УДК 519.6:004.94:517.988

В.Н. СЕРЕДЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И ИХ КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Ключевые слова: *нелинейные задачи, многокомпонентные среды, композиты, межфазовое взаимодействие, компьютерное моделирование.*

Высокий уровень применения информационного пространства для сложных систем часто реализуется их нелинейностью [1]. Следует учитывать, что для линейных систем справедлив, в частности, принцип суперпозиции, т.е. такое важное понятие определяет решение задачи как некоторую линейную комбинацию. Пользуясь принципом суперпозиции, отдельное решение задачи можно построить в более общем виде.

Оказывается, для нелинейных явлений принцип суперпозиции не выполняется, поэтому знание поведения части объекта еще не гарантирует знания всего объекта. Это означает, что отклик на изменение условий может существенно зависеть от отдельных значений. Такая особенность нелинейных систем используется в данной работе как системный подход к построению корпоративных информационных систем [2] и реализует некоторую последовательность системного анализа.

Очень важно [3] определить структуру сложных систем. Можно условно принять некоторые их признаки. Сложная система состоит из взаимно зависимых подсистем, которые можно представить в виде иерархии. Внутренние элементные связи будут более сильными, чем межэлементные. Все иерархии систем составляются по некоторым подсистемам разных типов. Работающая сложная система неизбежно включает результат развития действующей простой системы. Программному обеспечению сложных систем присуща определенного уровня сложность. Можно определить такие главные признаки: сложность самой проблемы, управление процессом разработки, гибкость программного продукта и поведение отдельных подсистем.

Авторы в [4] достаточно подробно рассмотрели общие модели и методы решения задач в неоднородных средах процессов, в частности фильтрации. В [5] предлагаются математические модели и компьютерные методы реализации межфазного взаимодействия в композитных материалах.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ МЕЖФАЗНОГО ПЕРЕХОДНОГО СЛОЯ

В настоящей работе рассматривается построение некоторых моделей нелинейных систем, проводится анализ общих методов и их компьютерная реализация. Кроме модульного и компонентного программирования, проанализированы стандартные библиотеки программных систем, при этом анализируется реализация абстрактных программных систем.

Математическое моделирование свойств матрицы и включения остаются неизменными до и после процесса получения, например, композитного материала, т.е. не учитываются некоторые свойства технологии изготовления и особенности эксплуатации сложных композитных систем. Авторы в [5] утверждали, что математическое моделирование процессов в композитных материалах достаточно сложное из-за отсутствия удовлетворительных физических моделей и что в области контакта двух материалов возникает переходная зона. Здесь происходит склеивание, сваривание или диффузия материалов. В [6] рассматривается еще один — третий материал двух контактирующих материалов. Значительную роль имеет область контакта матрицы и армирующего компонента. В окрестности раздела фаз материалы связующего и наполнителя всегда отличаются физико-механическими свойствами от тех же свойств в других областях, занятых этими материалами. В этой локальной области всегда происходят разнообразные фазовые преобразования. Именно область раздела фаз — основная область, которая определяет монолитность, прочность и другие физико-механические характеристики композита. Поэтому цель работы — построение модели композитного материала, которая опиралась бы на наличие межфазной поверхности раздела не только с учетом свойств компонентов композита, но и параметров технологического процесса его изготовления.

Для формулирования такой проблемы и построения модели с дальнейшей разработкой метода исследования обратимся к анализу явлений на поверхности раздела компонентов в композитных материалах. Будем рассматривать лишь металлические композитные материалы.

Математические методы моделирования реализуют важные явления, которые происходят на поверхности раздела в композитах с металлической матрицей, довольно сложные и недостаточно исследованные. Можно предложить такую классификацию композитных систем, в частности, по типам химического взаимодействия между волокном и матрицей:

1) волокно и матрица взаимно химически инертные (нереакционно-способные) и нерастворимые (медь–вольфрам, медь–окись алюминия, алюминий–нержавеющая сталь и т.д.);

2) волокно и матрица взаимно химически инертные, но растворимые (медь–вольфрам, ниобий–вольфрам, никель–углерод и т.д.);

3) волокно и матрица реагируют с образованием соединений на поверхности раздела (титан–окись алюминия, медь (титан)–вольфрам, титан–бор и т.д.).

Следует классифицировать силовые факторы на поверхности раздела композитов. Несущественной нужно считать механическую связь составляющих композитных систем. Тем не менее иногда действуют силы сцепления через трение и обжатие матриц. При отсутствии реакций можно определить уровень связи армирующих компонентов с помощью смачивания и растворения на границе раздела капли расплава и гладкой твердой поверхности. При этом отсутствуют явления переноса массы из одной фазы в другую.

Важным типом межфазного взаимодействия является моделирование растворения одной фазы в другой. Следует учитывать так называемые твердые растворы — твердые фазы сплавов, в которых соотношение между концентрациями компонентов могут измененяться без нарушения однородности. При образовании твердых растворов происходят фазовые преобразования, может выделяться новая фаза в структуре гетерофазных сплавов. Поэтому при связи растворением на границе контактирующих фаз могут появляться новые вещества, которые образуются соединением двух или нескольких простых стойких компонентов. Тогда в процессе образования так называемых комплексных соединений отдельные свойства компонентов оказываются относительно скрытыми, т.е. комплексообразование в растворах противопоставляется непрочным, мало стойким молекулярным соединениям.

Может возникать реакционная связь активной матрицы и наполнителя. Тогда в окрестности поверхности раздела образовывается новая материальная модель, которая заполняет зону конечной ширины, например промежуточная фаза — диборид титана TiB_2 при взаимодействии титановой матрицы с борным волокном.

Обменно-реакционная связь характеризуется часто не одной, а несколькими реакциями. Тогда вслед за реакцией образования диборида, содержащего титан и алюминий, происходит обмен между атомами титана матрицы и диборида алюминия. В этом случае имеет место перенос массы.

Неоднородные и нелинейные задачи предложенных нами систем настолько сложные, что, с одной стороны, в большинстве случаев методов их теоретического математического исследования совсем недостаточно. С другой стороны, большинство исследователей, которые профессионально владеют современными средствами компьютерного моделирования, часто совсем не проинформированы относительно возможностей предварительного математического исследования моделированных ими задач. А это очень важно, например, для нелинейных задач. Ведь для получения в этих случаях лишь приближенных решений крайне необходима оценка точности и скорости сходимости применяемых методов.

Учет общности подхода к рассмотрению нелинейных краевых задач неоднородных сред ставит необходимым условием рассмотрение и исследование их в функциональных пространствах типа банаховых.

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, соответственно Ω означает ограниченную область в R^n. Граница $\partial\Omega$ этой области регулярная в таком понимании. Существует некоторое конечное открытое покрытие $\{U_i\}$ этой границы и такое конечное множество конусов $\{K_i\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, что:

а) для каждой точки из $\partial\Omega$ сфера радиуса ε с центром в этой точке полностью принадлежит множеству из покрытия $\{U_i\}$;

б) для каждой точки из $U_i \cap \Omega$ конус с вершиной в этой точке, который получается параллельным переносом некоторого конуса K_i, целиком принадлежит области Ω.

Пусть $\varphi(u, v, w, t)$ — некоторая функция, где u, v — некоторое смещение элемента среды в горизонтальной плоскости. Компонента w характеризует смещение в перпендикулярном к этой плоскости направлении. Рассматриваются двумерные по декартовым координатам задачи, т.е. $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, где $x = (x_1, x_2)$. Время t учитывается в динамических задачах, а именно для динамических задач u, v характеризуют отклонение от некоторого положения равновесия. Соответственно в стационарных краевых задачах w может быть, в частности, прогибом мембраны, пластины или оболочки.

Как справедливо отмечается во многих публикациях, в частности в [7], применение методов функционального анализа к решению вопросов вычислительной математики и сравнение оценок нормы оператора задачи в разных пространствах определенным образом зависит от выбора функционального пространства. Это означает, что удачно выбранное пространство существенно влияет на оценку сходимости и скорости сходимости построенного в этом пространстве итерационного процесса. Поэтому основным функциональным пространством при исследовании задачи будем считать полное нормированное пространство Банаха. На это пространство не накладывается требование линейности, поскольку наши исследования охватывают довольно широкий класс неоднородных, существенно нелинейных краевых задач. В отдельных случаях (это будет специально подчеркиваться) краевые задачи рассматриваются в пространствах $W_p^l(\Omega)$ С.Л. Соболева. Здесь p — показатель суммируемости функций, l — порядок обобщенной производной, а Ω — область, занятая элементом среды, подлежащей расчету.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ КАК ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваются нелинейные, неоднородные начально-краевые задачи для кусочно-неоднородной области $\Omega_T = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \times [0, T]$, где Ω_i — подобласти двумерной (трехмерной) области Ω; $[0, T]$ — промежуток изменения времени колебаний t. Такие подобласти Ω_i будут трактоваться в дальнейшем как представительские элементы некоторой композитной системы, которая состоит из армирующей компоненты $F^{(i)}$, соединенной с матричным материалом $M^{(i)}$ посредством межфазного переходного слоя $S_{FM}^{(i)}$. Вся область Ω ограничена $\partial\Omega$, соответственно каждая из подобластей имеет свою собственную границу $\partial\Omega_i$. Заметим, что на каждой из подобластей задаются (могут задаваться) условия сопряжения, например, армирующей компоненты $F^{(j)}$ с межфазным образованием $S_{FM}^{(j)}$ и этого образования с элементом матричного материала $M^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ (рис. 1).

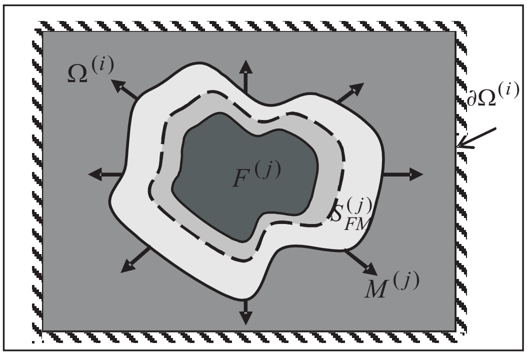

Рис. 1. Изображение области представительского элемента композитной системы

Следует отметить, что вследствие разбиения области Ω на отдельные подобласти Ω_i будут иметь место краевые условия, отличные от изображенных на рисунке. Это касается, в частности, подобластей, которые располагаются вдоль границы $\partial\Omega$ области Ω. Что касается подобластей, расположенных внутри области, то на их границах $\partial\Omega_i$ вполне естественно задать краевые условия жесткого сцепления. Кроме того, выполненное разбиение может содержать подобласти, не имеющие включением армирующую компоненту F. Поэтому принимается, что количество подобластей $\Omega^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ не совпадает с числом межфазных слоев $S_{FM}^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Компьютерно-математическое моделирование будет осуществляться в дальнейшем для подобластей, изображенных на рисунке.

Предлагается следующая операторная форма краевых и начально-краевых задач:

$$L\varphi = (P^{(2)}\varphi + \rho\varphi_{tt}, l_1\varphi, l_2\varphi, S\varphi, T_1\varphi, T_2\varphi) = (f, \theta, \psi, \omega, \varphi_{01}, \varphi_{11}). \tag{1}$$

Соответственно для расчета элемента пластины (оболочки)

$$\Pi\varphi = (P^{(4)}\varphi + \rho h\varphi_{tt}, q_1\varphi, q_2\varphi, S\varphi, T_1\varphi, T_2\varphi) = (N\varphi, m_1\varphi, m_2\varphi, \psi, \varphi_{01}, \varphi_{11}). \tag{2}$$

В приведенных операторных уравнениях $P^{(2)}$ и $P^{(4)}$ — соответственно дифференциальные операторы 2- и 4-го порядков; l_1, l_2 — операторы краевых условий; S — оператор условий сопряжения; T_1, T_2 — операторы начальных условий по переменной времени t. Кроме того, f, θ, ψ, ω, φ_{01}, φ_{11} — правые части операторных уравнений, которые отвечают названным выше операторам. Соответственно для уравнений (2) имеем: h — толщина элемента пластины (оболочки); q_1, q_2 — операторы внешних усилий; $N\varphi$, $m_1\varphi$, $m_2\varphi$ — правые части уравнения колебаний и внешних нагрузок. Понятно, что при отсутствии составляющих с φ_{tt}, T_1 и T_2 операторные уравнения соответствуют стационарным краевым задачам с учетом условий сопряжения.

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ (СТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ)

В этом разделе основным функциональным пространством принимается некоторое сепарабельное гильбертово пространство H, соответственно $J \in (H \to H^*)$ — диализирующее отображение [6] для H.

Если G — некоторое другое гильбертово пространство (элементами этих пространств естественно считать $h \in H$ и $g \in G$), причем оператор $Q \in (H \to G)$ линейный и такой, что $||Qh|| = ||h||$ для каждого $h \in H$, то J может быть представлено как $Q^* \cdot Q$.

В [6] для операторного уравнения (1) предложен такой итерационный процесс. Представляя уравнение (1), например, в виде $L\varphi = f$, при условии, что $\varphi \in H$, соответственно $f \in H^*$, считаем выполненными такие условия для оператора L:

$$\langle Lh - Lg, h - g \rangle \geq m||h - g||^2 \quad \forall\, m > 0, \tag{3}$$

$$||Lh - Lg|| \leq M||h - g|| \qquad \forall h,\ \forall g \in H. \tag{4}$$

В этом случае можно утверждать, что уравнение $L\varphi = f$ имеет единственное решение $\varphi \in H$.

Кроме того, при любых $c \in \left]0,\ \dfrac{2m}{M^2}\right[$ и начальном приближении $z_0 \in H$ элемент φ (решение уравнения $L\varphi = f$) является сильной границей итерационной последовательности

$$Jz_i = Jz_{i-1} - c(Lz_{i-1} - f), \tag{5}$$

т.е. $\varphi = \lim\limits_{n \to \infty} ||z_n||$.

Последнюю итерационную последовательность можно представить в виде одношагового чебышевского процесса [8]

$$Jz_i = Jz_{i-1} - \tau_i (Lz_{i-1} - f),\ (i = 1, 2, \ldots, K), \tag{6}$$

где параметр ускорения

$$\tau_i = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2 - (\gamma_2 - \gamma_1)\cos\pi \dfrac{2i - 3}{2K}}. \tag{7}$$

Здесь K — длина чебышевского цикла, γ_1, γ_2 — границы спектра оператора L.

При наличии z_0 и z_1 можно применить двушаговый чебышевский итерационный процесс [6, 7]

$$Jz_i = Jz_{i-1} - \alpha_i (Lz_{i-1} - f) - \beta_i J(z_{i-1} - z_{i-2}),\ (i = 2, 3, \ldots, K), \tag{8}$$

где α_i, β_i — числовые параметры, которые определяются отдельным итерационным процессом [9].

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В качестве примера приведем результаты моделирования одной нелинейной стационарной краевой задачи. В неоднородной области, изображенной на рис. 1, рассматривалась система уравнений

$$\begin{gathered} \mu_i \Delta u + [u, v] = f_1(x, y), \\ \mu_i \Delta v + [u, v] = f_2(x, y), \\ i = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{9}$$

где $[u,v]=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-$ $-2\frac{\partial u}{\partial xy}\cdot\frac{\partial v}{\partial xy}$ — оператор, определяющий нелинейность краевой задачи [10, 11], $\mu_1=2{,}8$; $\mu_2=5{,}5$, $\mu_3=7{,}6$, $f_1=x$, $f_2=y$.

Система (9) дополнялась однородными краевыми условиями

$$u|_{x,y\in\partial\Omega}=0 \qquad (10)$$

и условиями сопряжения идеального контакта на границах межфазного слоя.

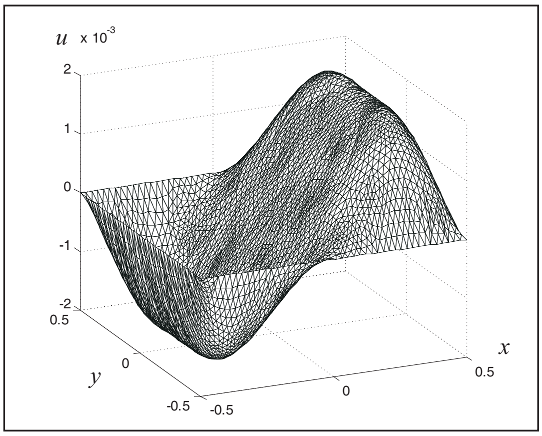

Рис. 2. Компьютерное решение нелинейной краевой задачи

Решение поставленной задачи, полученное методом конечных элементов, изображено на рис. 2. Отметим, что компьютерная реализация осуществлялась средствами FEMLAB, предназначенного для решения задач в частных производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
2. Перевозчикова О.Л. Основи системного аналізу об'єктів і процесів комп'ютеризації: Навч. посіб. — Київ: Вид. дім «КМ академія», 2003. — 432 с.
3. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование. — М.: Бином, 2001. — 560 с.
4. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. — Киев: Наук. думка, 2001. — 606 с.
5. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. — М.: Наука, 1984. — 352 с.
6. Каюк Я.Ф., Середенко В.М. Механіка міжфазової взаємодії в композитних матеріалах. — Черкаси, Осередок наукового т-ва ім. Т.Г. Шевченка, 2005. — 172 с.
7. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
8. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика — М.: Физматлит, 2000. — 296 с.
9. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. — М.: Мир, 1986. — 448 с.
10. Середенко В., Коновалова О. Комп'ютерне моделювання задач динаміки композитів з міжфазовою взаємодією компонентів // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. — 2006. — Вип. 11. — С. 193–202.
11. Сергиенко И.В., Дейнека В.С., Вещунов В.В. Информационная технология NADRA 3D исследования процессов многокомпонентных грунтовых сред // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — **42**, № 6. — С. 157–174.

Поступила 12.12.2007