УДК 517.926

В.А. РУСАНОВ, В.А. КОЗЫРЕВ, Д.Ю. ШАРПИНСКИЙ

К ТЕОРИИ РЕАЛИЗАЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Ключевые слова: *непрерывная динамическая система, задача реализации, квазилинейная модель.*

ВВЕДЕНИЕ

На языке сигнальных функций [1] и энтропийного оператора Релея–Ритца [2] обсуждаются варианты характеристического признака непрерывной динамической системы (D-системы), представленной некоторым фиксированным семейством апостериорных троек вида «траектория, программное управление, позиционное управление» (экзогенное поведение D-системы типа «вход-выход»; определение 1.8 [3, с. 20]) с модельной реализацией [3, с. 21] в классе квазилинейных нестационарных дифференциальных уравнений состояния в сепарабельном гильбертовом пространстве (расширенная постановка из выводов работы [4]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Везде далее $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (при этом структуру предгильбертовости [5, с. 64] определяют нормы $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_Z$). $L(Y, X)$ — банахово пространство с операторной нормой $\|\cdot\|_{L(Y,X)}$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из Y в X (аналогично будем рассматривать $(L(X, X), \|\cdot\|_{L(X,X)})$ и $(L(Z, X), \|\cdot\|_{L(Z,X)})$); $T := [t_0, t_1]$ — отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и ν — положительная мера, абсолютно непрерывная относительно μ и определенная на σ-алгебре $\wp_\nu$ всех ν-измеримых (лебеговски пополненных) подмножеств из интервала T.

Пусть $(B, \|\cdot\|_B)$ — банахово пространство, $\pounds_p(T,\nu,B)$, $p \in [1,\infty)$, — линейное пространство всех интегрируемых (по Бохнеру) отображений $f: T \to B$ с нормой $(\int_T \|f(\tau)\|_B^p \, \nu(d\tau))^{1/p}$ и, как обычно, $L_p(T,\nu,B)$ — банахово факторпространство классов ν-эквивалентности в $\pounds_p(T,\nu,B)$, $AC(T,B) \subset \pounds_1(T,\mu,B)$ — линейное множество всех абсолютно непрерывных функций (относительно меры μ).

Рассмотрим дифференциальные модели класса

$$dx(t)/dt = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B^{\#}(t)u^{\#}(x(t)), \quad t \in T, \tag{1}$$

где $x \in AC(T, X)$ — решение Каратеодори (K-решение), $u \in L_2(T,\mu,Y)$ и $u^{\#}(x) \in L_2(T,\mu,Z)$ — программное и позиционное (возможно, нелинейное) управления, $(A, B, B^{\#}) \in L_2(T,\mu,L(X,X)) \times L_2(T,\mu,L(Y,X)) \times L_2(T,\mu,L(Z,X))$.

Для удобства упорядоченную тройку функций $(x, u, u^{\#}(x))$ из (1) тоже назовем K-решением, а упорядоченную тройку операторов $(A, B, B^{\#})$, согласно терминологии [2], — $(A,B,B^{\#})_2$-моделью.

---

[1]Работа поддержана грант-контрактами: Российский фонд фундаментальных исследований (№ 05-01-00623), Программа фундаментальных исследований № 22 Президиума РАН, Грант Президента Российской Федерации по государственной поддержке научных школ Российской Федерации (№ НШ-1676.2008).

Задачу реализации рассмотрим в постановке: пусть $u^{\#}(\cdot)$: $AC(T,X) \to$ $\to L_2(T,\mu,Z)$,

$$\Pi_{u^{\#}} := \{(x,u,q) \in AC(T,X) \times L_2(T,\mu,Y) \times L_2(T,\mu,Z): \ (x,u,q) = (x,u,u^{\#}(x))\}$$

и $N \subset \Pi_{u^{\#}}$ — фиксированное экзогенное поведение (типа «вход–выход») исследуемой D-системы с позиционным[2] управлением $x \mapsto u^{\#}(x)$, определить (в функциональных терминах от N) необходимые и достаточные условия, при которых семейство процессов N задает (представляет) K-решения некоторого уравнения (1); при этом в общем случае ограничений на Card N (мощность семейства N) не накладываем.

ВАРИАНТ Card $N = 1$

Для D-системы с процессом $(x,u,u^{\#}(x)) \in \Pi_{u^{\#}}$ в этом разделе в теореме 1 дадим три эквивалентных решения поставленной задачи дифференциальной реализации, которыми легче пользоваться в приложениях, чем теоремой 2 (из следующего раздела, хотя последняя превосходит первую своей общностью). Эти решения потребуют привлечения идей функционально-геометрического подхода в аксиоматическом построении идентификационных процессов [1]. Тем самым решение задачи параметрической идентификации, полученное в [1] применительно к динамическим объектам (1), приобретет структурную форму, подтвердив свою универсальную математическую конструкцию для теоретико-системного анализа широкого класса непрерывных слабоструктурированных квазилинейных систем управления (в том числе с распределенными параметрами).

Пусть $\mathbf{L} := L_2(T,\mu,L(X,X)) \times L_2(T,\mu,L(Y,X)) \times L_2(T,\mu,L(Z,X))$ — банахово пространство классов μ-эквивалентности всех $(A,B,B^{\#})_2$-моделей $(A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $B^{\#}(\cdot))$ с нормой

$$||(A,B,B^{\#})||_{\mathbf{L}} := \left(\int_T (||A(\tau)||^2_{L(X,X)} + ||B(\tau)||^2_{L(Y,X)} + ||B^{\#}(\tau)||^2_{L(Z,X)})\mu(d\tau)\right)^{1/2}.$$

Пусть H — пространство $L_2(T,\mu,X) \times L_2(T,\mu,Y) \times L_2(T,\mu,Z)$ с нормой $||(g,w,q)||_H := \left(\int_T (||g(\tau)||^2_X + ||w(\tau)||^2_Y + ||q(\tau)||^2_Z)\mu(d\tau)\right)^{1/2}$, $(g,w,q) \in H$, которое, как полное предгильбертово (в силу конструкции $||\cdot||_H$), является гильбертовым. Обозначим $(L(H,X), ||\cdot||_{L(H,X)})$ банахово пространство с операторной нормой всех линейных непрерывных операторов, действующих из H в X.

Пусть $(A,B,B^{\#}) \in \mathbf{L}$. Рассмотрим оператор $\xi: H \to X$, имеющий представление

$$\xi(g,w,q) := \int_T (A(\tau)g(\tau) + B(\tau)w(\tau) + B^{\#}(\tau)q(\tau))\mu(d\tau), \quad (g,w,q) \in H. \qquad (2)$$

Ясно, что $\xi \in L(H,X)$, по терминологии [1] оператор ξ — ξ_2-модель. Для обратного утверждения — «$\zeta \in L(H,X) \Rightarrow$ оператор ζ имеет аналитическое представление (2)» — потребуются дополнительные уточнения и рассуждения (лемма 1).

Поскольку X локально выпукло, следовательно (так как пространство, сопряженное для X, разделяет на X точки), оператор Γ: $\mathbf{L} \to L(H,X)$, осуществляющий согласно (2) закон $\Gamma(A,B,B^{\#}) := \xi$, — суть линейный изоморфизм между линейными множествами всех $(A,B,B^{\#})_2$- и ξ_2-моделей. Кроме того, X — пространство с базисом [6, с. 514], что позволяет относительно оператора Γ утверждать большее.

---

[2]Возможно положение, когда «внутренняя природа» закона $u^{\#}$ структурно детерминируется не управлением типа «state feedback», а аналитически явно характеризует существенную «нелинейную компоненту» D-системы.

Лемма 1. $\Gamma: \mathbf{L} \to L(H, X)$ — линейный гомеоморфизм.

Доказательство. Пусть $(A, B, B^{\#}) \in \mathbf{L}$, тогда

$$||\Gamma(A, B, B^{\#})||_{L(H,X)} = \sup\{||\int_T (A(\tau)g(\tau) + B(\tau)w(\tau) + B^{\#}(\tau)q(\tau))\mu(d\tau)||_X :$$

$$||(g, w, q)||_H \le 1\} \le \sup\{\int_T (||A(\tau)g(t)||_X + ||B(\tau)w(\tau)||_X + ||B^{\#}(\tau)q(\tau)||_X)\mu(d\tau):$$

$$||(g, w, q)||_H \le 1\} \le \sup\{\int_T (||A(\tau)||_{L(X,X)}||g(\tau)||_X +$$

$$+||B(\tau)||_{L(Y,X)}\,||w(\tau)||_Y + ||B^{\#}(\tau)||_{L(Z,X)}\,||q(\tau)||_Z)\mu(d\tau):$$

$$||(g, w, q)||_H \le 1\} \le (\int_T ||A(\tau)||^2_{L(X,X)}\mu(d\tau))^{1/2} + (\int_T ||B(\tau)||^2_{L(Y,X)}\mu(d\tau))^{1/2} +$$

$$+(\int_T ||B^{\#}(\tau)||^2_{L(Z,X)}\mu(d\tau))^{1/2} \le 3^{1/2}||(A, B, B^{\#})||_{\mathbf{L}}$$

$\Rightarrow$ оператор Γ непрерывный.

Поскольку $\operatorname{Ker}\Gamma = \{0\} \subset \mathbf{L}$ (см. выше), значит, для доказательства гомеоморфизма Γ достаточно (теорема Банаха [6, с. 453]) показать, что Γ — отображение «на».

Пусть $\zeta \in L(H, X)$ и $\{x_i\}$ — полная ортонормированная система в X. Обозначим $\zeta_i(g, w, q) := < x_i, \zeta(g, w, q) >_X$, где $(g, w, q) \in H$ и $< \cdot, \cdot >_X$ — операция скалярного произведения в X. Тогда $\zeta(g, w, q) = \Sigma \zeta_i(g, w, q)x_i$, $i = 1, 2, \ldots$, и в силу теоремы Рисса [5, с. 132]

$$\zeta_1(g, w, q) = \int_T (< \alpha_1(\tau), g(\tau) >_X + < \beta_1(\tau), w(\tau) >_Y + < \beta_1^{\#}(\tau), q(t) >_Z)\mu(d\tau),$$

$$\zeta_2(g, w, q) = \int_T (< \alpha_2(\tau), g(\tau) >_X + < \beta_2(\tau), w(\tau) >_Y + < \beta_2^{\#}(\tau), q(\tau) >_Z)\mu(d\tau),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

где $(\alpha_i, \beta_i, \beta_i^{\#}) \in H$ и $< \cdot, \cdot >_Y$, $< \cdot, \cdot >_Z$ — операции скалярного произведения в Y и Z; ясно, что α_i, β_i и $\beta_i^{\#}$ — «претенденты» в базисе $\{x_i\}$ на роль вектор-строк в матричном представлении $(A, B, B^{\#})_2$-модели, соответствующей $\Gamma^{-1}(\zeta)$.

Для $(g, w, q) \in H$ функция $t \mapsto (\zeta(\chi_t \cdot (g, w, q))(t)$, где χ_t — характеристическая функция интервала $[t_0, t] \subset T$, абсолютно непрерывная в силу теоремы 3.7.2 [7, с. 92]; значение $\zeta(g, w, q) = \Sigma\zeta_i(g, w, q)x_i$ можно трактовать как интеграл Петтиса [7, с. 91]. Следовательно (теорема 2.1 [8, с. 16]), $t \to d\zeta(\chi_t \cdot (g, w, q))(t)/dt \in L_1(T, \mu, X)$ и на T μ-почти всюду $(A(t), B(t), B^{\#}(t)) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X)$, где $t \mapsto (A(t), B(t), B^{\#}(t)) := (\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}, \{\beta_i^{\#}\})$ соответствует $\Gamma^{-1}(\zeta)$. Таким образом, осталось установить справедливость следующих трех включений: $A \in L_2(T, \mu, L(X, X))$, $B \in L_2(T, \mu, L(Y, X))$, $B^{\#} \in L_2(T, \mu, L(Z, X))$; ниже ограничимся подтверждением первого включения (два остальных по существу доказываются аналогично).

Пусть $f(t) := ||A(t)||_{L(X,X)}$ и $\Phi := \{\varphi \in L_2(T, \mu, X): \exists g \in L_2(T, \mu, X) \,\&\, \varphi = ||g||_X^{-1} g : \varphi(t) = 0,\ t \in \{\tau \in T: ||g(\tau)||_X = 0\}\}$, где $g \in L_2(T, \mu, X)\}$. На основании теоремы 1 [5, с. 190] заключаем, что существует интеграл $\int_T ||A(\tau)\eta(\tau)\varphi(\tau)||_X\,\mu(d\tau)$, где $\varphi \in \Phi$, $\eta \in L_2(T, \mu, R)$, поскольку имеет место следующая очевидная связка равенств:

$$\int_T A(\tau)\eta(\tau)\varphi(\tau)\mu(d\tau) = \int_T (d\zeta(\eta\varphi, 0, 0)(\tau)/d\tau)\mu(d\tau) = \zeta(\eta\varphi, 0, 0).$$

В силу следствия 2 [5, с. 156] справедливо $f(t)=\sup\{|<A(t)\varphi(t),\psi(t)>_X|$: $\varphi,\psi\in\Phi\}$. Таким образом, с учетом $t\mapsto||A(t)\eta(t)\varphi(t)||_X\in L_1(T,\mu,R),\varphi\in\Phi$, $\eta\in L_2(T,\mu,R)$, имеем

$$f(t)\cdot|\eta(t)|\in L_1(T,\mu,R),\ \eta\in L_2(T,\mu,R). \tag{3}$$

Введем в рассмотрение отображение (произведение двух функций)

$$\eta\mapsto f_{\otimes}(\eta):=f\cdot\eta\in L_1(T,\mu,R),\ \eta\in L_2(T,\mu,R), \tag{4}$$

которое (в силу (3)) определено корректно, к тому же его можно рассматривать в качестве линейного оператора, действующего из $L_2(T,\mu,R)$ в $L_1(T,\mu,R)$. Покажем, что в данной постановке имеет место включение $f\in L_2(T,\mu,R)$.

Оператор $f_{\otimes}:L_2(T,\mu,R)\to L_1(T,\mu,R)$ положительный [9, с. 30]. Воспользовавшись теоремой 2.1 [9, с. 30], заключаем, что $f_{\otimes}$ — непрерывный оператор. Далее, рассмотрим линейный функционал на $L_2(T,\mu,R)$ вида $\varphi(\eta):=\int_T f_{\otimes}(\eta)(\tau)\mu(d\tau)$.

Так как функционал φ непрерывный, то существует такая функция $f^{\#}\in L_2(T,\mu,R)$, для которой

$$\eta\in L_2(T,\mu,R)\Rightarrow\int_T f(\tau)\eta(\tau)\mu(d\tau)=\int_T f^{\#}(\tau)\eta(\tau)\mu(d\tau)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_T(f(\tau)-f^{\#}(\tau))\eta(\tau)\mu(d\tau)=0\Rightarrow\eta(\,\cdot\,):=\operatorname{sign}(f(\,\cdot\,)-f^{\#}(\,\cdot\,)),$$

$$\int_T|f(\tau)-f^{\#}(\tau)|\mu(d\tau)=0\Rightarrow f(t)=f^{\#}(t)(\operatorname{mod}\mu)\Rightarrow f\in L_2(T,\mu,R).$$

Лемма доказана.

Пусть $y(\,\cdot\,)\in AC(T,X)$, тогда, поскольку X — равномерно выпуклое пространство [5, с. 182], $y(\,\cdot\,)$ обладает свойством первообразной функции [10, с. 107] (см. также теорему 2.1 [8, с. 16]), т.е. функция $y(\,\cdot\,)$ почти всюду дифференцируема на T (при этом $dy(\,\cdot\,)/dt\in L_1(T,\mu,X)$) и имеет форму аналитического представления

$$y(t)=y(t_0)+\int_T(\chi_t(\tau)dy(\tau)/d\tau)\mu(d\tau),$$

где $\chi_t(\,\cdot\,)$ — характеристическая функция интервала $[t_0,t]\subset T$; для произвольного банахова пространства X это положение неверно [5, с. 193].

Для того чтобы приступить к аналитическому решению поставленной задачи реализации, прежде всего введем для экзогенного поведения $(x,u,u^{\#}(x))\in\Pi_{u^{\#}}$ исследуемой D-системы две исключительно важные меры:

$$\nu(S):=\int_S(||x(\tau)||_X^2+||u(\tau)||_Y^2+||u^{\#}(x(\tau))||_Z^2)\mu(d\tau),S\in\wp_\mu, \tag{5}$$

$$\nu\_(S):=\int_S||dx(\tau)d\tau||_X\,\mu(d\tau),\ S\in\wp_\mu.$$

Здесь конструкция меры $\nu\_$ определена корректно, поскольку, с одной стороны, функция $t\mapsto x(t)$ первообразная, а с другой, в силу теоремы 1 [1], мера ν определяет важный в качественной теории идентификации непрерывных D-систем аналитический класс сигнальных функций; при этом в такой постановке по-прежнему имеет место (охватывающее «бесконечномерный» характер пространства состояний X) утверждение из п. 3 [2], которое формулирует следующая лемма.

Лемма 2.

$$\{t\in T:dx(t)/dt=0\}\supset\{t\in T:||x(t)||_X+||u(t)||_Y+||u^{\#}(x(t))||_Z=0\}(\operatorname{mod}\mu).$$

Следствие 1. $\wp_\mu\subset\wp_\nu\subset\wp_{\nu\_}$ для лебеговских пополненных мер ν и $\nu\_$.

В аналитической теории обратных задач системного анализа теорема 1 [1] устанавливает один из основных результатов общей теории идентификации, а именно, в любом идентификационном процессе «параметрического восстановления» динамического объекта (1) семейство сигнальных функций характеризуется конструкцией обычного лебегова пространства $L_2(T,\nu,R)$. Развитие этой теоремы для задач структурной идентификации позволяет сформулировать важный результат (см. ниже теорему 1), но уже в области качественной теории реализации непрерывных управляемых D-систем в классе квазилинейных дифференциальных объектов с уравнениями состояния (1).

Теорема 1. $(x,u,u^{\#}(x)) \in \Pi_{u^{\#}}$ — K-решение некоторого уравнения (1), если и только если процесс $(x,u,u^{\#}(x))$ обладает любым из следующих трех свойств:

$$\pounds_2(T,\nu,R) \subset \pounds_1(T,\nu_{\_},R);$$

$$||dx/dt||_X \ (||x||_X^2 + ||u||_Y^2 + ||u^{\#}(x)||_Z^2\ )^{-1/2} \in L_2(T,\mu,R);$$

$$\exists f \in L_2(T,\mu,R)\colon \forall S \in \wp_\mu, \nu_{\_}(S) \le (\nu_+(S))^{1/2}(\nu(S))^{1/2}, \nu_+(S) = \int_S f^2(\tau)\mu(d\tau);$$

здесь ν и $\nu_{\_}$ — меры, определяемые посредством соотношений (5).

Замечание 1. В условиях теоремы имеют место следующие положения:

а) $\pounds_2(T,\nu,R) \subset \pounds_1(T,\nu_{\_},R)$ «не гарантирует» $L_2(T,\nu,R) \subset L_1(T,\nu_{\_},R)$ (следствие 1);

б) $||dx(t)/dt||_X \ (||x(t)||_X^2 + ||u(t)||_Y^2 + ||u^{\#}(x(t))||_Z^2\ )^{-1/2} := 0$ в точках $t \in \{t \in T\colon ||x(t)||_X + ||u(t)||_Y + ||u^{\#}(x(t))||_Z = 0\}$, если это множество ненулевой меры по μ (лемма 2);

в) реализация (1) динамического процесса $(x,u,u^{\#}(x))$ не обеспечивает (всегда) единственность соответствующей ей $(A,B,B^{\#})_2$-модели (теорема 4 [1], лемма 1);

г) для D-системы с поведением $(x,u) \in AC(T,X) \times L_2(T,\mu,Y)$ задачу реализации ее дифференциальной модели в классе (1) можно ставить в терминах структурной идентификации закона $x \mapsto u^{\#}(x)$, при котором для пары (x,u) в теореме 1 имеет место любое из трех характеристических условий реализации $(x,u,u^{\#}(x))$ в динамике (1); что можно интерпретировать как задачу построения аналитического представления уравнения состояния (1) исследуемой D-системы, в котором неявная форма нелинейного члена $u^{\#}(x)$ посредством теоремы 1 через (x,u) подлежит явному «аналитическому конструированию» (см. пример 2 [2]).

Доказательство теоремы 1. Будем исходить из структуры доказательства, состоящей в установлении следующей цепочки эквивалентностей:

$$\exists\ f \in L_2(T,\mu,R)\colon \forall S \in \wp_\mu,$$
$$\nu_{\_}(S) \le (\nu_+(S))^{1/2}(\nu(S))^{1/2}, \nu_+(S) = \int_S f^2(\tau)\mu(d\tau) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ||dx/dt||_X \ (||x||_X^2 + ||u||_Y^2 + ||u^{\#}(x)||_Z^2\ )^{-1/2} \in L_2(T,\mu,R) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \pounds_2(T,\nu,R) \subset \pounds_1(T,\nu_{\_},R) \Leftrightarrow (x,u,u^{\#}(x))$ — K-решение некоторого уравнения (1).

Пусть

$$\nu_{\_}(S)(\nu_+(S))^{1/2}(\nu(S))^{1/2}, \quad S \in \wp_\mu,$$

где $\nu_+(S) = \int_S f^2(\tau)\mu(d\tau)$, $f \in L_2(T,\mu,R)$ и

$$\gamma(t):=\int_{T_t}||dx(\tau)/d\tau||_X\ \mu(d\tau),\ \alpha(t):=\int_{T_t} f^2(\tau)\mu(d\tau), \beta(t):=\int_{T_t}(||x(\tau)||_X^2 + \\ +||u(\tau)||_Y^2+||u^{\#}(x(\tau))||_Z^2\ )\mu(d\tau),$$

где $T_t:=[t_0,t]\subset T$.

Тогда функции γ, α и β дифференцируемы почти всюду на T; $d\gamma(t)/dt = =||dx(t)/dt||_X$, $d\alpha(t)/dt = f^2(t), d\beta(t)/dt = (||x(t)||_X^2+||u(t)||_Y^2+\ ||u^{\#}(x(t))||_Z^2\ )$. Выбрав $S=[t,t+\Delta t], \Delta t>0$, из неравенства $\nu_-(S)\le(\nu_+(S))^{1/2}(\nu(S))^{1/2}$ получим

$$\Delta t^{-1}(\gamma(t+\Delta t)-\gamma(t)) = \Delta t^{-1}\int_S ||dx(t)d\tau||_X\ \mu(dt)\le$$

$$\le(\Delta t^{-1}\int_S f_2(\tau)\mu(d\tau))^{1/2}(\Delta t^{-1}\int_S(||x(\tau)||_X^2+||u(\tau)||_Y^2+||u^{\#}(x(\tau))||_Z^2\ )\mu(d\tau))^{1/2} =$$

$$=(\Delta t^{-1}(\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)))^{1/2}(\Delta t^{-1}(\beta(t+\Delta t)-\beta(t)))^{1/2}$$

и, переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, почти всюду на T будем иметь

$$||dx(t)/dt||_X = d\gamma(t)/dt\le(d\alpha(t)/dt)^{1/2}(d\beta(t)/dt)^{1/2} =$$

$$= f(t)(||x(t)||_X^2+||u(t)||_Y^2+||u^{\#}(x(t))||_Z^2\ )^{1/2},$$

следовательно (лемма 2), $||dx/dt||_X\ (||x||_X^2+||u||_Y^2+||u^{\#}(x)||_Z^2\ )^{-1/2}\in L_2(T,\mu,R)$.

Пусть $||dx/dt||_X\ (||x||_X^2+||u||_Y^2+||u^{\#}(x)||_Z^2\ )^{-1/2}\in L_2(T,\mu,R)$. Тогда найдется функция $f>0$ класса $L_2(T,\mu,R)$ такая, что $||dx(\cdot)/dt||_X = f(\cdot)(||x(\cdot)||_X^2 + +||u(\cdot)||_Y^2+||u^{\#}(x(\cdot))||_Z^2\ )^{1/2}$. Следовательно, мера $\nu_+(S):=\int_S f^2(\tau)\mu(d\tau)$ удовлетворяет $\nu_-(S)\le(\nu_+(S))^{1/2}(\nu(S))^{1/2}$, $S\in\wp_\mu$, в силу интегрального неравенства Коши–Буняковского. Кроме того, для всех $\lambda\in\mathcal{L}_2(T,\nu,R)$ будет $\lambda(\cdot)||dx(\cdot)/dt||_X = =f(\cdot)(\lambda^2(\cdot)(||x(\cdot)||_X^2+||u(\cdot)||_Y^2+||u^{\#}(x(\cdot))||_Z^2\ ))^{1/2}\in L_1(T,\mu,R)$ и, значит, $\mathcal{L}_2(T,\nu,R)\subset\mathcal{L}_1(T,\nu_-,R)$, при этом в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\int_T||\lambda(\tau)dx(\tau)/d\tau||_X\ \mu(d\tau)\le(\int_T f^2(\tau)\mu(d\tau))^{1/2}\times$$

$$\times(\int_T\lambda^2(\tau)(||x(\tau)||_X^2+||u(\tau)||_Y^2+||u^{\#}(x(\tau))||_Z^2\ )\mu(d\tau))^{1/2}\in L_1(T,\mu,R).$$

Это значит [9, с. 322], что оператор вложения $\mathcal{L}_2(T,\nu,R)\subset\mathcal{L}_1(T,\nu_-,R)$ непрерывен.

Пусть $\mathcal{L}_2(T,\nu,R)\subset\mathcal{L}_1(T,\nu_-,R)$. Тогда $\lambda||dx/dt||_X\in\mathcal{L}_1(T,\mu,R)$ $\forall\lambda\in \in\mathcal{L}_2(T,\nu,R)$. Функция $f:=||dx/dt||_X\ (||x||_X^2+||u||_Y^2+||u^{\#}(x)||_Z^2\ )^{-1/2}$ является μ-измеримой (по лемме 2) и $(||x||_X^2+||u||_Y^2+||u^{\#}(x)||_Z^2\ )^{-1/2}L_2(T,\nu,R)=\chi_S L_2(T,\mu,R)$, где χ_S — характеристическая функция множества $S:=\{t\in T:||x(t)||_X+||u(t)||_Y+ +||u^{\#}(x(t))||_Z=0\}$. Таким образом, $\eta\mapsto f_{\otimes}(\eta):=f\cdot\eta$, где

$$\eta(\cdot):=\lambda(\cdot)(||x(\cdot)||_X^2+||u(\cdot)||_Y^2+||u^{\#}(x(\cdot))||_Z^2\ )^{1/2}\in L_2(T,\mu,R),\ \lambda\in L_2(T,\nu,R),$$

при этом $f_{\otimes}$ можно рассматривать как линейный оператор, действующий из подпространства $\chi_S L_2(T,\mu,R)$ в $L_1(T,\mu,R)$. Рассуждения, аналогичные проведенным выше для оператора (4), приводят к заключению, что $f\in L_2(T,\mu,R)$; не будем останавливаться на этом факте, так как в данном случае выкладки становятся несколько сложнее, а идейная сторона решения мало меняется.

Теперь покажем, что $\mathcal{L}_2(T,\nu,R)\subset\mathcal{L}_1(T,\nu_-,R)\Leftrightarrow$ для процесса $(x,u,u^{\#}(x))$ существует реализация (1); импликация $\ldots\Leftarrow\ldots$ прозрачна в силу конструкции уравнения (1) и теоремы 1 [5, с. 190], поэтому подтвердим справедливость $\ldots\Rightarrow\ldots$.

Пусть ζ: $L_2(T,\nu,R) \to X$ и æ: $L_2(T,\nu,R) \to H$ — линейные непрерывные операторы, действующие согласно следующим простым правилам:

$$\zeta(\lambda) := \int_T (\lambda(\tau)\,dx(\tau)/\,d\tau)\mu(d\tau), \lambda \in L_2(T,\nu,R),$$

$$æ(\lambda) := \lambda \cdot (x,u,u^{\#}(x)),\ \lambda \in L_2(T,\nu,R).$$

Оператор ζ, с одной стороны, корректен в силу $\pounds_2(T,\nu,R) \subset \pounds_1(T,\nu\_,R)$ и теоремы 1 [5, с. 190] и непрерывен, поскольку, как показано выше, вложение $\pounds_2(T,\nu,R) \subset \pounds_1(T,\nu\_,R)$ непрерывно. С другой стороны, очевидно, что непрерывность оператора æ обеспечивается непосредственно его конструкцией.

Пусть, далее, Ω — полный образ в H оператора æ. Ясно, что линейное многообразие Ω — гильбертово пространство (модификация теоремы 4 [1]), при этом Ker æ= {0}, поскольку можно показать, что æ: $L_2(T,\nu,R) \to \Omega$ — линейная изометрия. Следовательно, имеет место вложение Ker æ$\subset$ Ker ζ.

Для наглядности завершающей части доказательства рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{Ker}\,æ \;—\mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\,æ} & \to L_2(T,\nu,R) — æ & \to \Omega \\
\cap & || & \downarrow \xi_ \\
\mathrm{Ker}\,\zeta \;—\mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\,\zeta} & \to L_2(T,\nu,R) — \zeta & \to X
\end{array}$$

(id — тождественное отображение).

Существует (см. лемму о тройке [11, с. 228]) линейный непрерывный оператор $\xi\_ : W \to X$ такой, что $\zeta(\cdot) = \xi\_ \circ æ(\cdot)$. Далее, пусть ξ^* — линейное непрерывное распространение оператора $\xi\_$ на H (расширение $\xi^*: H \to X$ существует, поскольку H — гильбертово пространство [6, с. 249]). В соответствии с леммой 1 существует такая $(A,B,B^{\#})_2$-модель $(A,B,B^{\#}) \in \mathbf{L}$, для которой

$$\xi^*(\chi_t \cdot (x,u,u^{\#})) = x(t) - x(t_0) =$$

$$= \int_T \chi_t(\tau)(A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) + B^{\#}(\tau)u^{\#}(x(\tau)))\mu(d\tau),\ \ t \in T;$$

здесь $\chi_t(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $[t_0,t] \subset T$.

Теперь, учитывая, что $x(\cdot) \in AC(T,X)$ и, следовательно, конструкция отображения $x(\cdot)$ суть первообразная функция, последнее равенство (после дифференцирования $x(\cdot)$) делает теорему 1 справедливой.

ВАРИАНТ 1< Card $N \le \infty$

Начнем с уточнения операторных свойств $(A,B,B^{\#})_2$-модели.

Предложение 1. Пусть $(A,B,B^{\#}) \in \mathbf{L}$. Тогда оператор $M: H \to L_1(T,\mu,X)$

$$M(g,w,q) := Ag + Bw + B^{\#}q \tag{6}$$

непрерывен в топологиях от $||\cdot||_H$ и $||\cdot||_{L_1}$; здесь $||\cdot||_{L_1}$ — норма в $L_1(T,\mu,X)$.

Операторы (6) назовем M_2-операторами. Чтобы охарактеризовать класс M_2-операторов в семействе всех непрерывных операторов, действующих из H в $L_1(T,\mu,X)$, рассмотрим конструкцию [9, с. 13]: пусть $S \in \wp_\mu$ и $P_{S,L}$: $L_1(T,\mu,X) \to L_1(T,\mu,X)$ — оператор вида $P_{S,L}(y)(t) := y(t)$, если $t \in S$ и $P_{S,L}(y)(t) := 0 \in X$ при $t \in T \setminus S$. Оператор $P_{S,L}$— линейный проектор $P_{S,L}^2 = P_{S,L}$ и подпространство $L_2(T,\mu,X) \subset L_1(T,\mu,X)$ инвариантно относительно $P_{S,L}$, что делает корректным рассмотрение аналогичного оператора $P_{S,H}: H \to H$.

Предложение 2. Пусть $E \subset H$ — линейное многообразие, инвариантное относительно $\{P_{S,H}: S \in \wp_\mu\}$ и $M^{\#}: E \to L_1(T,\mu,X)$ — линейный непрерывный оператор. Тогда существует M_2-оператор $M: H \to L_1(T,\mu,X)$, продолжающий $M^{\#}$ (т.е.

$M(y) = M^{\#}(y)\ \forall y \in E$), если и только если $\forall S \in \wp_{\mu}$ и $\forall y \in E$ имеет место

$$M^{\#} \circ P_{S,H}(y) = P_{S,L} \circ M^{\#}(y), \tag{7}$$

что означает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E \xrightarrow{\;M^{\#}\;} & L_1(T,\mu,X) \\ \downarrow P_{S,H} & \downarrow P_{S,L} \\ E \xrightarrow{\;M^{\#}\;} & L_1(T,\mu,X). \end{array}$$

Замечание 2. Очевидно, что в задаче реализации дифференциальной модели (1) семейства динамических процессов $N \subset \Pi_{u^{\#}}$ важен вариант существования M_2-оператора со свойством $M(g,w,q) = dg(\cdot)/dt$, $(g,w,q) \in \operatorname{Span} N \subset E$.

Доказательство предложения 2. Если M — M_2-оператор, продолжающий $M^{\#}$, то (7) следует непосредственно: $(A\chi_S g + B\chi_S w + B^{\#}\chi_S q) = \chi_S \cdot (Ag + {}$ $+ Bw + B^{\#} q)$, где $(A,B,B^{\#})$ — $(A,B,B^{\#})_2$-модель M_2-оператора $y \mapsto M(y)$, χ_S — характеристическая функция множества $S \in \wp_{\mu}$ и $y = (g,w,q) \in E$. Покажем обратное.

Пусть условие (7) выполнено. Рассмотрим линейный оператор $\xi^{\#}: E \to X$, полагая $\xi^{\#}(y) := \int_T M^{\#}(y)(\tau)\mu(d\tau)$, $y \in E$. Так как оператор $M^{\#}$ непрерывный, то непрерывным будет и $\xi^{\#}$. Пусть $\xi: H \to X$ — непрерывное продолжение оператора $\xi^{\#}$ на все пространство H; как отмечено выше, означенное продолжение существует, поскольку H гильбертово. На основании леммы 1 найдется тройка $(A,B,B^{\#}) \in \mathbf{L}$, для которой $\xi(y) = \int_T (A(\tau)g(\tau) + B(\tau)w(\tau) + B^{\#}(\tau)q(\tau))\mu(d\tau)$ $\forall y = (g,w,q) \in H$. Тогда для фиксированного вектора $y = (g,w,q) \in E$ и любого множества $S \in \wp_{\mu}$ будет

$$\int_S M^{\#}(y)(\tau)\mu(d\tau) = \int_T P_{S,L} \circ M^{\#}(y)(\tau)\mu(d\tau) = \int_T M^{\#} \circ P_{S,H}(y)(\tau)\mu(d\tau) =$$

$$= \xi^{\#} \circ P_{S,H}(y) = \xi \circ P_{S,H}(y) = \int_T (A(\tau)\chi_S(\tau)g(\tau) + B(\tau)\chi_S(\tau)w(\tau) +$$

$$+ B^{\#}(\tau)\chi_S(\tau)q(\tau))\mu(d\tau) = \int_S (A(\tau)g(\tau) + B(\tau)w(\tau) + B^{\#}(\tau)q(\tau))\mu(d\tau) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_S (M^{\#}(y)(\tau) - A(\tau)g(\tau) - B(\tau)w(t) - B^{\#}(\tau)q(\tau)))\mu(d\tau) = 0.$$

Известно (см. п. (3) [5, с. 32] и теорему 1 [5, с. 190]), что если интеграл Бохнера от суммируемой на T вектор-функции равен нулю (нулевому вектору) на любом подмножестве , то она сама равна нулю μ-почти всюду на интервале T. Следовательно, $M^{\#}(y)(t) = A(t)g(t) + B(t)w(t) + B^{\#}(t)q(t)$ и, таким образом, для всех векторов $y = (g,w,q) \in E$ имеем $M^{\#}(y) = Ag + Bw + B^{\#} q$.

Следствие 2. Непрерывный линейный оператор $M: H \to L_1(T,\mu,X)$ является M_2-оператором тогда и только тогда, когда для любого $S \in \wp_{\mu}$ справедливо

$$M \circ P_{S,H}(\cdot) = P_{S,L} \circ M(\cdot).$$

Пусть $L(T,\mu,R)$ — пространство классов μ-эквивалентности всех вещественных μ-измеримых на T функций и пусть $\le_L$ — квазиупорядочение в $L(T,\mu,R)$ такое, что $\phi_1 \le_L \phi_2$, когда $\phi_1, \phi_2 \in L(T,\mu,R)$ и $\phi_1(t) \le \phi_2(t)$ μ-почти всюду в T. Наименьшую верхнюю грань для подмножества $W \subset L(T,\mu,R)$ обозначим $\sup_L W$, если она существует для W в структуре частичного упорядочения $\le_L$.

Введем (см. в [2] конечномерный прототип) энтропийный оператор Релея–Ритца $\Psi\colon AC(T,X)\times L_2(T,\mu,Y)\times L_2(T,\mu,Z)\to L(T,\mu,R)$ вида

$$\Psi(g,w,q)(t):=\begin{cases}||dg(t)/dt||_X\ (||g(t)||_X^2+||w(t)||_Y^2+||q(t)||_Z^2\ )^{-1/2},\\ \text{если}\ \ ||g(t)||_X+||w(t)||_Y+||q(t)||_Z\neq 0;\\ 0,\ \text{если}\ ||g(t)||_X+||w(t)||_Y+||q(t)||_Z=0.\end{cases}$$

Пусть $N\subset\Pi_{u^\#}$, $\operatorname{Card} N>1$ и Q — некоторое (следовательно, любое) поглощающее множество в Span N; здесь в геометрии поглощающего множества следуем конструкции [5, с. 42]. В такой постановке принцип максимума энтропии, выраженный теоремой 2 [2] в решении задачи реализации поведения D-системы в классе квазилинейных конечномерных систем (1), трансформируется в его следующий аналог для реализации поведения бесконечномерной D-системы.

Теорема 2. Семейство процессов $N\subset\Pi_{u^\#}$ характеризуется K-решениями некоторого дифференциального уравнения (1) в том и только том случае, если

$$\exists\sup{}_L\Psi(Q)\in L_2(T,\mu,R),$$

или, что равносильно, существует такая положительная мера ν_+, абсолютно непрерывная относительно μ, что для произвольного подынтервала $T^*:=[t_*,t^*]\subset T$ и любой упорядоченной тройки $(g,w,q)\in Q$ справедливо неравенство

$$\nu_-(T^*)\le(\nu_+(T^*))^{1/2}(\nu(T^*))^{1/2},$$

где ν и ν_- — следующие меры:

$$\nu(S):=\int_S\ (||g(\tau)||_X^2\ ||w(\tau)||_Y^2+||q(\tau)||_Z^2\ )\mu(d\tau),\ S\in\wp_\mu;$$

$$\nu_-(S):=\int_S||dg(\tau)/d\tau||_X\ \mu(d\tau),\ S\in\wp_\mu.$$

Замечание 3. Реализация фиксированной системой (1) динамических процессов из $\Pi_{u^\#}$ — свойство конечного характера [12, с. 28], что позволяет (при желании) с учетом теоремы 2 и леммы Тейхмюллера–Тьюки [12, с. 28] построить (определение 1 [2]) весьма элегантную структурную по Бурбаки [13, с. 395] аксиоматику D-систем с реализацией в классе моделей (1); аналитическая основа — построение для заданного закона $x\mapsto u^\#(x)\colon AC(T,X)\to L_2(T,\mu,Z)$ шкалы множеств, содержащей $\Pi_{u^\#}$, и «фиксация» в ней максимального в $\Pi_{u^\#}$ множества N с характеристическим (структурным) свойством $\exists\sup{}_L\Psi(Q)\in L_2(T,\mu,R)$.

Доказательство теоремы 2. Структуру доказательства можно построить на базе предложения 2 (см. замечание 2), но ниже за ее основу возьмем подтверждение (вывод) следующей «замкнутой цепи» импликаций:

$$\exists\sup{}_L\Psi(Q)\in L_2(T,\mu,R)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\exists\nu_+:\nu_-(T^*)(\nu_+(T^*))^{1/2}(\nu(T^*))^{1/2}\quad\forall T^*=[t_*,t^*]\subset T,\ \forall(g,w,q)\in Q\Rightarrow$$

$$\Rightarrow N\ \text{— суть}\ K\text{-решения некоторого уравнения (1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\exists\sup{}_L\Psi(Q)\in L_2(T,\mu,R).$$

Пусть $\exists\sup{}_L\Psi(Q)\in L_2(T,\mu,R)$, тогда справедливо следующее положение:

$$\exists f\in L_2(T,\mu,R):||dg(\,\cdot\,)/dt||_X\le_L\ f(\,\cdot\,)(||g(\,\cdot\,)||_X^2+$$

$$+||w(\,\cdot\,)||_Y^2+||q(\,\cdot\,)||_Z^2\ )^{1/2},\ \forall(g,w,q)\in Q,$$

следовательно, в силу неравенства Коши–Буняковского мера $\nu_+(S):=\int_S f^2(\tau)\mu(d\tau)$, $S\in\wp_\mu$ удовлетворяет искомой связке

$$\nu_-(T^*)\le(\nu_+(T^*))^{1/2}(\nu(T^*))^{1/2}\ \ \forall T^*=[t_*,t^*]\subset T,\ \forall(g,w,q)\in Q.$$

Теперь покажем, что наше семейство динамических процессов N представляет K-решения некоторого дифференциального уравнения (1).

Пусть $\Omega := \{\omega \in H \colon \exists\, T_r \subset T, \exists (g, w, q) \in Q, \omega = \chi_{Tr} \cdot (g, w, q)\}$, χ_{Tr} — характеристическая функция интервала $T_r = [t_0, t_r] \subset T, t_0 \le t_r$. Рассмотрим оператор $\zeta \colon \Omega \to X$

$$\zeta(\chi_{Tr} \cdot (g, w, q)) := \int_T (\chi_{Tr}(\tau)\, dg(\tau) / d\tau)\mu(d\tau).$$

Покажем, что оператор ζ допускает линейное непрерывное распространение, обозначаемое далее ζ^*, на линейную оболочку $\operatorname{Span}\Omega$. Для этого в силу теоремы 1 [6, с. 243] достаточно указать такую постоянную $c^* > 0$, что каковы бы ни были конечные совокупности векторов $\{\omega_i\}_{i=1,\ldots,k} \subset \Omega$ и чисел $\{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,k} \subset R$, для них всегда выполняется неравенство $||\Sigma \alpha_i \zeta(\omega_i)||_X \le c^* ||\Sigma \alpha_i \omega_i||_H$.

С этой целью рассмотрим произвольный (но фиксированный) набор векторов $\{\chi_{T_i} \cdot (g, w, q)_i\}_{i=1,\ldots,k}$ из Ω; при этом, не теряя общности, можно положить, что все функции χ_{T_i} различны, а сам набор упорядочен таким образом, что $t_i < t_j \Leftrightarrow i < j$. Семейству $\{\chi_{T_i} \cdot (g, w, q)_i\}_{i=1,\ldots,k}$ и произвольной совокупности чисел $\{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,k}$ сопоставим подмножество $\{\omega_i\}_{i=1,\ldots,k} \subset \Omega$ такое, что каждый его элемент ω_i образован согласно следующему алгоритмическому правилу: $\omega_i = \Sigma \alpha_n (g, w, q)_n$, $n = i, \ldots, k$. Ясно, что имеет место равенство $\Sigma \alpha_i \chi_{T_i} \cdot (g, w, q)_i = \Sigma(\chi_{T_i} - \chi_{T_i - 1})\omega_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Условимся компоненты тройки $(g, w, q)_i \in Q$ обозначать g_i, w_i и q_i, а $g_{i\omega}, w_{i\omega}$ и $q_{i\omega}$ — соответственно компоненты тройки $(g_{i\omega}, w_{i\omega}, q_{i\omega}) = \omega_i \in \Omega$ и пусть $T_i^* := [t_i, t_{i-1}]$. В такой постановке справедлива следующая цепочка транзитивных отношений (ниже все суммы Σ берутся при индексах $i = 1, \ldots, k$):

$$||\Sigma \alpha_i \zeta(\chi_{T_i} \cdot (g, w, q)_i)||_X = ||\Sigma \int_T \alpha_i (\chi_{T_i}(\tau) dg_i(\tau) / d\tau)\mu(d\tau)||_X =$$

$$= ||\Sigma \int_T ((\chi_{T_i} - \chi_{T_{i-1}})(\tau) dg_{i\omega}(\tau) / d\tau)\mu(d\tau)||_X \le$$

$$\le \Sigma ||\int_T ((\chi_{T_i} - \chi_{T_{i-1}})(\tau) dg_{i\omega}(\tau) / d\tau)\mu(d\tau)||_X \le$$

$$\le \Sigma \int_{T_i^*} ||dg_{i\omega}(\tau) / d\tau||_X \; \mu(d\tau) \le$$

$$\le \Sigma(\nu_+(T_i^*))^{1/2} \left(\int_{T_i^*} (||g_{i\omega}(\tau)||_X^2 + ||w_{i\omega}(\tau)||_Y^2 + ||q_{i\omega}(\tau)||_Z^2)\mu(d\tau)\right)^{1/2} \le$$

$$\le (\Sigma(\nu_+(T_i^*))^{1/2} \left(\Sigma \int_{T_i^*} (||g_{i\omega}(\tau)||_X^2 + ||w_{i\omega}(\tau)||_Y^2 + ||q_{i\omega}(\tau)||_Z^2)\mu(d\tau)\right)^{1/2} \le$$

$$\le c^* \left(\Sigma \int_{T_i^*} (||g_{i\omega}(\tau)||_X^2 + ||w_{i\omega}(\tau)||_Y^2 + ||q_{i\omega}(\tau)||_Z^2)\mu(d\tau)\right)^{1/2} =$$

$$= c^* \Big(\int_T \Sigma((||(\chi_{T_i} - \chi_{T_i - 1})(\tau) g_{i\omega}(\tau)||_X^2 + ||(\chi_{T_i} - \chi_{T_i - 1})(\tau) w_{i\omega}(\tau)||_Y^2 +$$

$$+ ||(\chi_{T_i} - \chi_{T_i - 1})(\tau) q_{i\omega}(\tau)||_Z^2 \; \mu(d\tau)\Big)^{1/2} =$$

$$= c^* \left(\int_T (\Sigma(||\alpha_i \chi_{T_i}(\tau) g_i(\tau)||_X^2 + ||\alpha_i \chi_{T_i}(\tau) w_i(\tau)||_Y^2 + ||\alpha_i \chi_{T_i}(\tau) q_i(\tau)||_Z^2))\mu(d\tau)\right)^{1/2} =$$

$$= c^* ||\Sigma \alpha_i \chi_{T_i}(\tau)(g, w, q)_i||_H.$$

Здесь $c^* = (\nu_+(T))^{1/2}$ и, таким образом, первый и последний члены этой цепочки показывают, что линейное непрерывное распространение ζ^* существует.

Далее, пусть $\mathrm{id}_{\operatorname{Span}\Omega}$ — единичный оператор на многообразии $\operatorname{Span}\Omega$. Аналогично введем следующие операторы: $\mathrm{id}_{\operatorname{Ker}\mathrm{id}}$ на $\operatorname{Ker}\mathrm{id}_{\operatorname{Span}\Omega}$ и $\mathrm{id}_{\operatorname{Ker}\zeta^*}$ на $\operatorname{Ker}\zeta^*$.

Используя введенные выше конструкции, наглядно все необходимые дальнейшие рассуждения содержатся в следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Ker}\operatorname{id}_{\operatorname{Span}\Omega} & \xrightarrow{\operatorname{id}_{\operatorname{Ker}\operatorname{id}}} & \operatorname{Span}\Omega & \xrightarrow{\operatorname{id}_{\operatorname{Span}\Omega}} & \operatorname{Span}\Omega \\ \cap & & \| & & \downarrow \xi\_ \\ \operatorname{Ker}\zeta^* & \xrightarrow{\operatorname{id}_{\operatorname{Ker}\zeta^*}} & \operatorname{Span}\Omega & \xrightarrow{\zeta^*} & X \end{array} .$$

Для каждого элемента ω из области значений оператора $\operatorname{id}_{\operatorname{Span}\Omega}$ в силу условия $\{0\} = \operatorname{Ker}\operatorname{id}_{\operatorname{Span}\Omega} \subset \operatorname{Ker}\zeta^*$ следует, что вектор $\operatorname{id}_{\operatorname{Span}\Omega^{-1}}(\omega)$ переводится оператором ζ^* в вектор $\zeta^*(\omega)$. Этот элемент $\zeta^*(\omega)$ и поставим в соответствие элементу ω при действии оператора $\xi\_$. Полученный оператор $\xi\_$ отображает $\operatorname{Span}\Omega$ в пространство X и, очевидно, линеен и непрерывен. Действительно, если D — открытое множество в X, то его полный прообраз при отображении $\xi\_$ равен $\operatorname{id}_{\operatorname{Span}\Omega}[\zeta^{*-1}[D]]$. Но множество $\zeta^{*-1}[D]$ открыто в силу непрерывности оператора ζ^*, тогда как область $\operatorname{id}_{\operatorname{Span}\Omega}[\zeta^{*-1}[D]]$ открыта в силу гомеоморфизма $\operatorname{id}_{\operatorname{Span}\Omega}$. Теперь почти дословное повторение доказательства теоремы 1 в части построения непрерывного продолжения ζ^* оператора $\xi\_$ на все пространство H, а также выбора (лемма 1) для ξ_2-модели ζ^* эквивалентной ей $(A, B, B^{\#})_2$-модели $(A, B, B^{\#})$ убеждает в справедливости, что $dg(\cdot)/dt = Ag + Bw + B^{\#}q$, $(g, w, q) \in Q$, и осталось показать, что из этого условия следует $\exists \sup_L \Psi(Q) \in L_2(T, \mu, R)$. Итак, имеем

$$dg(t)/dt = A(t)g(t) + B(t)w(t) + B^{\#}(t)q(t), (g, w, q) \in Q \Rightarrow ||dg(t)/dt||_X \leq$$

$$\leq ||A(t)||_{L(X,X)}\, ||g(t)||_X + ||B(t)||_{L(Y,X)}\, ||w(t)||_Y + ||B^{\#}(t)||_{L(Z,X)}\, ||q(t)||_Z ,$$

$$(g, w, q) \in Q \Rightarrow \forall (g, w, q) \in Q,\ \Psi(g, w, q) \leq_L (||A(\cdot)||^2_{L(X,X)} + ||B(\cdot)||^2_{L(Y,X)} +$$

$$+ ||B^{\#}(\cdot)||)^{1/2} \in L_2(T, \mu, R).$$

Последнее означает, что множество $\Psi(Q)$ порядково ограничено в $L_2(T, \mu, R)$. Следовательно (теорема 17 [6, с. 68]), существует $\sup_L \Psi(Q)$ класса $L_2(T, \mu, R)$.

Теорема доказана.

Пусть G и M — произвольные (но фиксированные) ненулевые замкнутые подпространства в $(H, ||\cdot||_H)$, такие что $G \cap M = \{0\}$; $\gamma[G, M] := \inf\{||(h/||h||_H - m/||m||_H)||_H : h \in G \setminus \{0\},\ m \in M \setminus \{0\}\}$ — угловое расстояние [10, с. 21] между подпространствами G и M. Ясно, что функция углового расстояния $\gamma[\cdot, \cdot]$ посредством скалярного произведения в H тесно связана [10, с. 42] с обычной конструкцией угла в гильбертовом пространстве (см., например, теоремы 11.D [10, с. 21] и 14.C [10, с. 42]).

Пусть $N_1, N_2 \subset \Pi_{u^{\#}}, N_1 \cap N_2 = \varnothing$ — семейства динамических процессов с реализацией (1) (необязательно с одной и той же $(A, B, B^{\#})_2$-моделью для N_1 и N_2). Рассмотрим задачу: не прибегая к теореме 2, но используя факт существования реализаций для N_1, N_2, определить на языке угловой метрики $\gamma[\cdot, \cdot]$ условия, когда семейство процессов $N := N_1 \cup N_2$ по-прежнему характеризуется K-решениями некоторого уравнения (1); другой геометрический подход к решению этой задачи можно развить, опираясь на свойство полуаддитивности оператора Релея–Ритца (теорема 3 [2]), или в варианте $\operatorname{Card} N := \aleph_0$ (алеф нуль) на модифицированную из [14] конструкцию индуктивного расширения K-решений.

Пусть E_1 и E_2 — замыкания в пространстве H линейных многообразий $\operatorname{Span}\{\chi \cdot (x, u, u^{\#}(x)) : \chi \in F, (x, u, u^{\#}(x)) \in N_1\}$ и $\operatorname{Span}\{\chi \cdot (x, u, u^{\#}(x)) : \chi \in F, (x, u, u^{\#}(x)) \in N_2\}$, где F — семейство классов эквивалентности (mod μ) всех характеристических функций, индуцированных элементами σ-алгебры $\wp_\mu$.

Теорема 3. Семейство динамических процессов $N := N_1 \cup N_2$ состоит (исключительно) из K-решений некоторого уравнения (1), если $\gamma[E_1, E_2] > 0$.

Доказательство. $\gamma[E_1, E_2] > 0 \Rightarrow E_1 \cap E_2 = \{0\}$ $\& E_1 \neq E_1 + E_2 \neq E_2 \Rightarrow$ для каждой тройки $(g_0, w_0, q_0) \in \operatorname{Span} N \subset E_1 + E_2$ имеет место равенство $(g_0, w_0, q_0) = (g_1, w_1, q_1) + (g_2, w_2, q_2)$, где слагаемые $(g_1, w_1, q_1) \in \operatorname{Span} N_1 \subset E_1$ и $(g_2, w_2, q_2) \in \operatorname{Span} N_2 \subset E_2$ определяются единственным представлением соответственно в $\operatorname{Span} N_1$ и $\operatorname{Span} N_2$.

В соответствии с теоремой 2 для каждого множества $S \in \wp_\mu$, а также означенных выше троек (g_1, w_1, q_1) и (g_2, w_2, q_2) справедливы неравенства

$$\nu_1^-(S) \le (\nu_1^+(S))^{1/2} (\nu_1(S))^{1/2} \text{ и } \nu_2^-(S) \le (\nu_2^+(S))^{1/2} (\nu_2(S))^{1/2},$$

где соответствующие меры равны:

$$\nu_1^-(S) := \int_S ||dg_1(\tau) / d\tau||_X \ \mu(d\tau),$$

$$\nu_1(S) := \int_S (||g_1(\tau)||_X^2 + ||w_1(\tau)||_Y^2 + ||q_1(\tau)||_Z^2 \ )\mu(d\tau),$$

$$\nu_2^-(S) := \int_S ||dg_2(\tau) / d\tau||_X \ \mu(d\tau),$$

$$\nu_2(S) := \int_S (||g_2(\tau)||_X^2 + ||w_1(\tau)||_Y^2 + ||q_2(\tau)||_Z^2 \ )\mu(d\tau). \tag{8}$$

Здесь ν_1^+ и ν_2^+ — некоторые положительные меры, абсолютно непрерывные относительно μ и не зависимые от «конкретизаций» множества $S \in \wp_\mu$ и троек вектор-функций $(g_1, w_1, q_1) \in \operatorname{Span} N_1$ и $(g_2, w_2, q_2) \in \operatorname{Span} N_2$.

Теорема 3 будет доказана, как только покажем (теорема 2), что существует такая положительная мера ν_+, абсолютно непрерывная относительно μ, что при произвольном выборе тройки $(g_0, w_0, q_0) \in \operatorname{Span} N$ и множества $S \in \wp_\mu$ выполняется $\nu_-(S) \le (\nu_+(S))^{1/2} (\nu(S))^{1/2}$, где меры ν_- и ν соответственно равны:

$$\nu_-(S) := \int_S ||dg_0(\tau) / d\tau||_X \ \mu(d\tau), \tag{9}$$

$$\nu(S) := \int_S (||g_0(\tau)||_X^2 + ||w_0(\tau)||_Y^2 + ||q_0(\tau)||_Z^2 \ )\mu(d\tau).$$

Рассмотрим $E_1 \times E_2$ с нормой $||\omega', \omega''||^* := (||\omega'||_H^2 + ||\omega''||_H^2 \ )^{1/2}$, $\omega' \in E_1$, $\omega'' \in E_2$. Ясно, что это пространство банахово. Пусть G — соответствие между $E_1 \times E_2$ и линейным многообразием $E_1 + E_2$ пространства H, организованное по правилу $(\omega', \omega'') \mapsto G(\omega', \omega'') = \omega' + \omega''$, которое линейно, непрерывно и взаимно однозначно (последнее в силу $\gamma[E_1, E_2] > 0$). На основании 11.D [10, с. 21] (устанавливающего замкнутость $E_1 + E_2$) и следствия [6, с. 454] заключаем, что непрерывен и оператор G^{-1}. Пусть число $c^* > 0$ — норма оператора G^{-1} и пусть $c := \max\{1, c^*\}$.

Рассмотрим меру $\nu_+ := c^2 (\nu_1^+ + \nu_2^+)$. Учитывая непрерывность оператора G^{-1}, а также используя (8), (9) и неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\nu_-(S) = \int_S ||dg_1(\tau) / d\tau - dg_2(\tau) / d\tau||_X \ \mu(d\tau) \le$$

$$\le \int_S ||dg_1(\tau) / d\tau||_X \ \mu(d\tau) + \int_S ||dg_2(\tau) / d\tau||_X \ \mu(d\tau) \le$$

$$\leq (\nu_1^+(S))^{1/2}(\nu_1(S))^{1/2} + (\nu_2^+(S))^{1/2}(\nu_2(S))^{1/2} \leq$$

$$\leq (\nu_1^+(S) + \nu_2^+(S))^{1/2}(\nu_1(S) + \nu_2(S))^{1/2} =$$

$$= (\nu_1^+(S) + \nu_2^+(S))^{1/2} \|\chi_S \cdot (g_1, w_1, q_1), \chi_S \cdot (g_2, w_2, q_2)\|^* \leq$$

$$\leq c(\nu_1^+(S) + \nu_2^+(S))^{1/2} \|\chi_S \cdot (g_1 + g_2, w_1 + w_2, q_1 + q_2)\|_H =$$

$$(\nu_+(S))^{1/2}(\nu(S))^{1/2},$$

где χ_S — характеристическая функция множества $S \in \wp_\mu$.

Теорема доказана.

Теорема 3 позволяет, в частности, без использования теоремы 2 исследовать свойство реализации *D*-системы $N \subset \Pi_{u^\#}$, $1 < \mathrm{Card}\, N \leq k < \aleph_0$, через анализ угловых расстояний $\gamma[\Sigma_{j=1,\ldots,i} E_j, E_{i+1}]$ на конечном семействе одноэлементных подмножеств N_i $(i = 1, \ldots, k)$ из *N*, прошедших предварительную апробацию (теорема 1: $\Psi(N_i) \in L_2(T, \mu, R)$) на предмет существования реализации (1) для каждого динамического процесса N_i; в данном контексте особый аналитический интерес приобретает постановка дифференциального моделирования слабоструктурированных систем, связанная с методологической позицией г)[3] замечания 1.

С учетом общих положений, высказанных в замечании 3, теорема 3 имеет (как «контрпункт» положения в) замечания 1) очевидное следствие.

Следствие 3. Пусть N_1, N_2 — различные максимальные элементы в упорядоченном по включению семействе всех подмножеств из $\Pi_{u^\#}$, обладающих реализацией (1) с законом $x \mapsto u^\#(x): AC(T, X) \to L_2(T, \mu, Z)$. Тогда $\gamma[E_1, E_2] = 0$, при этом N_1 и N_2 не обладают общей $(A, B, B^\#)_2$-моделью в реализации (1) с законом $u^\#$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учитывая круг теоретико-системных вопросов, охватываемых этой статьей, и вовлеченных в дифференциальное моделирование на гильбертовых пространствах непрерывных *D*-систем с программно-позиционным управлением, вполне естественно ожидать их развития в варианте, учитывающем специфику решения задачи реализации моделируемых динамических процессов в классе стационарных систем (1); особо важной в прикладных постановках. Эта, на первый взгляд, незначительная разница $(A, B, B^\#) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X)$, по сравнению с рассмотренной в данной статье постановкой нестационарной реализации (1), приводит к кардинальной перемене в сложности конструктивного решения задачи апостериорного моделирования квазилинейной стационарной *D*-системы.

Авторы выражают признательность профессору А.В. Данееву и профессору Ю.Э. Линке за полезные обсуждения.

[3]Интересно сравнить эту позицию с мнением Р. Калмана [3, с. 36]: «Построение конкретных моделей обычно относится к компетенции физиков и не входит в компетенцию ни специалистов по теории управления, ни даже по теории систем». Частично теоретико-множественная методология данного вопроса обозначена в докладе: V.A. Rusanov, A.V. Daneev, A.E. Kumenko, D.Yu. Sharpinsky. Structural identification of Dynamic Systems: Entropy Approach. — Proc. ICSE'06. 18-th Intern. Conf. on Systems Engineering. Coventry Univ., UK (ISBN 978-1-84600-013). 5–7 September, 2006, p. 419–424.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данеев А.В., Русанов В.А. К методам качественной теории идентификации сложных динамических систем // Докл. РАН. — 1997. — **355**, № 2. — С. 174–177.
2. Данеев А.В., Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю. Принцип максимума энтропии в структурной идентификации динамических систем. Аналитический подход // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 11. — С. 16–24.
3. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: УРСС, 2004. — 400 с.
4. Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. От реализации Калмана-Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 6. — С. 137–157.
5. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
7. Хилле Э., Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 830 с.
8. Barbu V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space // Ncordhoff Intern. Publ., Leyden (the Netherlands), 1976. — 352 p.
9. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966. — 500 с.
10. Массера Х.Л., Шеффер Х.Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.
12. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Наука, 1986. — 752 с.
13. Бурбаки Н. Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 456 с.
14. Данеев А.В., Русанов В.А. Порядковые характеристики свойств существования сильных линейных конечномерных дифференциальных моделей // Диф. уравнения. — 1999. — **35**, № 1. — С. 43–50.

Поступила 17.04.2007