УДК 517.9

Е.П. БЕЛАН

ОПТИЧЕСКАЯ БУФЕРНОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР

Ключевые слова: *параболическая задача, буферность, бифуркация, устойчивость, стационарные структуры*.

ВВЕДЕНИЕ

Наблюдаемый в последнее время бурный рост исследований в нелинейной оптике вызван широким использованием оптических систем в развитии информационных технологий [1]. Главные преимущества оптических методов в задачах хранения и преобразования информации связаны с параллельностью обработки сигналов, возможностью резкого повышения быстродействия выполнения операций. Благодаря естественным преимуществам оптические системы используются для создания элементов ассоциативной памяти, систем распознавания образов, обучающихся аналоговых компьютеров (см. [1–3] и др.).

Среди нелинейных оптических систем одной из самых популярных является система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура двумерной обратной связи [1, 3]. Принципиальная особенность таких систем состоит в том, что внешний контур обратной связи может использоваться для непосредственного воздействия на нелинейную динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами. Экспериментально показано, что при использовании даже простейших видов преобразований (поворот, поворот и сжатие, отражение) можно реализовать широкий спектр самоорганизации светового поля: многолепестковые ротационные волны, оптические спирали, стационарные структуры, волны переключения и др. (см. [1, 4] и библиографию к ним). Отметим, что при определенных условиях в рассматриваемых системах наблюдалась стохастизация поля — оптическая турбулентность [5, 1].

Параболические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованием аргументов искомой функции, используемые для моделирования оптических систем с двумерной обратной связью, представляют собой новый класс для исследования феномена структурообразования. Проблема возникновения структур в указанных уравнениях исследуется в математической литературе с начала 1990-х годов. Обоснование наблюдаемых автоволновых явлений для преобразования поворота на фиксированный угол в круге или кольце проведено в [6–8] на основе теории бифуркации Андронова–Хопфа, где дано описание вращающихся многолепестковых волн и исследована их устойчивость. Методы построения периодических решений для произвольной области и невырожденного гладкого преобразования развивалась в [9–11]. Метод центральных многообразий использовался в работах [12–15] для исследования бифуркаций вращающихся структур в кольце и круге для случая поворота, а также в круге для преобразования поворота совместно с радиальным сжатием. Для исследования бифуркационных вращающихся структур, как показано в [16], применим метод, основанный на построении приближенных периодических решений [17]. В работах [12, 18] изучались бифуркации стационарных структур.

Параболические уравнения с преобразованным аргументом и малой диффузией представляют интерес в связи с исследованием оптической турбулентности. Метод квазинормальных форм для указанного уравнения с преобразованием поворота применялся в [19, 20] для описания динамики бегущих волн, медленно меняющихся структур. Оптическая буферность бегущих волн была установлена в работах [21–23]. Напомним, следуя [22], что в фазовом пространстве некоторой бесконечномерной динамической системы реализуется феномен буферности, если при подходящем выборе параметров можно гарантировать существование в ней любого фиксированного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов и т.д.). Роль феномена буферности в динамике сложных систем и в процессах самоорганизации выявлена в [22]. Отметим, что в ней построена теория диссипативных структур Тьюринга–Пригожина для систем параболических уравнений с малой диффузией и граничными условиями Неймана на отрезке.

Данная работа посвящена динамике стационарных структур параболического уравнения на окружности и малой диффузией в случае преобразования поворота на рационально соизмеримую π величину. Применяемый метод исследования указанной задачи основан на своеобразном сочетании формализма метода центральных многообразий и метода Галеркина. Этот метод был предложен и обоснован автором в [23] для исследования динамики бегущих волн параболического уравнения на окружности с преобразованием поворота и малой диффузией.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 приводится параболическое уравнение на окружности с преобразованием поворота на угол, рационально соизмеримый π, и малой диффузией. Здесь рассмотрена задача о выделении пространственно однородного стационарного решения указанной задачи, в окрестности которого изучается задача о бифуркации рождения пространственно неоднородных стационарных решений. В разд. 2 строятся две стационарные структуры: одна из них ответвляется из нуля при потере им устойчивости, а вторая тогда, когда размерность неустойчивого многообразия нуля становится равной 4. Раздел 3 посвящен анализу устойчивости структур, построенных в предыдущем разделе. Основной результат статьи — теорема 1 о существовании и устойчивости стационарных структур сформулирована в разд. 4. Из этой теоремы следует, что в исходной задаче реализуется явление буферности стационарных структур. В следующем разделе рассмотрен предельный случай — коэффициент диффузии равен нулю. Согласно теореме 2 в этом случае реализуется явление гипербуферности, т.е. сосуществование в указанном случае счетного числа экспоненциально орбитально устойчивых стационарных структур. Заключение содержит некоторые выводы, основанные на полученных результатах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На окружности $S^1 = R / 2\pi Z$ рассмотрим краевую задачу [1, 19–23]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + K(1+\gamma \cos Qu), \;\; u(t, \theta + 2\pi) = u(t, \theta) \tag{1}$$

с малым параметром μ. Здесь $u(t, \theta)$ — фаза световой волны, $Qu(t, \theta) = u(t, \theta + h)$, h — угол поворота в двумерной обратной связи, коэффициент $K > 0$ пропорционален интенсивности светового потока, $\gamma \in (0, 1)$ — видность интерференционной картины.

Будем далее предполагать, что h удовлетворяет условию

$$h = \pi \frac{p}{q}, \tag{2}$$

где p, q — взаимно простые натуральные числа, а p — нечетное.

Рассмотрим свойства полугруппы, порожденной задачей (1). Пусть H — гильбертово пространство измеримых на окружности $S^1 = R / 2\pi Z$ функций $L_2(S^1)$ со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) v(\theta) d\theta.$$

Обозначим $\mathrm{H}^l = \mathrm{H}^l(S^1)$, $l \in Z_+$, пространство Соболева. Скалярное произведение в H^l определяется формулой

$$\langle u, v \rangle_l = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^{(k)}(\theta) v^{(k)}(\theta) d\theta.$$

В пространстве H норму обозначим $\|\cdot\|$. Норму в пространстве H^l обозначим $\|\cdot\|_l$.

Пусть $T > 0$. Согласно [11] задача (1) с начальным условием $u\big|_{t=0} = u_0$, $u_0 \in \mathrm{H}$, имеет единственное решение $u \in L_\infty(\mathrm{H}) \cap L_2(\mathrm{H}^l)$. Здесь $L_p(B) = L_p([0, T], B)$, где B принимает значения H, H^l.

Обозначим $\{S_t\}$ полугруппу, порожденную задачей (1). $\{S_t\}$ обладает свойствами, сформулированными в теореме 4 [24, гл.1] (см. также [11]). Полугруппа $\{S_t\}$ S^1-эквивариантна, т.е. инвариантна относительно группы вращений окружности. Следовательно, если $u(t, \theta)$ — решение задачи (1), то $u(t, \theta + g)$, где $g \in S^1$, — также ее решение.

В качестве фазового пространства задачи (1), т.е. пространства ее начальных условий, примем пространство H. Будем далее интересоваться вопросами о существовании, форме и устойчивости (в метрике H) ее пространственно неоднородных состояний равновесия, бифурцирующих из пространственно однородных состояний равновесия, т.е. ее решений $u(t,\theta)=w$, $w=w(K)$, определяемых из уравнения

$$w=K(1+\gamma\cos w) \tag{3}$$

и которые теряют устойчивость при увеличении K апериодически. Для этого фиксируем какую-либо гладкую ветвь решений

$$w=w(K),\ 1+K\gamma\sin w(K)\neq 0 \tag{4}$$

уравнения (3). Затем линеаризуем уравнение (1) на состоянии равновесия $w=w(K)$ и применим к полученному на S^1 уравнению $\dot{u}=\mu\Delta u-u+\Lambda(K)Qu$, в котором $\Lambda(K)=-K\gamma\sin w(K)$, метод Фурье по системе функций $\exp(im\theta)$, $m=0,\pm 1,\pm 2\dots$. В результате убеждаемся, что спектр устойчивости рассматриваемого состояния равновесия состоит из собственных значений $-1-\mu m^2+$ $+\Lambda(K)\exp(imh)$, $m=0,\pm 1,\pm 2,\dots$.

Отсюда в силу (2) следует, что потеря устойчивости $w(K)$ при увеличении K и малых μ носит апериодический характер, если K удовлетворяет условию

$$\Lambda(K)=-1. \tag{5}$$

Согласно [21, 22] это уравнение имеет бесконечное число решений. Выберем одно из них и обозначим его $\hat{K}$. Ясно, что существует аналитическая функция $k(\nu)$, $k(\nu)=0$, определенная в окрестности нуля и такая, что $\Lambda(\hat{K}+k(\nu))=-1-\nu$.

Выполним теперь в (1) преобразование $u=\vartheta+w(\nu)$, где $w(\nu)=w(\hat{K}+k(\nu))$, и представим полученное в H уравнение в виде

$$\dot{\vartheta}=L(\mu,\nu)\vartheta+R(Q\vartheta,\nu), \tag{6}$$

в котором

$$L(\mu,\nu)\vartheta=\mu\Delta\vartheta-\vartheta-(1+\nu)Q\vartheta, \tag{7}$$

$$R(\vartheta,0)=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(\hat{w})\cdot\vartheta^2+\frac{1}{6}\vartheta^3+\dots. \tag{8}$$

Здесь $\hat{w}=w(\hat{K})$. Очевидно, $L(\mu,\nu)\exp(im\theta)=\lambda_m(\mu,\nu)\exp(im\theta)$, $m=0,\pm 1,\dots$, где $\lambda_m(\mu,\nu)=-1-\mu m^2-(1+\nu)\exp(imh)$, $m=0,\pm 1,\dots$. Согласно (2) $\lambda_{s^+}(\mu,\nu)=$ $=-\mu(sq)^2+\nu$, $s^+=sq$, $s=1,3,5,\dots$. Остальные же собственные значения оператора $L(0,0)$, рассматриваемого в пространстве H, лежат в левой комплексной полуплоскости и равномерно отделены от мнимой оси.

Далее предполагается, что $\nu>0$. Примем теперь в качестве бифуркационного параметра $\varepsilon=\frac{\mu}{\nu}q^2$. Очевидно, что при убывании параметра ε и прохождении его через критические значения s^{-2}, $s=1,3,5,\dots$, каждый раз размерность неустойчивого многообразия нулевого решения уравнения (6) увеличивается на два порядка. Объектом дальнейшего анализа является динамика стационарных пространственно неоднородных решений уравнения (6), бифурцирующих из нулевого решения при убывании параметра ε и прохождении через критические значения s^{-2}, $s=1,3,5,\dots$. Точнее говоря, поставим вопрос о существовании, форме, взаимодействиях и устойчивости указанных стационарных решений.

2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Построим здесь стационарные решения уравнения (6), которые ответвляются из нуля при убывании параметра ε и его прохождении через значения $1, 3^{-2}$. Для этого в соответствии с формализмом построения центральных многообразий для

S^1-эквивариантных уравнений [23] в критическом случае размерности 10 построим приближенные решения уравнения (6) в виде

$$\vartheta=\sum_{k=1}^{3}\sigma_k\,(z\exp(im(\cdot)\eta),\text{к.с.}),\tag{9}$$

где $z\exp(im(\cdot)\eta)=(z_{2s-1}\exp(i(2s-1)\eta),\, s=1,\ldots,5)$, $\eta=q\theta$, к.с. — стандартное обозначение комплексно сопряженной величины, $\sigma_1(z,\bar z)=\sum_{s=1}^{5} z_{2s-1}+\text{к.с.}$, σ_k — форма степени k, $k=2,3$, относительно z, $\bar z$, а переменная z_{2s-1}, $s=1,\ldots,5$, удовлетворяет уравнению

$$\dot z_{2s-1}=\lambda_{(2s-1)^+}\, z_{2s-1}+g_{2s-1}(z,\bar z),\ \ s=1,2,\ldots,5.\tag{10}$$

Уравнения относительно комплексно сопряженных переменных, как обычно, опущены. Система (10) S^1-эквивариантна, т.е. формы третьей степени $g_{2s-1}(z,\bar z)$, $s=1,2,\ldots,5$, удовлетворяют условиям

$$g_{2s-1}(z\exp(im(\cdot)\eta),\text{к.с.})=\exp(i(2s-1)\eta)\,g_{2s-1}(z,\bar z),\ \ s=1,2,\ldots,5.\tag{11}$$

Подставим (9), (10) в уравнение (6). Затем после замены $z\exp(im(\cdot)\eta)\to z$ приравняем формы второй, третьей степени относительно z, $\bar z$. Полагая $\mu=0$, $\nu=0$ и воспользовавшись (8), получим следующее уравнение относительно σ_2:

$$\sigma_2(z,\bar z)+\sigma_2(-z,-\bar z)=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\hat w\left(\sum_{s=1}^{5} z_{2s-1}+\text{к.с.}\right)^2.$$

Отсюда следует, что $\sigma_2(z,\bar z)=-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\hat w\left(\sum_{s=1}^{5} z_{2s-1}+\text{к.с.}\right)^2$. Перейдем теперь к уравнению относительно σ_3:

$$\sigma_3(z,\bar z)+\sigma_3(-z,-\bar z)=P_3\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\hat w\left(\sum_{s=1}^{5} z_{2s-1}+\text{к.с.}+\sigma_2(z,\bar z)\right)^2\right)-$$

$$-\frac{1}{6}\left(\sum_{s=1}^{5} z_{2s-1}+\text{к.с.}\right)^3-\sum_{s=1}^{5} g_{2s-1}(z,\bar z),\tag{12}$$

в котором P_3 — проектор в пространстве многочленов относительно z, $\bar z$ на пространство их форм порядка 3. Очевидно, что левая часть равенства (12) равна нулю для любой формы σ_3 третьей степени. Выберем теперь $g_{2s-1}(z,\bar z)$, $s=1,2,\ldots,5$, так, чтобы каждый моном в (12), удовлетворяющий одному из условий (11), был нулевым. Отсюда однозначно находим S^1-эквивариантные формы $g_{2s-1}(z,\bar z)$, $s=1,2,\ldots,5$. Затем в соответствии с методом Галеркина полагаем $\sigma_3=0$. Обозначим $d=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2\hat w\right)$. В системе (10) выполним преобразование $zd^{1/2}\to z$. В результате получим S^1-эквивариантную систему уравнений. При этом она является градиентной системой уравнений

$$\dot z_{2s-1}=-\frac{\partial V_5(z,\bar z,\varepsilon)}{\partial\bar z_{2s-1}},\ \ s=1,\ldots,5,\tag{13}$$

в которой

$$V_5=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\left(|z_{2k-1}|^2\left(\lambda_{(2k-1)^+}(\varepsilon)-2\sum_{s=k+1}^{5}|z_{2s-1}|^2\right)-\frac{1}{2}|z_{2k-1}|^4\right)+$$

$$+\frac{1}{3}(z_1^3\bar z_3+z_3^3\bar z_9)+z_1^2(z_3\bar z_5+z_5\bar z_7+z_7\bar z_9)+z_3^2(\bar z_1\bar z_5+z_1\bar z_7)+$$

$$+z_5^2(\bar z_1\bar z_9+z_3\bar z_7)+2z_1\bar z_3(\bar z_5 z_7+\bar z_7 z_9)+2(\bar z_1\bar z_3\bar z_5 z_9+z_3\bar z_5\bar z_7 z_9)+\text{к.с.},\quad(14)$$

а $\lambda_{(2k-1)^+}(\varepsilon)=\nu(1-\varepsilon(2k-1)^2)$, $k=1,\dots,5$. Подчеркнем, что градиентность системы (10) установлена здесь в результате проведенного анализа.

Переходим теперь к бифуркационному анализу системы (13). При убывании параметра ε и его прохождении через 1 из нулевого решения (13) ответвляется вещественная стационарная точка $A_1(\varepsilon)=\lambda_{1^+}^{1/2}(\varepsilon)(x^1(\varepsilon),x^1(\varepsilon))$. Здесь $x^1(\varepsilon)=$ $=(x_{1,2k-1}(\varepsilon),k=1,\dots,5)$, а $x_{1,2k-1}(\varepsilon)$, $k=1,\dots,5$, — гладкие функции ε. Легко видеть, что

$$x_{1,1}(\varepsilon)\to 1,\ x_{1,2k-1}(\varepsilon)\to 0,\ k=2,3,4,5,\ \varepsilon\to 1-0.\quad(15)$$

Согласно проведенному численному анализу функции $|x_{1,2k-1}(\varepsilon)|$, $k=1,\dots,5$, убывают на $(0,1)$, причем справедливы неравенства $(-1)^{k-1}x_{1,2k-1}(\varepsilon)>0$, $k=1,\dots$ $\dots,5$. Отметим, что в соответствии с S^1-эквивариантностью системы (13) точка $A_1(\varepsilon)$ порождает окружность стационарных точек $\{\lambda_1^{1/2}(\varepsilon)(\exp(im(\cdot)\varphi)x^1(\varepsilon),$ $\exp(-im(\cdot)\varphi)x^1(\varepsilon)),\varphi\in S^1\}$.

Итак, при убывании параметра ε и его прохождении через 1 из нулевого решения системы (13) бифурцирует стационарное приближенное решение

$$\tilde\vartheta_1(\eta,\varepsilon)=2\left(\frac{\lambda_{1^+}(\varepsilon)}{d}\right)^{1/2}\tilde y_1(\eta,\varepsilon)-\operatorname{ctg}\hat w\left(\frac{\lambda_{1^+}(\varepsilon)}{d}\right)\tilde y_1^2(\eta,\varepsilon),\quad(16)$$

где

$$\tilde y_1(\eta,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{5}x_{1,2k-1}(\varepsilon)\cos(2k-1)\eta,\ \eta=q\theta.$$

В силу (15) $\tilde y_1(\eta,\varepsilon)$ — квазигармоническая функция, если $\varepsilon\in(1-\delta,1)$, где $\delta>0$ — мало. При значительном отклонении ε от 1 функция $\tilde y_1(\eta,\varepsilon)$ теряет квазигармоническую форму, переходя при $\varepsilon\to 0$ на промежутке $[0,\pi]$ изменения η в контрастную структуру с двумя криволинейными полочками. Имеет место равенство

$$\tilde y_1(\eta,0)=1{,}083\cos\eta-0{,}352\cos 3\eta+0{,}2\cos 5\eta-0{,}132\cos 7\eta+0{,}093\cos 9\eta.$$

Несложно убедиться, что функцию $\tilde y_1(\eta,0)$ можно рассматривать как приближенное разложение $\operatorname{sign}(\cos\eta)$ по системе функций $\cos(2k-1)\eta$, $k=1,\dots,5$.

Рассмотрим теперь вопрос о степени точности решения $\tilde\vartheta_1(\eta,\varepsilon)$ уравнения (6), удовлетворяющего равенству (16). Подставим $\tilde\vartheta_1(\eta,\varepsilon)$, $\eta=q\theta$, в уравнение (6). В результате несложного анализа приходим к заключению, что $\tilde\vartheta_1(\eta,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (6) по норме пространства H с точностью

$$c_1\lambda_1^{3/2}(\varepsilon)+c_2\lambda_1(\varepsilon)\sum_{i+J+k>9}|x_{1,i}(\varepsilon)x_{1,j}(\varepsilon)x_{1,k}(\varepsilon)|$$

по невязке. Здесь c_k, $k=1,2$, — положительные постоянные.

При убывании ε и прохождении через 3^{-2} из неустойчивого нулевого решения системы (13) ответвляется вещественная точка $A_3(\varepsilon)=\lambda_{3^+}^{1/2}(\varepsilon)(x^3(\varepsilon), x^3(\varepsilon))$, где $x^3(\varepsilon)=(0, x_{3,1}(\varepsilon), 0, 0, x_{3,3}(\varepsilon))$. Очевидно, $x_{3,1}(\varepsilon)\to 1$, $x_{3,3}(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 3^{-2}-0$. Отметим, что функции $|x_{3,k}(\varepsilon)|$, $k=1,3$, убывают на промежутке $(0, 3^{-2})$, причем $x_{3,1}(\varepsilon)>0$, $x_{3,3}(\varepsilon)<0$.

Как и выше, теперь можно указать приближенное стационарное решение $\widetilde{\vartheta}_3(\eta,\varepsilon)$ уравнения (6), которое ответвляется из нуля при убывании ε и его прохождении через 3^{-2}. Заметим, однако, что $\widetilde{\vartheta}_3(\eta,\varepsilon)$ можно получить из $\widetilde{\vartheta}_1(\eta,\varepsilon)$ с помощью принципа подобия [25, 22]. Приведем в этой связи общий результат. Обозначим $\vartheta_{2k-1}(\eta,\varepsilon)$, $k=2,3,\ldots$, стационарное решение (6), которое ответвляется из нуля при убывании ε и его прохождении через $(2k-1)^{-2}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что имеет место равенство

$$\vartheta_{2k-1}(\eta,\varepsilon)=\vartheta_1((2k-1)\eta, (2k-1)^2\varepsilon),\ k=2,3,\ldots, \tag{17}$$

в котором $\vartheta_1(\eta,\varepsilon)\approx\widetilde{\vartheta}_1(\eta,\varepsilon)$. Согласно [26] и проведенному ниже анализу на устойчивость существует стационарное решение $\theta_1(\eta,\varepsilon)$ уравнения (6), определенное на промежутке (0,1) изменения ε и сохраняющее на нем экспоненциальную орбитальную устойчивость.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ $\widetilde{\vartheta}_1(\eta,\varepsilon), \widetilde{\vartheta}_3(\eta,\varepsilon)$

Для исследования на устойчивость решения $\widetilde{\vartheta}_1(\eta,\varepsilon)$ обратимся к вопросу об устойчивости стационарной точки $A_1(\varepsilon)$ системы (13). Указанная точка рождается и сохраняет экспоненциальную орбитальную устойчивость на всем промежутке $(0,1)$ изменения параметра ε. Для обоснования этого предложения рассмотрим систему уравнений размерности 8, положив в (13) $z_9=0$. Предположим теперь, что при прохождении ε значения 1 ответвляющаяся из нуля точка осталась бы на координатной оси. Тогда она потеряла бы устойчивость при $\varepsilon\approx 0{,}01721$. Ее «отход» от координатной оси позволяет ей сохранить устойчивость. Интересно, что

$$\lambda_{1^+}(0{,}01721)(-2{,}311, -2{,}127, -2{,}02, -1{,}993, -1{,}916, -1{,}712, -1{,}115, -0{,}174)$$

является спектром устойчивости этой точки, а при $\mu=0$, $\nu>0$ $(\varepsilon=0)$ им является

$$\nu(-2{,}408, -2{,}225, -2{,}184, -1{,}968, -1{,}803, -1{,}600, -1{,}482, -0{,}094).$$

Так как рассматриваемая стационарная точка порождает замкнутую кривую стационарных точек системы, то ее спектр имеет одно нулевое собственное значение. В этой роли при $\varepsilon=0$, $\varepsilon=0{,}017210$ выступают $-\nu\,0{,}094$, $\lambda_{1^+}(0{,}01721)\,0{,}1740$ соответственно.

Подчеркнем также, что стационарная точка, ответвляющаяся из нуля при прохождении ε значения $\varepsilon=3^{-2}$ указанной системы размерности 8, рождается и остается неустойчивой на всем промежутке $(0, 3^{-2})$ изменения ε.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости стационарного решения $\widetilde{\vartheta}_1(\eta,\varepsilon)$ уравнения (6), воспользовавшись уравнением первого приближения. Итак, линеаризуем (6) на решении $\widetilde{\vartheta}_1(\eta,\varepsilon)$. В полученном уравнении выполним замену $\eta=q\theta$. В результате получим уравнение

$$\vartheta_t=-\vartheta-(1+\nu)Q_1\vartheta+\mu q^2\vartheta_{\eta\eta}-\left(\mathrm{ctg}(\hat{w})Q_1\widetilde{\vartheta}_1-\frac{1}{2}(Q_1\widetilde{\vartheta})^2\right)Q_1\vartheta,\ \vartheta(\eta+2\pi q)=\vartheta(\eta),$$

где $Q_1\vartheta(\eta)=\vartheta(\eta+\pi)$. Рассмотрим в пространстве H соответствующую этому уравнению спектральную задачу

$$-\vartheta-(1+\nu)Q_1\vartheta+\mu q^2\vartheta_{\eta\eta}-\left(\operatorname{ctg}(\hat{w})Q_1\tilde{\vartheta}_1-\frac{1}{2}(Q_1\tilde{\vartheta})^2\right)Q_1\vartheta=\lambda\vartheta,$$
$$\vartheta(\eta+2\pi q)=\vartheta(\eta). \tag{18}$$

Учтем теперь, что для соответствующей ей невозмущенной задачи нуль является собственным числом бесконечной кратности. При этом $\operatorname{span}\{\exp(i(2k+1)\eta)\}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, — соответствующее собственное пространство. Построим решения задачи (18) в виде

$$\vartheta=\sum_{k=0}^{3}(\mathrm{b}_{2k+1}\exp i(2k+1)\eta+\mathrm{b}_{-(2k+1)}\exp(-i(2k+1))\eta)+p_1(\eta,\varepsilon)+p_2(\eta,\varepsilon)+\ldots,$$
$$\lambda=s_1(\varepsilon)+s_2(\varepsilon)+\ldots.$$

Подставим эти равенства в (18). В результате относительно p_1 выводим уравнение

$$-p_1-Qp_1=$$
$$=\operatorname{ctg}\hat{w}\left(\frac{\lambda_1(\varepsilon)}{d}\right)^{1/2}\tilde{y}(\eta,\varepsilon)\sum_{k=0}^{3}(\mathrm{b}_{2k+1}\exp i(2k+1)\eta+\mathrm{b}_{-(2k+1)}\exp(-i(2k+1))\eta).$$

Отсюда находим

$$p_1=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\hat{w}\left(\frac{\lambda_1(\varepsilon)}{d}\right)^{1/2}\tilde{y}(\eta,\varepsilon)\sum_{k=0}^{3}(\mathrm{b}_{2k+1}\exp i(2k+1)\eta+\mathrm{b}_{-(2k+1)}\exp(-i(2k+1))\eta).$$

Из необходимого условия разрешимости уравнения относительно p_2 выводим, что $(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_{-1},\ldots,\mathrm{b}_{-7})^{\mathrm{T}}$ — собственный вектор матрицы устойчивости указанной системы размерности 8 в точке $(x^1(\varepsilon),x^1(\varepsilon))$, а $s_1(\varepsilon)$ — соответствующее собственное значение. При указанном выборе $(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_{-1},\ldots,\mathrm{b}_{-7})^{\mathrm{T}}$ и $s_1(\varepsilon)$ уравнение относительно p_2 остается неразрешимым в пространстве H. Это объясняется использованием галеркинской схемы метода возмущений спектральной задачи (18). Очевидно также, что для устойчивости стационарного решения $\tilde{\vartheta}_1(\eta,\varepsilon)$ уравнения (6) необходимо, чтобы указанная матрица была устойчивой. Точнее, чтобы все ее собственные значения, кроме одного простого нулевого, были отрицательными. Таким образом, подтверждается целесообразность перехода от уравнения (6) к градиентной системе (8) при анализе на устойчивости стационарного решения $\tilde{\vartheta}_1(\eta,\varepsilon)$.

Перейдем теперь к одному из центральных вопросов — устойчивость решения ϑ_3 уравнения (6). Обратимся в этой связи к вопросу об устойчивости стационарной точки $A_3(\varepsilon)$ градиентной системы (8). Размерность неустойчивого многообразия точки $A_3(\varepsilon)$ вблизи точки бифуркации $\varepsilon=3^{-2}$, очевидно, равняется два. Найдем спектр точки $A_3(\varepsilon)$. Для этого понадобятся квадратичные формы:

$$W_{3,1}(\xi,\varepsilon)=\frac{1}{2}\sum_{k=1,\,k\neq2}^{4}(\xi_{2k-1})^2(-\gamma_{3,2k-1}(\varepsilon))+2x_{3,1}^2(\varepsilon))+$$
$$+(\xi_1\xi_5+\xi_1\xi_7)(x_{3,1}^2(\varepsilon)+2x_{3,1}(\varepsilon)x_{3,3}(\varepsilon))+2\xi_5\xi_7x_{3,1}(\varepsilon)x_{3,3}(\varepsilon),$$

$$W_{3,9}(\zeta,\varepsilon)=\frac{1}{2}((-1+\zeta_1^2+\zeta_2^2)+(-\gamma_{3,3}+\zeta_3^2+\zeta_4^2))+$$
$$+(x_{3,1}^2(\varepsilon)+2x_{3,1}(\varepsilon)x_{3,3}(\varepsilon))(\zeta_1\zeta_3+\zeta_2\zeta_4)+2x_{3,1}(\varepsilon)x_{3,3}(\varepsilon)(\zeta_1\zeta_4+\zeta_2\zeta_3),$$

где $\gamma_{3,2s-1}(\varepsilon)=\lambda_{(2s-1)^+}(\varepsilon)/\lambda_{3^+}(\varepsilon)$, $s=1,3,4,5$. Обозначим $B_{3,1}(\varepsilon)=\dfrac{\partial^2 W_{3,1}(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi^2}$, $B_{3,9}(\varepsilon)=\dfrac{\partial^2 W_{3,1}(\zeta,\varepsilon)}{\partial\zeta^2}$. Несложно убедиться, что спектр точки $A_3(\varepsilon)$ равен $\{-\sigma(B_{3,1}(\varepsilon)),-\sigma(B_{3,1}(\varepsilon)),-\sigma(B_{3,9}(\varepsilon))\}$. Здесь, как обычно, $\sigma(B)$ обозначает спектр матрицы B. А отсюда следует, что характер устойчивости стационарной точки $A_3(\varepsilon)$ градиентной системы (8) на всем промежутке $(0,3^{-2})$ изменения ε определяется квадратичной формой $W_{3,1}(\xi,\varepsilon)$, где $\xi\in R^3$. Таким образом, стационарная точка $A_3(\varepsilon)$ градиентной системы (8) экспоненциально орбитально устойчива тогда и только тогда, когда квадратичная форма $W_{3,1}(\xi,\varepsilon)$ положительно-определенная. Согласно проведенному численному анализу квадратичная форма $W_{3,1}(\xi,\varepsilon)$ является положительно-определенной тогда и только тогда, когда $\varepsilon\in(0,\varepsilon_{3,1})$. Здесь $\varepsilon_{3,1}\approx 0{,}0367$. Отметим, $\lambda_{3^+}(0{,}0367)(2{,}45943,1{,}57572,0{,}02018)$ — спектр матрицы $B_{3,1}(0{,}0367)$, спектр же матрицы $B_{3,9}(0)$ равен $\nu(2{,}0967348,1{,}721817,1{,}3470184)$.

Очевидно, справедливо приближенное равенство $\vartheta_3\approx\tilde\vartheta_3$, где

$$\tilde\vartheta_3(\eta,\varepsilon)=2\left(\frac{\lambda_{3^+}(\varepsilon)}{d}\right)^{1/2}\tilde y_3(\eta,\varepsilon)-\operatorname{ctg}\hat w\,\frac{\lambda_{3^+}(\varepsilon)}{d}\,\tilde y_3^2(\eta,\varepsilon),\tag{19}$$

$$\tilde y_3(\eta,\varepsilon)=x_{3,1}(\varepsilon)\cos 3\eta+x_{3,3}(\varepsilon)\cos 9\eta.$$

Отметим, что имеет место равенство $\tilde y_3(\eta,0{,}0367)=1{,}0323\cos 3\eta-0{,}0732\cos 9\eta$.

Построим теперь приближенные решения уравнения (6) в виде (9), где $z\exp(im(\cdot)\eta)=(z_{2s-1}\exp(i(2s-1)\eta),s=1,\ldots,8)$. Рассуждая, как и выше, приходим к S^1-эквивариантной градиентной системе уравнений

$$\dot z_{2s-1}=-\frac{\partial V_8(z,\bar z,\varepsilon)}{\partial\bar z_{2s-1}},\ s=1,\ldots,8.\tag{20}$$

Представление потенциальной функции V_8 опустим.

При убывании ε и прохождении через значение 3^{-2} из неустойчивого тривиального решения системы (20) ответвляется вещественная точка. Как и выше, обозначим ее $A_3(\varepsilon)=\lambda_{3^+}^{1/2}(\varepsilon)(x^3(\varepsilon),x^3(\varepsilon))$, где $x^3(\varepsilon)=(0,x_{3,1}(\varepsilon),0,x_{3,3}(\varepsilon),0,x_{3,5}(\varepsilon))$. Ясно, что $x_{3,1}(\varepsilon)\to 1$, $x_{3,k}(\varepsilon)\to 0$, $k=3,5$, $\varepsilon\to 3^{-2}-0$, при этом $x_{3,3}(\varepsilon)<0$, $x_{3,5}(\varepsilon)>0$. Несложно теперь убедиться, что для орбитальной экспоненциальной устойчивости стационарной точки $A_3(\varepsilon)$ системы (20) необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма

$$W_{3,1}^5(\xi,\varepsilon)=\frac12\sum_{k=1}^5\xi_k^2(-\hat\gamma_{3,k}(\varepsilon)+2(x_{3,1}^2(\varepsilon)+x_{3,3}^2(\varepsilon)+x_{3,5}^2(\varepsilon))+$$
$$+(\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_4+\xi_3\xi_5)(x_{3,1}^2(\varepsilon)+2x_{3,1}(\varepsilon)x_{3,3}(\varepsilon)+2x_{3,3}(\varepsilon)x_{3,5}(\varepsilon))+$$
$$+2(\xi_1\xi_4+\xi_1\xi_5+\xi_2\xi_3)(x_{3,1}(\varepsilon)x_{3,3}(\varepsilon)+x_{3,1}(\varepsilon)x_{3,5}(\varepsilon))+$$
$$+2(\xi_2\xi_5+\xi_3\xi_4)x_{3,1}(\varepsilon)x_{3,5}(\varepsilon)+2\xi_4\xi_5x_{3,3}(\varepsilon)x_{3,5}(\varepsilon),$$

в которой $\hat\gamma_{3,1}(\varepsilon)=\dfrac{\lambda_{1^+}(\varepsilon)}{\lambda_{3^+}(\varepsilon)}$, $\hat\gamma_{3,2}(\varepsilon)=\dfrac{\lambda_{5^+}(\varepsilon)}{\lambda_{3^+}(\varepsilon)}$, $\hat\gamma_{3,3}(\varepsilon)=\dfrac{\lambda_{7^+}(\varepsilon)}{\lambda_{3^+}(\varepsilon)}$, $\hat\gamma_{3,4}(\varepsilon)=\dfrac{\lambda_{11^+}(\varepsilon)}{\lambda_{3^+}(\varepsilon)}$,

$\hat{\gamma}_{3,5}(\varepsilon)=\dfrac{\lambda_{13^+}(\varepsilon)}{\lambda_{3^+}(\varepsilon)}$, была положительно-определенной. Указанный критерий устойчивости имеет место тогда и только тогда, когда $\varepsilon\in(0,\varepsilon_{3,2})$. Здесь $\varepsilon_{3,2}\approx 0{,}0367$. Отметим, что $\lambda_{3^+}(0{,}0367)(6{,}71555,\,4{,}97546,\,2{,}36450,\,1{,}534678,\,-0{,}031276)$ — спектр матрицы $\partial^2 W^5_{3,1}(\xi,\varepsilon)/\partial\xi^2$ при $\varepsilon=0{,}0367$. Спектр этой же матрицы в нуле равен $\nu(2{,}147745,\,2{,}1069288,\,1{,}848899,\,1{,}556897,\,0{,}94891325)$.

Отметим также приближенное равенство $\vartheta_3\approx\widetilde{\vartheta}_3$, где $\widetilde{\vartheta}_3$ удовлетворяет равенству (19), а $\widetilde{y}_3(\eta,0{,}0367)=1{,}0323\cos 3\eta-0{,}0732\cos 9\eta+0{,}0056\cos 15\eta$.

Согласно проведенному выше анализу стационарное решение $\vartheta_3(\eta,\varepsilon)$ уравнения (6) обретает устойчивость при убывании бифуркационного параметра ε и его прохождении через критическое значение $\varepsilon_3^*\approx 0{,}0367$ и сохраняет ее на $(0,\varepsilon_3^*)$. Точнее говоря, на $(0,\varepsilon_3^*)$ экспоненциально орбитально устойчива окружность $\{\vartheta_3(\eta+\varphi,\varepsilon\},\varphi\in R/2\pi Z\}$ стационарных решений уравнения (6). Переход структуры $\vartheta_3(\eta,\varepsilon)$ в класс устойчивых режимов обсудим, привлекая механизм конкуренции структур [27]. Анализ матриц $\dfrac{\partial^2 W_{3,1}(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi^2}$, $\dfrac{\partial^2 W^5_{3,1}(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi^2}$ позволяет говорить, что на этом пути $\vartheta_3(\eta,\varepsilon)$ преодолевает совместное воздействие структур θ_1, θ_5, θ_7, а затем совместное воздействие структур ϑ_1, ϑ_5, ϑ_7, ϑ_{11}, ϑ_{13}. При этом можно утверждать что, преодолевая совместное давление ϑ_1, ϑ_5, ϑ_7, структура ϑ_3 обретает устойчивость. Указанное воздействие описывается вещественной градиентной системой

$$\dot{\xi}_s=-\frac{1}{2}\frac{\partial\hat{V}_5(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi_s},\quad s=1,\ldots,5, \tag{21}$$

в которой $\hat{V}_5(\xi,\varepsilon)=V_5(\xi,\xi,\varepsilon)$. При этом структурам ϑ_{2k-1}, $k=1,\ldots,5$, соответствуют стационарные точки $\hat{A}_{(2k-1)}(\varepsilon)$, $k=1,\ldots,5$, градиентной системы (21), которые ответвляются при убывании бифуркационного параметра ε и его прохождении через критические значения $(2k-1)^{-1}$, $k=1,\ldots,5$. Подчеркнем, что обретение решением ϑ_3 устойчивости осуществляется при $\varepsilon=\varepsilon_3^*$ таком, что структура ϑ_7 не появилась. Тем не менее уместно говорить о совместном давлении ϑ_1, ϑ_5, ϑ_7 на ϑ_3, так как оно не сводится к воздействию ϑ_1, ϑ_5. Хотя давление пары ϑ_1, ϑ_5 в окрестности $\varepsilon=\varepsilon_3^*$ и является определяющим. Разумеется, при значительном «отходе» параметра ε от бифуркационного значения $\varepsilon=\varepsilon_3^*$ воздействие структур ϑ_1, ϑ_5, ϑ_7, ϑ_{11}, ϑ_{13} на ϑ_3 не сводится к давлению ϑ_1, ϑ_5, ϑ_7. Сохранение же устойчивости ϑ_3 при этом обеспечивается за счет усложнения формы ϑ_3, важную роль при этом играет «захват» новых мод. Изменение формы ϑ_3 с точки зрения обретения устойчивости носит в определенном смысле оптимальный характер. Привлекая равенство (17), приходим к заключению о связи этого явления с изменением формы ϑ_1. Усложнение же формы ϑ_1 естественно рассматривать как механизм самоорганизации системы по сохранению устойчивости ϑ_1 при убывании ε на фоне усиливающегося совместного давления всей цепочки ϑ_k, $k=3,5,\ldots$, структур.

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Перейдем к исследованию на устойчивость решения ϑ_{2k-1} уравнения (6), где $k>2$ — некоторый фиксированный номер. Для этого рассмотрим вопрос об устойчивости решения ϑ_{2k-1} в связи с давлением на нее диссипативных структур ϑ_{2s-1}, $\vartheta_{4k-2s-1}$, $\vartheta_{4k+2s-3}$, $0<s<k$. Переходим в этой связи к построению приближенных решений уравнения (6) в виде (9), где

$$\begin{aligned} z\exp(im(\cdot)\eta)=(&z_1\exp(i(2k-1)\eta),\ z_2\exp(i3(2k-1)\eta),\\ &z_3\exp(i(2s-1)\eta),\ z_4\exp(i(4k-2s-1)\eta),\ z_5\exp(i(4k+2s-3)\eta)).\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему приходим к градиентной системе дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_p = -\frac{\partial V_{k,s}(z, \bar{z}, \varepsilon)}{\partial \bar{z}_p}, \quad p = 1, \dots, 5, \tag{22}$$

в которой потенциальная функция $V_{k,s}(z, \bar{z}, \varepsilon)$ получается из функции $V_5(z, \bar{z}, \varepsilon)$, определенной в (14), посредством замен $z_1 \to z_3$, $z_3 \to z_1$, $z_5 \to z_4$, $z_7 \to z_5$, $z_9 \to z_2$, $\lambda_{1^+}(\varepsilon) \to \lambda_{(2k-1)^+}(\varepsilon)$, $\lambda_{2^+}(\varepsilon) \to \lambda_{(3(2k-1))^+}(\varepsilon)$, $\lambda_{3^+}(\varepsilon) \to \lambda_{(2s-1)^+}(\varepsilon)$, $\lambda_4(\varepsilon) \to \lambda_{(4k-2s-1)^+}(\varepsilon)$, $\lambda_5(\varepsilon) \to \lambda_{(4k+2s-3)^+}(\varepsilon)$. Перейдем теперь от (22) к градиентной системе

$$\dot{\xi}_p = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{V}_{k,s}(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi_p}, \quad p = 1, \dots, 5, \tag{23}$$

в которой $\hat{V}_{k,s}(\xi, \varepsilon) = V_{k,s}(\xi, \xi, \varepsilon)$. При убывании бифуркационного параметра ε и его прохождении через критические значения $(2s-1)^{-2}$, $(2k-1)^{-2}$, $(4k-2s-1)^{-2}$, $(4k+2s-3)^{-2}$, $(3(2k-1))^{-2}$ каждый раз из нулевого решения градиентной системы (23) ответвляется стационарная точка $A_s(\varepsilon)$, $A_k(\varepsilon)$, $A_{2k-s}(\varepsilon)$, $A_{2k+s-2}(\varepsilon)$, $A_{3k}(\varepsilon)$ соответственно. Имеет место равенство $A_k(\varepsilon) = \lambda_{k^+}^{1/2}(\varepsilon)(x_{k,1}(\varepsilon), x_{k,2}(\varepsilon), 0, 0, 0)$, где $(x_{k,1}(\varepsilon), x_{k,2}(\varepsilon))$ — гладкое по ε решение системы

$$\begin{aligned} &1 - x_1^2 - x_1 x_2 - 2x_2^2 = 0, \\ &x_2(\alpha_k(\varepsilon) - 2x_1^2 - x_2^2) - \frac{1}{3} x_1^3 = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

$\alpha_k(\varepsilon) = \dfrac{1 - 3^2 \varepsilon_k}{1 - \varepsilon_k}$, $\varepsilon_k = (2k-1)^2 \varepsilon$, такое, что $x_{k,1}(\varepsilon) \to 1$, $x_{k,2}(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 1-0$. Как и выше, приходим к заключению, что для экспоненциальной устойчивости стационарной точки $A_k(\varepsilon)$ градиентной системы (23) необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма

$$W_{k,s}(\xi, \varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{p=3}^{5} \xi_p^2 (-\gamma_{p,k}(\varepsilon) + 2x_{k,1}^2(\varepsilon) + 2x_{k,2}^2(\varepsilon)) +$$

$$+ (x_{k,1}^2(\varepsilon) + 2x_{k,1}(\varepsilon) x_{k,2}(\varepsilon))(\xi_3 \xi_4 + \xi_3 \xi_5) + 2x_{k,1}(\varepsilon) x_{k,2}(\varepsilon) \xi_4 \xi_5,$$

где $\gamma_{3,k}(\varepsilon) = \dfrac{\lambda_{(2s-1)^+}(\varepsilon)}{\lambda_{(2k-1)^+}(\varepsilon)}$, $\gamma_{4,k}(\varepsilon) = \dfrac{\lambda_{(4k-2s-1)^+}(\varepsilon)}{\lambda_{(2k-1)^+}(\varepsilon)}$, $\gamma_{5,k}(\varepsilon) = \dfrac{\lambda_{(4k+2s-3)^+}(\varepsilon)}{\lambda_{(2k-1)^+}(\varepsilon)}$, была положительно-определенной.

Очевидно, что для устойчивости структуры ϑ_{2k-1} необходимо, чтобы она была устойчивой относительно давления на нее всех троек структур ϑ_{2s-1}, $\vartheta_{4k-2s-1}$, $\vartheta_{4k+2s-3}$, $0 < s < k$. Последнее эквивалентно положительной определенности всех квадратичных форм $W_{k,s}(\xi, \varepsilon)$, $0 < s < k$. Согласно проведенному анализу из положительной определенности $W_{k,k-1}(\xi, \varepsilon)$ следует положительная определенность квадратичных форм $W_{k,s}(\xi, \varepsilon)$, $0 < s < k-1$. Установлено, что квадратичная форма $W_{k,k-1}(\xi, \varepsilon)$ положительно определена на промежутке $(0, (2k-1)^{-2} 3^{-1} \alpha_k)$, $\alpha_k \approx 1$, изменения параметра ε. Отметим в этой связи, что $\lambda_{(2k-1)^+}(\varepsilon))(2{,}4654,\ 1{,}5763,\ 0{,}0207)$ — спектр матрицы $\partial^2 W_{k,k-1}(\xi, \varepsilon) / \partial \xi^2$ при $\varepsilon = (2k-1)^{-2} 3^{-1}$.

Проведенные выше построения обосновывает следующее предложение.

Теорема 1. Пусть h удовлетворяет условию (2), $\varepsilon = \mu\nu^{-1}q^2$, а s нечетно. Существует δ_0 такое, что для $0 < \mu^2 + \nu^2 < \delta_0$ и $\varepsilon \in (0, s^{-2})$ существует стационарное решение $\vartheta_s(\eta, \varepsilon)$, $\eta = q\theta$ уравнения (6). Имеет место равенство $\vartheta_s(\eta, \varepsilon) = \vartheta_1(s\eta, s^2\varepsilon)$, где

$$\vartheta_1(\eta, \varepsilon) = \left(\frac{\lambda_{1^+}(\varepsilon)}{d}\right)^{1/2} 2\hat{y}(\eta, \varepsilon) - \operatorname{ctg}\hat{w}\frac{\lambda_{1^+}(\varepsilon)}{d}\hat{y}^2(\eta, \varepsilon) + O((\mu^2 + \nu^2)^{3/2}),$$

$$\hat{y}(\eta, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{x}_k(\varepsilon)\cos((2k-1)\eta).$$

Решение $\vartheta_1(\eta, \varepsilon)$ экспоненциально орбитально устойчиво.

Существует $\hat{\alpha}_s$ ($\hat{\alpha}_s \approx 1$) такое, что $\vartheta_s(\eta, \mu, \nu)$ — неустойчивое решение, если $\varepsilon \in (\hat{\alpha}_s 3^{-1}s^{-2}, s^{-2})$.

Если $\varepsilon \in (0, \hat{\alpha}_s 3^{-1}s^{-2})$, то $\vartheta_s(\eta, \mu, \nu)$ — экспоненциально орбитально устойчивое решение.

Доказательство теоремы следует методике, развитой в [17].

5. СЛУЧАЙ $\mu = 0$

Рассматриваемый случай представляет интерес с точки зрения предельного при $\mu \to 0$ поведения стационарных структур уравнения (6). Кроме того, он представляет и самостоятельный интерес. Для простоты ограничимся задачей

$$\dot{\vartheta} = -\vartheta - (1+\nu)Q_1\vartheta + R_1(Q_1\vartheta), \ \vartheta(\eta + 2\pi) = \vartheta(\eta), \qquad (25)$$

в которой $Q_1\vartheta(\eta) = \vartheta(\eta + \pi)$, $\nu > 0$, а $R_1(\vartheta) = R(\vartheta, 0)$. Функция $R(\vartheta, 0)$ удовлетворяет равенству (8). Задачу (25) рассмотрим в фазовом пространстве H.

Имеет место следующее предложение.

Теорема 2. Существует $\nu_0 > 0$ такое, что при $0 < \nu < \nu_0$ уравнение (25) для каждого натурального $n \ge 1$ имеет стационарное решение $\vartheta_{2n-1}(\eta, \nu) = \vartheta_1((2n-1)\eta, \nu)$. Справедливо равенство

$$\vartheta_1(\eta, \nu) = \left(\left(\frac{\nu}{d_1}\right)^{1/2}(2 + O(\nu))\right)\operatorname{sign}(\cos\eta) - \operatorname{ctg}\hat{w}\left(\left(\frac{\nu}{d_1}\right)(1 + O(\nu))\right), \ d_1 = \operatorname{ctg}^2\hat{w} + \frac{4}{3}.$$

Решение $\vartheta_{2n-1}(\eta, \nu)$ экспоненциально орбитально устойчиво.

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$\hat{\vartheta}_1(\eta, \nu) = 2\left(\frac{\nu}{d_1}\right)^{1/2}\operatorname{sign}(\cos\eta) - \operatorname{ctg}\hat{w}\frac{\nu}{d_1}$$

удовлетворяет уравнению (25) с точностью порядка ν^2 по невязке. Линеаризуем теперь уравнение (25) на этом приближенном решении. В результате в пространстве H выводим уравнение

$$\dot{\vartheta} = -\vartheta - (1+\nu)Q_1\vartheta + \left(-\operatorname{ctg}\hat{w}Q_1\hat{\vartheta}_1 + \frac{1}{2}(Q_1\hat{\vartheta}_1)^2\right)Q_1\vartheta, \ \vartheta(\eta + 2\pi) = \vartheta(\eta).$$

Рассмотрим в пространстве H соответствующую этому уравнению спектральную задачу

$$-\vartheta - (1+\nu)Q_1\vartheta + \left(-\operatorname{ctg}\hat{w}Q_1\hat{\vartheta}_1 + \frac{1}{2}(Q_1\hat{\vartheta})^2\right)Q_1\vartheta = \lambda\vartheta, \ \vartheta(\eta + 2\pi) = \vartheta(\eta). \qquad (26)$$

Нулевому собственному значению соответствующей невозмущенной задачи $(\nu = 0)$ отвечает счетная последовательность собственных функций $\mathrm{sign}\,(\cos(2k+1)\eta)$, $\mathrm{sign}\,(\sin(2k+1)\eta)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для анализа спектра задачи (26), расположенного в окрестности нуля, воспользуемся следующей схемой метода возмущения. Положим

$$\vartheta = \varphi_{2k+1}(\eta, \nu) = \mathrm{sign}\,(\cos(2k+1)\eta) + \nu^{1/2} x_1(\eta) + \nu x_2(\mu) + \ldots,$$
$$\lambda = s_1 \nu + s_2 \nu^2 + \ldots. \tag{27}$$

Подставим эти равенства в (26) и приравняем затем коэффициенты при одинаковых степенях $\nu^{1/2}$. В результате относительно x_1 имеем уравнение

$$-x_1 - Q_1 x_1 = 2\mathrm{ctg}\,\hat{w}\left(\frac{1}{d_1}\right)\mathrm{sign}\,(\cos\eta)\,\mathrm{sign}\,(\cos(2k+1)\eta). \tag{28}$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = -\mathrm{ctg}\,\hat{w}\left(\frac{1}{d_1}\right)^{1/2}\mathrm{sign}\,(\cos\eta)\,\mathrm{sign}\,(\cos(2k+1)\eta).$$

Из условия разрешимости уравнения относительно x_2 находим $s_1 = -2$, а затем $x_2 = 0$. Уравнение же относительно x_3 имеет решение $x_3 = 0$. Переходя затем к уравнению относительно x_4 и используя его условие разрешимости, находим s_2. Этот процесс неограниченно продолжим. Заменим теперь в (27) $\mathrm{sign}\,(\cos(2k+1)\eta)$ на $\mathrm{sign}\,(\sin(2k+1)\eta)$. Как и выше, приходим к заключению, что и в этом случае $s_1 = -2$. Учитывая теперь, что собственным функциям 1, $\mathrm{sign}\,(\cos 2k\eta)$, $\mathrm{sign}\,(\sin 2k\eta)$ невозмущенной задачи соответствует собственное значение -2, заключаем, что приближенное решение $\hat{\vartheta}_1(\eta, \nu)$ уравнения (25) экспоненциально орбитально устойчивое. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что экспоненциально орбитально устойчивым является также и приближенное решение $\hat{\vartheta}_1((2n+1)\eta, \nu)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Перейдем теперь к вопросу существования решения $\vartheta_1(\eta, \nu) \approx \hat{\vartheta}_1(\eta, \nu)$. Для этого выполним в уравнении (25) замену $\vartheta = \xi + \hat{\vartheta}_1(\eta, \nu)$. В результате получим уравнение

$$\dot{\xi} = -\xi - (1+\nu)Q_1\xi + \left(-\mathrm{ctg}\,\hat{w}Q_1\hat{\vartheta}_1 + \frac{1}{2}(Q_1\hat{\vartheta}_1)^2\right)Q_1\xi + r_0(\eta, \nu) + r_2(\xi, \eta, \nu),$$
$$\xi(\eta + 2\pi) = \xi(\eta),$$

в котором функции r_0, r_2 удовлетворяют следующим условиям:

$$\|r_0(\eta, \nu)\| < c_3\nu^2, \; r_2(0, \eta, \nu) = r_{2\xi}(0, \eta, \nu) = 0.$$

При этом $r_2(\xi, \eta, \nu)$, как функция $\xi \in R$, является в окрестности нуля аналитической. Пусть $\varphi_0(\eta, \nu)$ — собственная функция задачи (26) такая, что $\varphi_0(\eta, 0) = 1$. Обозначим $M(\nu) = \mathrm{span}\,\{\varphi_0(\eta, \nu), \varphi_1(\eta, \nu)\}$. Собственная функция $\varphi_1(\eta, \nu)$ задачи (26) определена в (27). Легко видеть, что $r_0(\eta, \nu) \in M(\nu)$, а $r_2(*, \eta, \nu)$: $M(\nu) \to M(\nu)$. Обозначим $P_1(\nu)$ проектор в пространстве H на $\mathrm{span}\,\{\varphi_1(\eta, \varepsilon)\}$. Несложно убедиться в справедливости неравенства

$$\|P_1(\nu) r_0(\eta, \nu)\| < c_3\nu^{5/2}.$$

Таким образом, задача существования стационарной точки задачи является двумерной задачей, а именно задачей на двумерном пространстве $M(\nu)$. Существование стационарной точки задачи (28) ввиду указанных оценок на функции $r_0(\eta, \nu)$, $r_2(\xi, \eta, \nu)$ при малых $\nu > 0$ очевидно.

Теорема доказана.

Из проведенного анализа следует, что в уравнении (25) реализуется явление гипербуферности [28], т.е. это уравнение имеет счетное число стационарных экспоненциально орбитально устойчивых решений. Отметим, что уравнение (25) принадлежит классу смешанных функционально-дифференциальных уравнений [29].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, подчеркнем основные моменты. Во-первых, в уравнении (6) при $\varepsilon \to 0$ реализуется явление буферности. Во-вторых, каждое ответвляющееся из нуля стационарное решение уравнения (6) имеет квазигармоническую форму, которая при убывании ε эволюционирует, принимая при малых ε вид контрастной структуры. В-третьих, возникновение буферности связано с особым типом взаимодействия стационарных структур.

Указанный выше тип взаимодействия стационарных структур с достаточной степенью точности отражает следующий принцип.

Принцип 1:3 взаимодействия стационарных структур. Характер устойчивости стационарного решения ϑ_k, $k = 3, 5, \ldots$, уравнения (6) определяется в результате взаимодействия с тройками стационарных решений $\vartheta_s, \vartheta_{2k-s}, \vartheta_{2k+s}$, $s = 1, 3, \ldots, k-2$.

Характер взаимодействия стационарного решения θ_k уравнения (6) с тройкой стационарных решений $\vartheta_s, \vartheta_{2k-s}, \vartheta_{2k+s}$ определяется как взаимодействие стационарной точки $A_k(\varepsilon)$ со стационарными точками $A_s(\varepsilon)$, $A_{2k-s}(\varepsilon)$, $A_{2k+s-2}(\varepsilon)$ градиентной системы дифференциальных уравнений (23).

Представляет интерес вопрос о судьбе при росте K стационарных структур, обнаруженных при локальном анализе уравнения (1). Данная проблема, разумеется, сложная. По-видимому, локальные структуры при увеличении K сохраняют устойчивость и становятся нелокальными структурами с изрезанными формами типа $\operatorname{sign}(\cos(2k+1)\eta)$, $k = 0, 1, 2\ldots$. Указанное поведение стационарных решений уравнения (1) при достаточно больших K можно ожидать и при значениях μ порядка 1. В соответствии с [30, 22, 25] это означает, что динамика уравнения (6) как при $\mu \to 0$, так и $K \to \infty$ приобретает турбулентный характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые физические принципы оптической обработки информации. — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.
2. Hayasaki Y. Hikosaka E., Yamomoto H., Nishida N. Image processing based on seededspontaneus optical pattern formation using optoelectronic feedback // Appl. Opt. — 2005. — **125.** — P. 123–141.
3. Разгулин А.В. Задача управления преобразованием аргументов в функционально-дифференциальных уравнениях математической физики — М.: МАКС Пресс, 2006. — 152 с.
4. Residori S. Patterns, fronts and structures in a liquid-crystal-light-valve with optical feedback // Physics Reports. — 2005. — **416,** N 5–6. — P. 201–272.
5. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю. Крупномасштабные поперечные нелинейные взаимодействия в лазерных пучках; новые типы нелинейных волн, возникновение оптической турбулентности // Письма в ЖЭТФ. — 1988. — **147**, вып. 12. — С. 611–614.
6. Разгулин А.В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1993. — **33,** № 1. — С. 69–80.
7. Разгулин А.В. Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Там же. — 1993. — **33,** № 10. — С. 1499–1510.
8. Разгулин А.В. Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // Мат. моделирование. — 1993. — **5,** № 4. — С. 105–119.
9. Skubachevskii A.L. Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear analysis: Theory, Meth.& Appl. — 1998. — **32,** N 2. — P. 261–278

10. Скубачевский А.Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. — 1998. — **34,** № 10. — С. 1394–1401.

11. Белан Е.П. О бифуркации периодических решений в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Уч. записки Тавр. нац. ун-та им. В.И. Вернадского. Сер. Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — 2002 — **2.** — С. 11–23.

12. Белан Е.П. Бифуркация рождения периодических решений в параболической задаче с преобразованным аргументом // Там же. — 2001. — № 1. — С. 24–33.

13. Белан Е.П., Лыкова О.Б. О бифуркации вращающихся волн в параболической задаче с преобразованным аргументом // Доп. НАНУ. — 2003. — **1.** — С. 7–13.

14. Белан Е.П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. — 2004. — **40,** № 5. — С. 645–654.

15. Белан Е.П., Лыкова О.Б. Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Там же. — 2004. — **40,** № 10. — С. 1348–1357.

16. Белан Е.П., Лыкова О.Б. Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Нелінійні коливання. — 2006. — **9,** № 2. — С. 155–169.

17. Васильева А.Б., Кащенко С.А., Колесов Ю.С., Розов Н.Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Мат. сборник. — 1986. — 130(172), В. 4(7). — С. 488–499.

18. Чушкин В.А., Разгулин А.В. Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 15. — 2003. — № 2. — С. 13–20.

19. Кащенко С.А. Асимптотика пространственно неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1994. — **31,** № 3. — С. 467–473.

20. Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A., Pelster A. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // Physika D. — 1999. — **125.** — P. 123–141.

21. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теор. и мат. физика. — 2004. — **140,** № 1. — С. 14–28.

22. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.

23. Белан Е.П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журн. мат. физ., анал., геом. — 2005. — **1,** № 1. — С. 3–34.

24. Бабин А.Б., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. — М.: Наука, 1989. — 294 с.

25. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. — М.: Физматлит, 2004. — 408 с.

26. Белан Е.П. Бифуркация диссипативных структур в параболической задаче с преобразованным аргументом и малой диффузией // Динамічні системи: Праці Укр. мат. конгресу — 2001. — Київ, Ін-т математики НАНУ. — 2003. — С. 20–33.

27. Гапонов-Грехов А.В., Ломов А.С., Осипов Г.В., Рабинович М.И. Рождение и динамика двумерных структур в неравновесных диссипативных средах // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. ИПФ АН СССР — 1989. — С. 61–73.

28. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. — 1998. — **222.** — 192 с.

29. Мышкис А.Д. Смешанные функционально-дифференциальные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2003. — **4.** — С. 5–120.

30. Рабинович М.И. Нелинейная динамика и турбулентность // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. — ИПФ АН СССР, 1989. — С. 50–61.

Поступила 05.04.2008