[L(x_*)]$ отображает $(f(x))_x$ в себя и является на нем полуоднородным отображением степени $\le-(\delta+1)$; при некотором выборе $\nabla F(x,\ y)$ имеет место $H(x)=0$.

Доказательство.1, 3. Пункты 1 и 3 теоремы получаются соответственно из пп. 1 и 3 теоремы 2.2 путем подстановки $\Delta \mapsto \delta_f+\delta+1$. При этом $\Delta-\delta_f \mapsto \delta+1,\ d-\Delta+\delta_f \mapsto d-\delta-1$.

2. В силу п. 2 теоремы 2.2 $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\le d-\Delta+\delta_f} \mapsto (f(x))_x^{\le d-\delta-1}$ при неоднозначности $\nabla F(x,\ y)$.

В силу п. 2 теоремы 2.2 полином $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\le d-\Delta+\delta_f} \mapsto (f(x))_x^{\le d-\delta-1}$ и слагаемого вида

$$L(y_*).(F(x)-F(y))\cdot\Omega(x,\ y)=F(x)\cdot L(y_*).\Omega(x,\ y)-L(y_*).F(y)\cdot\Omega(x,\ y)$$

при неоднозначности $\nabla f(x,\ y)$, где $\Omega(x,\ y)\in\mathbf{R}[x,\ y]^{\le\delta_f}$ и не зависит от $F(x)$. В силу леммы 2.1 функционал $L(y_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[y]^{\le\delta_f}$, поскольку имеет костепень $\ge\delta_f+\delta+1>\delta_f$, следовательно, $L(y_*).\Omega(x,\ y)=0$, поскольку $\Omega(x,\ y)$ имеет по y степень $\le\delta_f$. Тогда $F(x)\cdot(L(y_*).\Omega(x,\ y))=F(x)\cdot 0=0$. Получаем, что $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\le d-\delta-1}$ и слагаемого вида $-L(y_*).F(y)\Omega(x,\ y)$ при неоднозначности $\nabla f(x,\ y)$, где $\Omega(x,\ y)\in\mathbf{R}[x,\ y]^{\le\delta_f}$ и не зависит от $F(x)$.

Поскольку $F(y)\Omega(x,\ y)\in\mathbf{R}[x,\ y]^{\le\delta_f+d} \ni (\mathbf{R}[x]\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{R}[y])^{\le\delta_f+d}$ и $L(y_*)$ является функционалом степени $\le-(\delta_f+\delta+1)$, то в силу леммы 2.2 $L(y_*).F(y)\Omega(x,\ y)\in\mathbf{R}[x]^{\le(\delta_f+d)-(\delta_f+\delta+1)}=\mathbf{R}[x]^{\le d-\delta-1}$. В то же время $L(y_*).F(y)\Omega(x,\ y)\in\mathbf{R}[x]^{\le\delta_f}$, поскольку $\Omega(x,\ y)$ по x имеет степень $\le\delta_f$. Следовательно, $-L(y_*).F(y)\Omega(x,\ y)\in\mathbf{R}[x]^{\le\min(\delta_f,d-\delta-1)}$.

Теорема 2.5. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ — переменные, $f(x)=(f_1(x),\ \ldots,f_{n-1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f=\sum_{i=1}^{n-1}\deg(f_i)-n$.

Пусть функционал $L_1(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\delta_f+\delta_1}$, т.е. имеет костепень $\ge\delta_f+(\delta_1+1)$, где $\delta_1\ge 0$, пусть функционал $L_2(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\delta_f+\delta_2}$, т.е. имеет костепень $\ge\delta_f+(\delta_2+1)$, где $\delta_2\ge 0$.

Положим $L(x_*)=L_1(x_*).L_2(y_*).\det||\nabla f(x,\ y)\ \ \nabla_x(x,\ y)||$. Тогда:

1) $L(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$, т.е. имеет костепень $\ge\delta_f+(\delta_1+1)+(\delta_2+1)$.

Пусть функционалы $L_1(x_*)$ и $L_2(x_*)$ также аннулируют $(f(x))_x$, тогда:

2) $L(x_*)$ определяется однозначно независимо от выбора $\nabla_x(x,\ y)$ и выбора $\nabla f(x,\ y)$;

3) $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$.

Доказательство.1. Если в п. 1 теоремы 2.3 подставить $\Delta_1\mapsto\delta_f+\delta_1+1$, $\Delta_2\mapsto\delta_f+\delta_2+1$, то получим, что $L(x_*)$ имеет костепень $\ge\Delta_1+\Delta_2-\delta_f\mapsto$ $\mapsto(\delta_f+\delta_1+1)+(\delta_f+\delta_2+1)-\delta_f=\delta_f+(\delta_1+1)+(\delta_2+1)$.

2. В силу п. 2 теоремы 2.3 $L(x_*)$ определяется однозначно независимо от выбора $\nabla_x(x, y)$ и определяется однозначно с точностью до слагаемого вида

$$L_1(x_*)(L_2(y_*).\Omega(x, y)) - L_2(x_*)(L_1(y_*).\Omega(y, x))$$

независимо от выбора $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{\le \delta_f}$.

В силу леммы 2.1 $L_p(y_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[y]^{\le \delta_f}$, так как является функционалом костепени $\ge \delta_f + \delta_p + 1 > \delta_f$, где $p = 1, 2$. Следовательно, $L_2(y_*).\Omega(x, y) = 0$, поскольку $\Omega(x, y)$ имеет по y степень $\le \delta_f$; и $L_1(y_*).\Omega(y, x) = 0$, поскольку $\Omega(y, x)$ имеет по y степень $\le \delta_f$. Получаем, что оба слагаемые равны нулю, следовательно, $L(x_*)$ определяется однозначно независимо от выбора $\nabla f(x, y)$.

3. Утверждение есть следствие п. 3 теоремы 2.3.

Теорема 2.6. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$.

Пусть $L(x_*)$ и $L'(x_*)$ — функционалы такие, что $L(x_*) \equiv L'(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta' - 1}$, где $\Delta' \ge d + \delta_f + 1$, и $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\le d}$, тогда $L(x_*) * F(x) = L'(x_*) * F(x)$.

Доказательство. Функционал $l(x_*) = L'(x_*) - L(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta' - 1}$, так как $L(x_*) \equiv L'(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta' - 1}$. Тогда в силу п. 1 теоремы 2.2 имеет место $l(x_*) * F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\le d - \Delta' + \delta_f} = \{0\}$; здесь $d - \Delta' + \delta_f \le -1$, так как $\Delta' \ge d + \delta_f + 1$. Следовательно, $(L'(x_*) - L(x_*)) * F(x) = l(x_*) * F(x) = 0$, а значит, $L(x_*) * F(x) = L'(x_*) * F(x)$.

Теорема 2.7. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$.

Пусть $L_1(x_*)$, $L_2(x_*)$, $L'_1(x_*)$, $L'_2(x_*)$ — функционалы такие, что $L_1(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta_1 - 1}$, $L_2(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta_2 - 1}$, $L'_1(x_*) \equiv L_1(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta_1' - 1}$, $L_2'(x_*) \equiv L_2(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta'_2 - 1}$, где $\Delta_1 < \Delta'_1$ и $\Delta_2 < \Delta'_2$. Тогда имеет место

$$L_1(x_*) * L_2(x_*) \equiv L'_1(x_*) * L'_2(x_*)$$

на $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta' - 1}$, где $\Delta' = \min(\Delta_1' + \Delta_2, \Delta_1 + \Delta_2') - \delta_f$. При этом $L_1(x_*) * L_2(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta - 1}$, где $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 - \delta_f$, и имеет место $\Delta < \Delta'$, $\Delta' - \Delta = \min(\Delta'_1 - \Delta_1, \Delta'_2 - \Delta_2)$.

Доказательство. Имеет место

$$L_1(x_*) * L_2(x_*) - L_1'(x_*) * L_2'(x_*) =$$
$$= (L_1(x_*) - L_1'(x_*)) * L_2(x_*) + L_1'(x_*) * (L_2(x_*) - L_2'(x_*)).$$

При этом $L_1(x_*) - L_1'(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta'_1 - 1}$, $L_2(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta_2 - 1}$, $L_1'(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le \Delta_1 - 1}$, $L_2(x_*) - L_2'(x_*)$ аннулирует

$\mathbf{R}[x]^{\le\Delta'_2-1}$. Тогда в силу п. 1 теоремы 2.3 первое слагаемое аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\Delta'_1+\Delta_2-\delta_f-1}$, второе слагаемое аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\Delta_1+\Delta'_2-\delta_f-1}$, следовательно, их сумма аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\Delta'-1}$. Тогда $L_1(x_*) * L_2(x_*) \equiv$ $\equiv L'_1(x_*) * L'_2(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\le\Delta'-1}$.

Функционал $L_1(x_*) * L_2(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\Delta_1+\Delta_2-\delta_f-1}$ в силу п. 1 теоремы 2.3, так как $L_1(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\Delta_1-1}$, $L_2(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\le\Delta_2-1}$.

3. ОДНОРОДНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей.

Лемма 3.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — градуированный модуль над $\mathbf{R}$, тогда $\mathbf{l} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathbf{R})^{=-\Delta}$ эквивалентно $\mathbf{l} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathbf{R})$ и $\mathbf{l}$ аннулирует $\mathfrak{M}^{=d}$ для всех $d \ne \Delta$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathbf{l} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathbf{R})^{=-\Delta}$. Если $d \ne \Delta$, то $\mathbf{l}(\mathfrak{M}^{=d}) \subseteq \mathbf{R}^{=d-\Delta} = \{0\}$, поскольку $d - \Delta \ne 0$, следовательно, $\mathbf{l}$ аннулирует $\mathfrak{M}^{=d}$.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathbf{l}$ аннулирует $\mathfrak{M}^{=d}$ для всех $d \ne \Delta$. Если $d = \Delta$, то $\mathbf{l}(\mathfrak{M}^{=d}) \subseteq \mathbf{R} = \mathbf{R}^{=d-\Delta}$, поскольку $d - \Delta = 0$. Если $d \ne \Delta$, то $\mathbf{l}(\mathfrak{M}^{=d}) \subseteq \{0\} = \mathbf{R}^{=d-\Delta}$, поскольку $d - \Delta \ne 0$. Следовательно, $\mathbf{l}$ является однородным отображением степени $= -\Delta$.

Лемма 3.2. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — градуированные модули над $\mathbf{R}$, $\mathbf{l} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{N}, \mathbf{R})^{=-\Delta}$. Тогда отображение $\theta\colon \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} \ni \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \mapsto \mathbf{m} \cdot \mathbf{l}(\mathbf{n}) \in \mathfrak{M}$ является однородным линейным над $\mathbf{R}$ отображением степени $= -\Delta$.

Доказательство. Ясно, что θ является линейным над $\mathbf{R}$ отображением. Любой элемент из $(\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N})^{=d}$ есть сумма элементов вида $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$, где $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}^{=d-\delta}$, $\mathbf{n} \in \mathfrak{N}^{=\delta}$. Тогда $\mathbf{l}(\mathbf{n}) \in \mathbf{R}^{=\delta-\Delta}$ и $\theta\colon \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \mapsto \mathbf{m} \cdot \mathbf{l}(\mathbf{n}) \in$ $\in \mathfrak{M}^{=d-\delta} \cdot \mathbf{R}^{=\delta-\Delta} \subseteq \mathfrak{M}^{=d-\Delta}$. Покажем, что имеет место последнее включение. Если $\delta = \Delta$, то $\mathfrak{M}^{=d-\delta} \cdot \mathbf{R}^{=\delta-\Delta} = \mathfrak{M}^{=d-\delta} \cdot \mathbf{R} \subseteq \mathfrak{M}^{=d-\delta} = \mathfrak{M}^{=d-\Delta}$, первое равенство имеет место, поскольку $\mathbf{R}^{=\delta-\Delta} = \mathbf{R}$, здесь $\delta - \Delta = 0$; последнее равенство имеет место, поскольку $d - \delta = d - \Delta$. Если $\delta \ne \Delta$, то $\mathfrak{M}^{=d-\delta} \cdot \mathbf{R}^{=\delta-\Delta} = \mathfrak{M}^{=d-\delta} \cdot \{0\} = \{0\} \subseteq \mathfrak{M}^{=d-\Delta}$, первое равенство имеет место, поскольку $\mathbf{R}^{=\delta-\Delta} = \{0\}$, здесь $\delta - \Delta \ne 0$. Следовательно, θ является однородным линейным над $\mathbf{R}$ отображением степени $= -\Delta$.

Лемма 3.3. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — градуированные модули над $\mathbf{R}$, $\mathbf{l} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{N}, \mathbf{R})^{=-\Delta}$. Пусть $\psi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ — однородное линейное над $\mathbf{R}$ отображение степени $= \delta$, тогда $\mathbf{l}.\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathbf{R})^{=-\Delta+\delta}$.

Доказательство. Имеет место $(\mathbf{l}.\psi)(\mathfrak{M}^{=d}) = \mathbf{l}(\psi(\mathfrak{M}^{=d})) \subseteq \mathbf{l}(\mathfrak{N}^{=d+\delta}) \subseteq$ $\subseteq \mathbf{R}^{=d+\delta-\Delta}$. Первое включение имеет место, поскольку $\psi(\mathfrak{M}^{=d}) \subseteq \mathfrak{N}^{=d+\delta}$, так как $\psi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ является однородным отображением степени $= \delta$; второе включение имеет место, так как $\mathbf{l}$ является однородным отображением степени $= -\Delta$. Следовательно, $\mathbf{l}.\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}, \mathbf{R})^{=-\Delta+\delta}$.

Теорема 3.1. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ — переменные, $f(x)=(f_1(x),\dots,f_{n-1}(x))$ — однородные полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f=\sum_{i=1}^{n-1}\deg(f_i)-n$. Пусть $F(x)\in\mathbf{R}[x]^{=d}$.

Положим $R(x,y)=\det\|\nabla f(x,y)\ \nabla F(x,y)\|$, тогда:

1) полином $R(x,y)\in\mathbf{R}[x,y]^{=\delta_f+d}$, т.е. отображение $J_x(x,y)$ является однородным отображением степени $=\delta_f$;

2) полином $R(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x)-f(y))_{x,y}^{=\delta_f+d}$ независимо от выбора $\nabla F(x,y)$ и определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x)-f(y))_{x,y}^{=\delta_f+d}$ и слагаемого $(F(x)-F(y))\cdot\Omega(x,y)$ независимо от выбора $\nabla f(x,y)$, где $\Omega(x,y)\in\mathbf{R}[x,y]^{=\delta_f+d}$ и не зависит от $F(x)$;

3) если $F(x)\in(f(x))_x^{=d}$, то $R(x,y)\in(f(x),f(y))_{x,y}^{=d+\delta_f}$, т.е. отображение $J_x(x,y)$ индуцирует однородное отображение $(f(x))_x\to(f(x),f(y))_{x,y}$ степени $=\delta_f$; при некотором выборе $\nabla F(x,y)$ имеет место $R(x,y)\in(f(x))_{x,y}^{=d+\delta_f}$, при некотором выборе $\nabla F(x,y)$ имеет место $R(x,y)\in(f(y))_{x,y}^{=d+\delta_f}$.

Доказательство. 1, 2. Доказательство пп. 1 и 2 теоремы полностью повторяет доказательство пп. 1 и 2 теоремы 2.1 соответственно, с той лишь разницей, что слово «полином» заменяется на фразу «однородный полином», слово «полуоднородная», относящееся к фразе «разностная производная», — на слово «однородная», знак неравенства $\le$ перед степенями — на знак равенства $=$ и в п. 2 теоремы вместо п. 3 леммы 1.2 используется п. 4 леммы 1.2.

3. Пусть $F(x)=f(x)g(x)\in(f(x))_x^{=d}$, тогда в силу п. 2 леммы 1.2 $F(x)$ обладает также разностной производной $\nabla f(x,y)g(x)+f(y)\nabla g(x,y)$, она является ковектором однородных полиномов степени $=d-1$, т.е. является однородной разностной производной полинома $F(x)$.

Далее, начиная со второго абзаца доказательство п. 3 теоремы полностью повторяет доказательство п. 3 теоремы 2.1, с той лишь разницей, что знак неравенства $\le$ перед степенями заменяется на знак равенства $=$.

Теорема 3.2. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ — переменные, $f(x)=(f_1(x),\dots,f_{n-1}(x))$ — однородные полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f=\sum_{i=1}^{n-1}\deg(f_i)-n$.

Пусть однородный функционал $L(x_*)$ имеет костепень $=\Delta$, пусть $F(x)\in\mathbf{R}[x]^{=d}$.

Положим $H(x)=L(y_*).\det\|\nabla f(x,y)\ \nabla F(x,y)\|$. Тогда:

1) $H(x)\in\mathbf{R}[x]^{=d-\Delta+\delta_f}$, т.е. отображение $[L(x_*)]$ является однородным отображением степени $=-(\Delta-\delta_f)$.

Пусть функционал $L(x_*)$ также аннулирует $(f(x))_x$, тогда:

2) $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{=d-\Delta+\delta_f}$ при неоднозначности $\nabla F(x,y)$, и определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{=d-\Delta+\delta_f}$ и слагаемого вида $L(y_*).(F(x)-F(y))\Omega(x,y)$ при неоднозначности $\nabla f(x,y)$, где $\Omega(x,y)\in\mathbf{R}[x,y]^{=\delta_f+d}$ и не зависит от $F(x)$;

3) если $F(x) \in (f(x))_x^{=d}$, то $H(x) \in (f(x))_x^{=d-\Delta+\delta_f}$, т.е. отображение $[L(x_*)]$ отображает $(f(x))_x$ в себя и является на нем однородным отображением степени $= -(\Delta - \delta_f)$; при некотором выборе $\nabla F(x, y)$ имеет место $H(x) = 0$.

Доказательство. Доказательство теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2.2, с той лишь разницей, что слово «полином» заменяется на фразу «однородный полином», слово «функционал» — на фразу «однородный функционал», знак неравенства $\leq$ перед степенями — на знак равенства =, вместо пп. 1, 2, 3 теоремы 2.1 используются пп. 1, 2, 3 теоремы 3.1 соответственно, вместо леммы 2.2 используется лемма 3.2.

Теорема 3.3. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ — однородные полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$.

Пусть $L_1(x_*)$ — однородный функционал костепени $= \Delta_1$, $L_2(x_*)$ — однородный функционал костепени $= \Delta_2$.

Положим $L(x_*) = L_1(x_*).L_2(y_*).\det||\nabla f(x, y)\ \nabla_x(x, y)||$. Тогда:

1) $L(x_*)$ является однородным функционалом костепени $= \Delta_1 + \Delta_2 - \delta_f$.

Пусть функционалы $L_1(x_*)$ и $L_2(x_*)$ также аннулируют $(f(x))_x$, тогда:

2) $L(x_*)$ определяется однозначно независимо от выбора $\nabla_x(x, y)$ и однозначно с точностью до слагаемого вида

$$L_1(x_*)(L_2(y_*).\Omega(x, y)) - L_2(x_*)(L_1(y_*).\Omega(y, x))$$

независимо от выбора $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{=\delta_f + d}$;

3) $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$.

Доказательство. Доказательство теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2.3, с той лишь разницей, что слово «функционал» заменяется на фразу «однородный функционал», фраза «полуоднородное отображение» — на фразу «однородное отображение», знак неравенства $\leq$ перед степенями — на знак равенства =, вместо пп. 1, 2, 3 теоремы 2.2 используются пп. 1, 2, 3, теоремы 3.2 соответственно, вместо леммы 2.3 используется лемма 3.3.

Теорема 3.4. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ — однородные полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$.

Пусть однородный функционал $L(x_*)$ имеет костепень $= \delta_f + (\delta + 1)$, где $\delta \geq 0$, пусть $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{=d}$.

Положим $H(x) = L(y_*).\det||\nabla f(x, y)\ \nabla F(x, y)||$. Тогда:

1) $H(x) \in \mathbf{R}[x]^{=d-\delta-1}$, т.е. отображение $[L(x_*)]$ является однородным отображением степени $= -(\delta + 1)$.

Пусть функционал $L(x_*)$ также аннулирует $(f(x))_x$, тогда:

2) $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{=d-\delta-1}$ при неоднозначности $\nabla F(x, y)$ и определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{=d-\delta-1}$ и слагаемого вида $-L(y_*).F(y)\Omega(x, y) \in \in \mathbf{R}[x]^{=d-\delta-1} \mid \mathbf{R}[x]^{\leq\delta_f}$ при неоднозначности $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{=\delta_f + d}$; если $d > \delta_f + \delta + 1$, то $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{=d-\delta-1}$ при неоднозначности $\nabla f(x, y)$;

3) если $F(x) \in (f(x))_x^{=d}$, то $H(x) \in (f(x))_x^{=d-\delta-1}$, т.е. отображение $[L(x_*)]$ ото-

бражает $(f(x))_x$ в себя и является на нем однородным отображением степени $= -(\delta + 1)$; при некотором выборе $\nabla F(x, y)$ имеет место $H(x) = 0$.

Доказательство.1, 3. Пункты 1 и 3 теоремы получаются соответственно из пп. 1 и 3 теоремы 3.2 путем подстановки $\Delta @@ \delta_f + \delta + 1$. При этом $\Delta - \delta_f \mapsto \delta + 1$, $d - \Delta + \delta_f @@ d - \delta - 1$.

2. В силу п. 2 теоремы 3.2 $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{=d-\Delta+\delta_f} @@ (f(x))_x^{=d-\delta-1}$ при неоднозначности $\nabla F(x, y)$.

В силу п. 2 теоремы 3.2 полином $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{=d-\Delta+\delta_f} \mapsto (f(x))_x^{=d-\delta-1}$ и слагаемого вида

$$L(y_*).(F(x) - F(y)) \cdot \Omega(x, y) = F(x) \cdot L(y_*).\Omega(x, y) - L(y_*).F(y) \cdot \Omega(x, y)$$

при неоднозначности $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{=\delta_f + d}$ и не зависит от $F(x)$. В силу леммы 3.1 $L(y_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[y]^{\le \delta_f}$, поскольку является однородным функционалом костепени $= \delta_f + \delta + 1 > \delta_f$, следовательно, $L(y_*).\Omega(x, y) = 0$, поскольку $\Omega(x, y)$ имеет по y степень $\le \delta_f$. Тогда $F(x) \cdot (L(y_*).\Omega(x, y)) = F(x) \cdot 0 = 0$. Получаем, что $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{=d-\delta-1}$ и слагаемого вида $-L(y_*).F(y)\Omega(x, y)$ при неоднозначности $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{=\delta_f + d}$.

Поскольку $F(y)\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]^{=\delta_f + d} \ni (\mathbf{R}[x] \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[y])^{=\delta_f + d}$ и $L(y_*)$ является однородным функционалом степени $= -(\delta_f + \delta + 1)$, то в силу леммы 3.2 $L(y_*).F(y)\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x]^{=(\delta_f + d) - (\delta_f + \delta + 1)} = \mathbf{R}[x]^{=d-\delta-1}$. В то же время $L(y_*).F(y)\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x]^{\le \delta_f}$, поскольку $\Omega(x, y)$ имеет по x степень $\le \delta_f$. Следовательно, $-L(y_*).F(y)\Omega(x, y) \in \mathbf{R}[x]^{=d-\delta-1} \mid \mathbf{R}[x]^{\le \delta_f}$.

Если $d - \delta - 1 > \delta_f$, что эквивалентно $d > \delta_f + \delta + 1$, то $\mathbf{R}[x]^{=d-\delta-1} \mid \mid \mathbf{R}[x]^{\le \delta_f} = \{0\}$, тогда $-L(y_*).F(y)\Omega(x, y) = 0$. Следовательно, $H(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\le d-\delta-1}$ при неоднозначности $\nabla f(x, y)$.

Теорема 3.5. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_{n-1}(x))$ — однородные полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$.

Пусть однородный функционал $L_1(x_*)$ имеет костепень $= \delta_f + (\delta_1 + 1)$, где $\delta_1 \ge 0$, однородный функционал $L_2(x_*)$ имеет костепень $= \delta_f + (\delta_2 + 1)$, где $\delta_2 \ge 0$.

Положим $L(x_*) = L_1(x_*).L_2(y_*).\det||\nabla f(x, y) \ \nabla_x(x, y)||$. Тогда:

1) $L(x_*)$ является однородным функционалом костепени $= \delta_f + (\delta_1 + 1) + (\delta_2 + 1)$.

Пусть функционалы $L_1(x_*)$ и $L_2(x_*)$ также аннулируют $(f(x))_x$, тогда:

2) $L(x_*)$ определяется однозначно независимо от выбора $\nabla_x(x, y)$ и выбора $\nabla f(x, y)$;

3) $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$.

Доказательство.1. Если в п. 1 теоремы 3.3 подставить $\Delta_1 @@ \delta_f + \delta_1 + 1$, $\Delta_2 @@ \delta_f + \delta_2 + 1$, то получим, что $L(x_*)$ является однородным функционалом к о с т е п е н и $=\Delta_1+\Delta_2-\delta_f$ @@ $(\delta_f+\delta_1+1)+(\delta_f+\delta_2+1)-\delta_f=\delta_f+$ $(\delta_1+1)+ +(\delta_2+1)$.

2. В силу п. 2 теоремы 3.3 $L(x_*)$ определяется однозначно независимо от выбора $\nabla_x(x, y)$ и определяется однозначно с точностью до слагаемого вида

$$L_1(x_*)(L_2(y_*).\Omega(x, y))-L_2(x_*)(L_1(y_*).\Omega(y, x))$$

независимо от выбора $\nabla f(x, y)$, где $\Omega(x, y)\in\mathbf{R}[x, y]^{=\delta_f+d}$. В силу леммы 3.1 $L_p(y_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[y]^{\le\delta_f}$, поскольку является однородным функционалом костепени $=\delta_f+\delta_p+1>\delta_f$, где $p=1,2$. Следовательно, $L_2(y_*).\Omega(x, y)=0$, поскольку $\Omega(x, y)$ имеет по y степень $\le\delta_f$; и $L_1(y_*).\Omega(y, x)=0$, поскольку $\Omega(y, x)$ имеет по y степень $\le\delta_f$. Получаем, что оба слагаемые равны нулю, следовательно, $L(x_*)$ определяется однозначно независимо от выбора $\nabla f(x, y)$.

3. Утверждение есть следствие п. 3 теоремы 3.3.

4. ПРИМЕРЫ

Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ — переменные, $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$; пусть функционалы $l(x_*)$ и $L(x_*)$ аннулируют $(f(x))_x$. Положим $\Lambda_0(x_*)=l(x_*)$, для $p\ge 1$

$$\Lambda_{p+1}(x_*)=\Lambda_p(x_*).L(y_*).\det||\nabla f(x, y)\ \ \nabla_x(x, y)||,$$

где разностные производные $\nabla f_i(x, y)$ и оператор разностной производной $\nabla_x(x, y)$ определены, как в лемме 1.1. Пусть $\Lambda(x_*)$ — последовательность $(\Lambda_1(x_*), \Lambda_2(x_*), \ldots)$, Δ — последовательность $(\operatorname{codeg}(\Lambda_1), \operatorname{codeg}(\Lambda_2), \ldots)$. В силу п. 3 теоремы 2.3 (3.3) функционал $\Lambda_p(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$ для всех $p\ge 1$.

Пусть $\lambda\in\mathbf{R}^n$ и $f(\lambda)=0$. Если ранг матрицы $\left\|\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}(\lambda)\right\|$ равен $n-1$, то точка $x\equiv\lambda$ является простой точкой кривой $f(x)\equiv 0$; если ранг этой матрицы $<n-1$, то точка $x\equiv\lambda$ является особой точкой этой кривой.

Пример 4.1. Пусть

$$n=1,\ f(x)=(),\ l(x_*)=[x_1^0]_*, L(x_*)=[x_1^0]_*;$$

тогда $\delta_f=-1$, $\operatorname{codeg}(l)=0=\delta_f+1$, $\operatorname{codeg}(L)=0=\delta_f+1$.

Имеет место

$$\Lambda(x_*)=([x_1^1]_*, [x_1^2]_*, [x_1^3]_*, [x_1^4]_*, [x_1^5]_*, \ldots),\ \Delta=(1, 2, 3, 4, 5, \ldots).$$

Пример 4.2. Пусть

$$n=2,\ f(x)=(x_2),\ l(x_*)=[x_1^0x_2^0]_*, L(x_*)=[x_1^0x_2^0]_*;$$

тогда $\delta_f=-1$, $\operatorname{codeg}(l)=0=\delta_f+1$, $\operatorname{codeg}(L)=0=\delta_f+1$.

Имеет место

$$\Lambda(x_*)=(-[x_1^1x_2^0]_*, [x_1^2x_2^0]_*, -[x_1^3x_2^0]_*, [x_1^4x_2^0]_*, \ldots),\ \Delta=(1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Пример 4.3. Пусть

$$n=2,\ f(x)=(x_2^2),\ l(x_*)=[x_1^0x_2^1]_*,\ L(x_*)=[x_1^0x_2^1]_*;$$

тогда $\delta_f=0$, $\operatorname{codeg}(l)=1=\delta_f+1$, $\operatorname{codeg}(L)=1=\delta_f+1$.

Имеет место

$$\Lambda(x_*)=(-[x_1^1x_2^1]_*,[x_1^2x_2^1]_*,\ -[x_1^3x_2^1]_*,[x_1^4x_2^1]_*,\dots),\ \Delta=(2,3,4,5,\dots).$$

Пример 4.4. Пусть

$$n=2,\ f(x)=(x_2^2),\ l(x_*)=[x_1^0x_2^1]_*,\ L(x_*)=[x_1^0x_2^0]_*;$$

тогда $\delta_f=0$, $\operatorname{codeg}(l)=1=\delta_f+1$, $\operatorname{codeg}(L)=0<\delta_f+1$.

Имеет место

$$\Lambda(x_*)=(-[x_1^1x_2^0]_*,0_*,0_*,0_*,\dots),\ \Delta=(1,\infty,\infty,\infty,\dots).$$

Пример 4.5. Пусть

$$n=2,\ f(x)=(x_1+x_2)(x_1-x_2),\ l(x_*)=[x_1^0x_2^1]_*,\ L(x_*)=[x_1^0x_2^1]_*;$$

тогда

$$\delta_f=-1,\ \operatorname{codeg}(l)=1=\delta_f+1,\ \operatorname{codeg}(L)=1=\delta_f+1.$$

Имеет место

$$\Lambda(x_*)=([x_1^1x_2^1]_*,[x_1^2x_2^1]_*+[x_1^0x_2^3]_*,[x_1^3x_2^1]_*+[x_1^1x_2^3]_*,$$

$$[x_1^4x_2^1]_*+[x_1^2x_2^3]_*+[x_1^0x_2^5]_*,\dots),\ \Delta=(2,3,4,5,\dots).$$

Пример 4.6. Пусть

$$n=2,\ f(x)=(x_1+x_2+ax_1x_2),\ l(x_*)=[x_1^0x_2^0]_*,\ L(x_*)=[x_1^0x_2^0]_*;$$

тогда $\delta_f=0$, $\operatorname{codeg}(l)=0<\delta_f+1$, $\operatorname{codeg}(L)=0<\delta_f+1$.

Имеет место

$$\Lambda(x_*)=(-[x_1^1x_2^0]_*+[x_1^0x_2^1]_*,[x_1^2x_2^0]_*-[x_1^1x_2^1]_*+$$

$$+[x_1^0x_2^2]_*+a[x_1^0x_2^1]_*,\ -[x_1^3x_2^0]_*+[x_1^2x_2^1]_*-[x_1^1x_2^2]_*+[x_1^0x_2^3]_*-$$

$$-a[x_1^1x_2^1]_*+2a[x_1^0x_2^2]_*+a^2[x_1^0x_1^1]_*,\ [x_1^4x_2^0]_*-[x_1^3x_2^1]_*+[x_1^2x_2^2]_*-$$

$$-[x_1^1x_2^3]_*+[x_1^0x_2^4]_*+a[x_1^2x_2^1]_*-2a[x_1^1x_2^2]_*+3a[x_1^0x_2^3]_*-a^2[x_1^1x_1^1]_*+$$

$$+3a^2[x_1^0x_2^2]_*+a^3[x_1^0x_2^1]_*,\dots),\ \Delta=(1,1,1,1,\dots).$$

Пример 4.7. Пусть

$$n=3,\ f(x)=(x_2-x_3-x_1^2,(x_2-x_3)^2),$$

$$l(x_*)=[x_1^3x_2^0x_3^0]_*+[x_1^1x_2^1x_3^0]_*,\ L(x_*)=[x_1^3x_2^0x_3^0]_*+[x_1^1x_2^1x_3^0]_*;$$

тогда $\delta_f=1,\ \mathrm{codeg}(l)=2=\delta_f+1,\ \mathrm{codeg}(L)=2=\delta_f+1.$

Имеет место

$$\Lambda(x_*)\ =(-[x_1^3x_2^1x_3^0]_*-[x_1^3x_2^0x_3^1]_*-2[x_1^1x_2^2x_3^0]_*-[x_1^1x_2^1x_3^1]_*,$$

$$[x_1^3x_2^2x_3^0]_*+[x_1^3x_2^1x_3^1]_*+[x_1^3x_2^0x_3^2]_*+3[x_1^1x_2^3x_3^0]_*+2[x_1^1x_2^2x_3^1]_*+$$

$$+[x_1^1x_2^1x_3^2]_*,\ldots),\quad \Delta=(3,4,\ldots).$$

В примере 4.2 все точки кривой $f(x)\equiv 0$ являются простыми. В примерах 4.4 и 4.5 кривая $f(x)\equiv 0$ является кратной и все ее точки особые. В примере 4.5 точка $x\equiv 0$ является единственной особой точкой кривой $f(x)\equiv 0$, в ней пересекаются две ветви $x_1+x_2\equiv 0$ и $x_1-x_2\equiv 0$ этой кривой. В примере 4.6 точка $x\equiv 0$ является простой точкой кривой $f(x)\equiv 0$. В примере 4.7 ветвь кривой $f(x)\equiv 0$, проходящая через точку $x\equiv 0$, является кратной и все ее точки являются особыми, а исходные и полученные корневые функционалы характеризуют геометрическую структуру кратности этой ветви.

Можно увидеть, что во всех примерах имеет место п. 1 теоремы 2.3 (3.3), в силу которой $\mathrm{codeg}(\Lambda_p)\ge\mathrm{codeg}(\Lambda_{p-1})+\mathrm{codeg}(L)-\delta_f$ для всех $p\ge 1$. Тогда при условии $\mathrm{codeg}(L)\le\delta_f$ костепень $\Lambda_p(x_*)$ не должна увеличиваться с ростом p. Это приводит к тому, что в случае однородных полиномов, как это видно из примера 4.4, не порождается бесконечное множество линейно независимых над **R** корневых функционалов; хотя в случае неоднородных полиномов, как это видно из примера 4.6, тем не менее, может быть порождено бесконечное множество линейно независимых над **R** корневых функционалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сейфуллин Т. Р. Корневые функционалы и корневые полиномы системы полиномов // Доп. НАН УкраВни. — 1995. — № 5. — С. 5–8.

2. Сейфуллин Т. Р. Корневые функционалы и корневые соотношения полиномов системы полиномов // Там же. — 1995. — № 6. — С. 7–10.

3. Сейфуллин Т. Р. Гомологии комплекса Кошуля системы полиномиальных уравнений // Там же. — 1997. — № 9. — С. 43–49.

4. Сейфуллин Т. Р. Комплексы Кошуля систем полиномов, связанных линейной зависимостью // Некоторые вопросы современной математики. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. — С. 326–349.

5. Сейфуллин Т. Р. Комплексы Кошуля вложенных систем полиномов и двойственность // Доп. НАН УкраВни. — 2000. — № 6. — С. 26–34.

6. Сейфуллин Т. Р. Продолжение корневых функционалов системы полиномиальных уравнений и редукция полиномов по модулю ее идеала // Там же. — 2003. — № 7. — С. 19–27.

7. Seifullin T. R. Extension of bounded root functionals of a system of polynomial equations // Там же. — 2002. — № 7. — С. 35–42.

8. Сейфуллин Т. Р. Нахождение базиса пространства всех корневых функционалов системы полиномиальных уравнений и базиса ее идеала путем операции расширения

ограниченных корневых функционалов // Там же. — 2003. — № 8. — С. 29–36.

9. Сейфуллин Т.Р. Корневые функционалы на 1-мерном многообразии // Там же. — 2007. — № 7. — С. 18–23.

10. Сейфуллин Т.Р. Операция порождения корневых функционалов и корневые полиномы // Там же. — 2007. — № 8. — С. 25–31.

Поступила 15.02.2007