УДК 519.6

А.Н. ХИМИЧ, Е.А. НИКОЛАЕВСКАЯ

АНАЛИЗ ДОСТОВЕРНОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ

Ключевые слова: *взвешенная псевдообратная матрица, взвешенное нормальное псевдорешение, задача взвешенных наименьших квадратов, полная погрешность.*

ВВЕДЕНИЕ

Много научных приложений сводится к задачам наименьших квадратов [1]. Исследованию таких задач и разработке методов их решения посвящено значительное количество работ (см., например, [2–5]). По теории возмущения решения взвешенных наименьших квадратов имеется меньше публикаций.

Следует заметить, что исходные данные таких задач заданы приближенно. Основная трудность заключается в том, что в этом случае приходится рассматривать целый класс задач в окрестности возмущения исходных данных, свойства которых могут быть чувствительны к незначительным возмущениям данных и существенно отличаться между собой. Исследование чувствительности решения задач наименьших квадратов к возмущению исходных данных рассматривалось в работах [6–13]. Для взвешенных псевдообратных матриц получены результаты в основном для случая неполного ранга в предположении сохранения ранга возмущенной матрицы [14–18]. В данной работе рассматривается задача взвешенных наименьших квадратов с положительно-определенными весами. Получены погрешности взвешенного нормального псевдорешения для следующих трех случаев:

а) ранг исходной матрицы A сохраняется при ее возмущении;

б) ранг возмущенной матрицы больше ранга исходной матрицы A;

в) ранг исходной матрицы больше ранга возмущенной.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Введем обозначения. Пусть $R^{m\times n}$ — множество матриц размерности $m\times n$. Для матрицы $A\in R^{m\times n}$ обозначим A^T матрицу, транспонированную к A, $\operatorname{rank}(A)$ — ранг матрицы A, $\mathfrak{R}(A)$ — множество образов матрицы A, $\mathfrak{A}(A)$ — нуль-пространство A, $\|\ \|$ — евклидова векторная и согласованная с ней спектральная матричная нормы, I — единичная матрица.

Для произвольной матрицы $A\in R^{m\times n}$ и симметричных положительно-определенных матриц M и N порядка m и n соответственно единственная матрица $X\in R^{m\times n}$, удовлетворяющая условиям

$$AXA=A,\ XAX=X,\ (MAX)^T=MAX,\ (NXA)^T=NXA, \tag{1}$$

называется взвешенной псевдообратной матрицей Мура–Пенроуза для матрицы A и обозначается $X=A^+_{MN}$. В частности, когда $M=I\in R^{m\times m}$ и $N=I\in R^{n\times n}$, матрица X, удовлетворяющая (1), называется псевдообратной матрицей Мура–Пенроуза и обозначается $X=A^+$. Пусть $A^\#$ — взвешенная транспонированная матрица к A, P и Q — идемпотентные матрицы, $\overline{A}=A+\Delta A$ — возмущенная матрица, т.е

$$A^\#=N^{-1}A^TM, \tag{2}$$

$$P=A^+_{MN}A,\ Q=AA^+_{MN},$$

$$\overline{P}=\overline{A}^+_{MN}\overline{A},\ \overline{Q}=\overline{A}\overline{A}^+_{MN}. \tag{3}$$

Пусть $x\in R^m$, $y\in R^n$. Взвешенные векторные и матричные нормы определим следующим образом:

$$\|x\|_M=\left\|M^{1/2}x\right\|,\ \|y\|_N=\left\|N^{1/2}y\right\|, \tag{4}$$

$$\|A\|_{MN}=\max_{\|x\|_N=1}\|Ax\|_M=\left\|M^{1/2}AN^{-1/2}\right\|,\ A\in R^{m\times n}, \tag{5}$$

$$\|B\|_{NM}=\max_{\|y\|_M=1}\|By\|_N=\left\|N^{1/2}AM^{-1/2}\right\|,\ B\in R^{n\times m}. \tag{6}$$

Рассмотрим взвешенное сингулярное разложение матрицы, представленное в [19].

Пусть $A\in R^{m\times n}$ и $\operatorname{rank}(A)=k$, M и N — положительно-определенные матрицы порядка m и n соответственно. Тогда существуют матрицы $U\in R^{m\times m}$ и $V\in R^{n\times n}$, удовлетворяющие условию $U^TMU=I$ и $V^TN^{-1}V=I$, такие, что

$$A=U\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}V^T,\ A^+_{MN}=N^{-1}V\begin{pmatrix}D^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}U^TM, \tag{7}$$

где $D=\operatorname{diag}(\mu_1,\ \mu_2,\dots,\mu_k)$, $\mu_1\ge\mu_2\ge\ldots\ge\mu_k>0$ и μ_i^2 — ненулевые собственные значения матрицы $A^\#A$. Неотрицательные значения μ_i называются взвешенными сингулярными значениями матрицы A, причем $\|A\|_{MN}=\mu_1$, $\left\|A^+_{MN}\right\|_{NM}=\dfrac{1}{\mu_k}$.

Взвешенное SVD матрицы A обеспечивает M-ортонормальный базис векторов U и N^{-1}-ортонормальный базис векторов V.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При исследовании достоверности получаемых машинных результатов рассматриваются три задачи.

Исходная задача взвешенных наименьших квадратов с положительно-определенными весами M и N

$$\min_{x \in C} \| x \|_N, \; C = \{x \mid \| Ax - b \|_M = \min\}, \tag{8}$$

где $A \in R^{m \times n}$ — матрица неполного ранга, $b \in R^m$.

Задача с возмущенными исходными данными

$$\min_{x \in C} \| \bar{x} \|_N, \; C = \{ \bar{x} \mid \| (A + \Delta A) \bar{x} - (b + \Delta b) \|_M = \min\}, \tag{9}$$

где

$$\bar{A} = A + \Delta A, \; \bar{b} = b + \Delta b, \; \bar{x} = x + \Delta x. \tag{10}$$

Предположим, что для погрешности элементов матрицы и правой части выполняются следующие соотношения:

$$\|\Delta A\|_{MN} \le \varepsilon_A \|A\|_{MN}, \; \|\Delta b\|_M \le \varepsilon_b \| b \|_M. \tag{11}$$

Соотношение для приближенного решения $\bar{\bar{x}}$ задачи (9)

$$\bar{A}\, \bar{\bar{x}} = \bar{b} + \bar{r}. \tag{12}$$

Анализ достоверности полученного решения включает оценку наследственной погрешности $\|x - \bar{x}\|_N$, вычислительной погрешности $\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|_N$ и полной погрешности $\|x - \bar{\bar{x}}\|_N$, а также уточнение полученного машинного решения.

Оценки полной погрешности учитывают как наследственную погрешность вследствие погрешности исходных данных, так и вычислительную вследствие приближенного способа определения решения задачи. В данном случае не учитывается сам способ получения решения. Вычислительная погрешность может быть следствием как приближенного метода получения решения, так и погрешности вследствие неточности выполнения арифметических операций на компьютере. Вектор невязки $\bar{r} = \bar{A}\, \bar{\bar{x}} - \bar{b}$ учитывает общий эффект влияния этих погрешностей.

Существование и единственность M-взвешенного решения наименьших квадратов с минимальной N-нормой системы $Ax = b$ установлено, например, в [20].

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВЗВЕШЕННОЙ ПСЕВДООБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрим некоторые свойства взвешенной псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза.

Лемма 1 [18]. Пусть $A, \; \Delta A \in R^{m \times n}$, $\mu_i(A)$ и $\mu_i(\bar{A})$ — взвешенные сингулярные значения матриц A и $\bar{A}$ соответственно.

Тогда

$$\mu_i(A) - \|\Delta A\|_{MN} \le \mu_i(\bar{A}) \le \mu_i(A) + \|\Delta A\|_{MN}. \tag{13}$$

Лемма 2. Пусть $A, \; \Delta A \in R^{m \times n}$, $\operatorname{rank}(\bar{A}) = \operatorname{rank}(A)$ и $\|\Delta A\|_{MN} \left\| A_{MN}^{+} \right\|_{NM} < 1$.

Тогда

$$\left\| \bar{A}_{MN}^{+} \right\|_{NM} \le \frac{\left\| A_{MN}^{+} \right\|_{NM}}{1 - \|\Delta A\|_{MN} \left\| A_{MN}^{+} \right\|_{NM}}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\mu_k(A)$, $\mu_k(\bar{A})$ — k-е взвешенные сингулярные значения матриц A и $\bar{A}$ соответственно, упорядоченные таким образом, что $\mu_1(A) \ge \mu_2(A) \ge \ldots \ge \mu_k(A) > 0$, $\mu_1(\bar{A}) \ge \mu_2(\bar{A}) \ge \ldots \ge \mu_k(\bar{A}) > 0$.

Из (13) следует

$$\frac{1}{\left\|(A+\Delta A)^{+}_{MN}\right\|_{NM}}=\mu_k(\overline{A})\ge\mu_k(A)-\|\Delta A\|_{MN}=\frac{1}{\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}}-\|\Delta A\|_{MN}.$$

Отсюда приходим к (14).

Лемма 3. Пусть $G=\overline{A}^{+}_{MN}-A^{+}_{MN}$, $\overline{A}=A+\Delta A$ и $\operatorname{rank}(\overline{A})=\operatorname{rank}(A)$. Тогда G можно представить в виде суммы трех матриц: $G=G_1+G_2+G_3$, где

$$G_1=-\overline{A}^{+}_{MN}\,\Delta A A^{+}_{MN}, \tag{15}$$

$$G_2=-(I-\overline{P})N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}=-(I-\overline{P})\,\Delta A^{\#}(A^{+}_{MN})^{\#}A^{+}_{MN}, \tag{16}$$

$$G_3=\overline{A}^{+}_{MN}(I-Q). \tag{17}$$

Доказательство. По аналогии с [21] запишем G как сумму следующих матриц:

$$G=[\overline{P}+(I-\overline{P})](\overline{A}^{+}_{MN}-A^{+}_{MN})[Q+(I-Q)]=$$
$$=\overline{P}\,\overline{A}^{+}_{MN}Q+\overline{P}\,\overline{A}^{+}_{MN}(I-Q)-\overline{P}A^{+}_{MN}Q-\overline{P}A^{+}_{MN}(I-Q)+(I-\overline{P})\overline{A}^{+}_{MN}Q+$$
$$+(I-\overline{P})\overline{A}^{+}_{MN}(I-Q)-(I-\overline{P})A^{+}_{MN}Q+(I-\overline{P})A^{+}_{MN}(I-Q).$$

Так как

$$\overline{P}\,\overline{A}^{+}_{MN}=\overline{A}^{+}_{MN},\quad (I-\overline{P})\overline{A}^{+}_{MN}=0,\quad A^{+}_{MN}Q=A^{+}_{MN},\quad A^{+}_{MN}(I-Q)=0,$$

получаем

$$G=\overline{A}^{+}_{MN}Q+\overline{A}^{+}_{MN}(I-Q)-\overline{P}A^{+}_{MN}+(I-\overline{P})\overline{A}^{+}_{MN}=$$
$$=(\overline{A}^{+}_{MN}Q-\overline{P}A^{+}_{MN})-(I-\overline{P})A^{+}_{MN}+\overline{A}^{+}_{MN}(I-Q). \tag{18}$$

Рассмотрим каждое слагаемое из последнего равенства

$$G_1=\overline{A}^{+}_{MN}Q-\overline{P}A^{+}_{MN}=\overline{A}^{+}_{MN}AA^{+}_{MN}-\overline{A}^{+}_{MN}\overline{A}A^{+}_{MN}=$$
$$=\overline{A}^{+}_{MN}(A-\overline{A})A^{+}_{MN}=-\overline{A}^{+}_{MN}\Delta AA^{+}_{MN}.$$

Для оценки второго слагаемого воспользуемся свойствами (1)

$$A^{+}_{MN}=(A^{+}_{MN}A)A^{+}_{MN}=N^{-1}(NA^{+}_{MN}A)^T A^{+}_{MN}=N^{-1}A^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}=$$
$$=N^{-1}\overline{A}^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}-N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}. \tag{19}$$

Подставляя (19) во второе слагаемое равенства (18), получаем

$$G_2=(I-\overline{P})A^{+}_{MN}=(I-\overline{P})\,(N^{-1}\overline{A}^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}-N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}).$$

Поскольку

$$(I-\overline{P})N^{-1}\overline{A}^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}=N^{-1}\overline{A}^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}-\overline{A}^{+}_{MN}\overline{A}N^{-1}\overline{A}^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}=$$
$$=N^{-1}\overline{A}^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}-N^{-1}\overline{A}^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}=0,$$

то

$$G_2=(I-\overline{P})A^{+}_{MN}=-(I-\overline{P})N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}=-(I-\overline{P})\Delta A^{\#}(A^{+}_{MN})^{\#}A^{+}_{MN}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$G=\overline{A}^{+}_{MN}-A^{+}_{MN}=-\overline{A}^{+}_{MN}\Delta AA^{+}_{MN}-(I-\overline{P})\,N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN}NA^{+}_{MN}+\overline{A}^{+}_{MN}(I-Q).$$

Лемма 4. Если $\operatorname{rank}(\overline{A})=\operatorname{rank}(A)=k$, то

$$\left\|\overline{Q}(I-Q)\right\|_{MM}=\left\|Q(I-\overline{Q})\right\|_{MM}, \tag{20}$$

где Q и $\overline{Q}$ определены в (3).

Доказательство. Запишем взвешенное сингулярное разложения матриц A и $\overline{A}$: $A = UDV^T$, $\overline{A} = \overline{U}\,\overline{D}\,\overline{V}^T$. Из (3) и предположения о том, что A и $\overline{A}$ имеют одинаковый ранг, следует

$$Q = U\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T M, \ \overline{Q} = \overline{U}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{U}^T M.$$

Определим ортогональную матрицу $W \in R^{m\times m}$ с подматрицами W_{ij} соотношением

$$\overline{U}_1^T U_1 = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} W_{11} & W_{21} \\ & \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \}\, k \\ \\ \}\, m-k \end{array} .$$
$$\qquad\qquad\quad \underbrace{\qquad}_{k} \quad \underbrace{\qquad}_{m-k}$$

Тогда

$$\left\| \overline{Q}(I-Q) \right\|_{MM} = \left\| \overline{U} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{U}^T MU \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} U^T M \right\|_{MM} =$$

$$= \left\| M^{1/2}\, \overline{U} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{U}^T MU \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} U^T MM^{-1/2} \right\| =$$

$$= \left\| M^{1/2}\, \overline{U} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{U}^T M^{1/2} M^{1/2} U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} U^T M^{1/2} \right\| =$$

$$= \left\| \overline{U}_1 \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{U}_1^T U_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} U_1^T \right\| =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & W_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \| W_{12} \| .$$

Точно так же можно проверить, что $\left\| Q(I-\overline{Q}) \right\|_{MM} = \| W_{21} \|$. Остается показать, что $\| W_{12} \| = \| W_{21} \|$. Пусть $X \in R^{m-k}$ — произвольный вектор. Положим $y = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, m-k \end{array}$.

Используя ортогональность W, имеем $\| x \|^2 = \| y \|^2 = \| Wy \|^2 = \| W_{12} x \|^2 + \| W_{22} x \|^2$, откуда $\| W_{12} x \|^2 = \| x \|^2 - \| W_{22} x \|^2$. Следовательно, $\| W_{12} \|^2 = \max\limits_{\|x\|=1} \| W_{12} x \|^2 = 1 - \min\limits_{\|x\|=1} \| W_{22} x \|^2 = 1 - s_{m-k}^2$, где s_{m-k} — наименьшее сингулярное число W_{22}. Аналогично из $\| x \|^2 = \| y \|^2 = \left\| W^T y \right\|^2 = \left\| W_{21}^T x \right\|^2 + \left\| W_{22}^T x \right\|^2$ получаем

$$\| W_{21} \|^2 = 1 - \min_{\|x\|=1} \left\| W_{22}^T x \right\|^2 = 1 - s_{m-k}^2 .$$

Из равенства $\| W_{12} \| = \| W_{21} \|$ следует утверждение теоремы.

4. ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ВЗВЕШЕННОГО НОРМАЛЬНОГО ПСЕВДОРЕШЕНИЯ

Далее получим оценки для наследственной, вычислительной и полной погрешностей взвешенного нормального псевдорешения. Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{\|\Delta b\|_M}{\|A\|_{MN} \|x\|_N}, \quad \beta = \frac{\| r \|_M}{\| x \|_N \|A\|_{MN}}, \quad \gamma = \frac{\| \bar{r} \|_M}{\|A\|_{MN} \| x \|_N},$$

$$\alpha_l = \frac{\|\Delta b\|_M}{\|A\|_{MN} \|x_l\|_N}, \ \beta_l = \frac{\| r \|_M}{\|x_l\|_N \|A\|_{MN}}, \ \gamma_l = \frac{\|\bar{r}_l\|_M}{\|A\|_{MN} \|x_l\|_N}, \ \gamma_k = \frac{\|\bar{r}_k\|_M}{\|A\|_{MN} \| x \|_N}.$$

Рассмотрим три случая.

1. Ранг исходной матрицы A сохраняется при ее возмущении

Теорема 1. Предположим, что $\|\Delta A\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} < 1$, $\operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A)$.

Тогда имеет место оценка

$$\frac{\|x-\bar{x}\|_N}{\|x\|_N} \le \frac{h}{1-h\varepsilon_A}\left(2\varepsilon_A + \alpha + h\varepsilon_A \beta\right), \tag{21}$$

где $h = h(A) = \|A\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}$ — взвешенное число обусловленности матрицы A, символы $\| \ \|_{MN}$ и $\| \ \|_{NM}$ обозначают взвешенные матричные нормы в соответствии с (1), A^{+}_{MN} — взвешенная псевдообратная матрица Мура–Пенроуза.

Доказательство. Оценка наследственной погрешности следует из соотношения

$$x-\bar{x} = (A^{+}_{MN} - \overline{A}^{+}_{MN})b + \overline{A}^{+}_{MN}(b-\bar{b}). \tag{22}$$

Используя для погрешности псевдообратной матрицы представление

$$\overline{A}^{+}_{MN} - A^{+}_{MN} = -\overline{A}^{+}_{MN}\Delta A A^{+}_{MN} - (I-\overline{P})N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN} N A^{+}_{MN} + \overline{A}^{+}_{MN}(I-Q), \tag{23}$$

получаем

$$\begin{aligned} x-\bar{x} &= [\overline{A}^{+}_{MN}\Delta A A^{+}_{MN} + (I-\overline{P})N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN} N A^{+}_{MN} - \overline{A}^{+}_{MN}(I-Q)]b + \overline{A}^{+}_{MN}(b-\bar{b}) = \\ &= \overline{A}^{+}_{MN}\Delta A A^{+}_{MN} b + (I-\overline{P})N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN} N A^{+}_{MN} b - \overline{A}^{+}_{MN}(I-Q)b + \overline{A}^{+}_{MN}(b-\bar{b}) = \\ &= \overline{A}^{+}_{MN}\Delta A x + (I-\overline{P})N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN} N x - \overline{A}^{+}_{MN}(I-Q)b + \overline{A}^{+}_{MN}(b-\bar{b}). \end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом,

$$\bar{x}-x = \overline{A}^{+}_{MN}\Delta A x + (I-\overline{P})N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN} N x - \overline{A}^{+}_{MN}(I-Q)b + \overline{A}^{+}_{MN}(b-\bar{b}). \tag{25}$$

Переходя к взвешенным нормам, получаем

$$\begin{aligned} \|\bar{x}-x\|_N &= \left\|\overline{A}_{MN}\Delta A x + (I-\overline{P})N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN} N x - \overline{A}^{+}_{MN}(I-Q)b + \overline{A}^{+}_{MN}(b-\bar{b})\right\|_N \le \\ &\le \left\|\overline{A}_{MN}\Delta A x\right\|_N + \left\|(I-\overline{P})N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN} N x\right\|_N + \left\|\overline{A}^{+}_{MN}(I-Q)b\right\|_N + \left\|\overline{A}^{+}_{MN}(b-\bar{b})\right\|_N. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$(I-Q)b = (I-Q)r = r, \ r = b-x, \ x = A^{+}_{MN} b, \tag{26}$$

и используя результаты леммы 4, преобразуем взвешенную норму каждого из слагаемых в (25):

а) $$\begin{aligned} \left\|\overline{A}^{+}_{MN}\Delta A x\right\|_N &= \left\|N^{1/2}\,\overline{A}^{+}_{MN} M^{-1/2} M^{1/2}\Delta A N^{-1/2} N^{1/2} x\right\| \le \\ &\le \left\|N^{1/2}\overline{A}^{+}_{MN} M^{-1/2}\right\| \left\|M^{1/2}\Delta A N^{-1/2}\right\| \left\|N^{1/2}x\right\| = \left\|\overline{A}^{+}_{MN}\right\|_{NM} \|\Delta A\|_{NM} \|x\|_N. \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} &\left\|(I-\overline{P})N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN} N x\right\|_N = \\ &= \left\|N^{1/2}(I-\overline{P})N^{-1/2}N^{-1/2}\Delta A^T M^{1/2} M^{-1/2} A^{+T}_{MN} N^{1/2} N^{1/2} x\right\| \le \\ &\le \left\|N^{1/2}(I-\overline{P})N^{-1/2}\right\| \left\|M^{1/2}\Delta A N^{-1/2}\right\| \left\|N^{1/2} A^{+}_{MN} M^{-1/2}\right\| \left\|N^{1/2} x\right\| = \\ &= \left\|(I-\overline{P})\right\|_{NN} \|\Delta A\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} \|x\|_N. \end{aligned}$$

в) используя результаты леммы 5 и равенства (26), можем записать

$$\begin{aligned} \left\|\overline{A}^{+}_{MN}\overline{Q}(I-Q)b\right\|_N &= \left\|\overline{A}^{+}_{MN}\overline{A}\overline{A}^{+}_{MN}(I-Q)r\right\|_N \le \left\|\overline{A}^{+}_{MN}\right\|_{NM} \left\|\overline{Q}(I-Q)\right\|_{MM} \|r\|_M = \\ &= \left\|\overline{A}^{+}_{MN}\right\|_{NM} \left\|Q(I-\overline{Q})\right\|_{MM} \|r\|_M, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\left\| Q(I-\overline{Q}) \right\|_{MM} = \left\| AA^{+}_{MN}(I-\overline{Q}) \right\|_{MM} = \left\| M^{1/2} AA^{+}_{MN}(I-\overline{Q}) M^{-1/2} \right\| =$$
$$= \left\| M^{-1/2} (MAA^{+}_{MN})^{T} (I-\overline{Q}) M^{-1/2} \right\| =$$
$$= \left\| M^{-1/2} (A^{+}_{MN})^{T} (A^{T}-\overline{A}^{T}) M^{1/2} M^{1/2} (I-\overline{Q}) M^{-1/2} \right\| =$$
$$= \left\| M^{-1/2} (A^{+}_{MN})^{T} \Delta A^{T} M (I-\overline{Q}) M^{-1/2} \right\| \le \left\| M^{-1/2} (A^{+}_{MN})^{T} \Delta A^{T} M^{1/2} \right\| =$$
$$= \left\| M^{1/2} \Delta A N^{-1/2} N^{1/2} A^{+}_{MN} M^{-1/2} \right\| \le \left\| M^{1/2} \Delta A N^{-1/2} \right\| \left\| N^{1/2} A^{+}_{MN} M^{-1/2} \right\| = \tag{28}$$
$$= \left\| \Delta A \right\|_{MN} \left\| A^{+}_{MN} \right\|_{NM}.$$

Подставив полученный результат в (27), получим неравенство

$$\left\| \overline{A}^{+}_{MN} \overline{Q} (I-Q) b \right\|_{N} \le \left\| \overline{A}^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| \Delta A \right\|_{MN} \left\| A^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| r \right\|_{M}.$$

г) $\left\| \overline{A}^{+}_{MN} (b-\overline{b}) \right\|_{N} = \left\| N^{1/2} \overline{A}^{+}_{MN} M^{-1/2} M^{1/2} (b-\overline{b}) \right\| \le$

$$\le \left\| N^{1/2} \overline{A}^{+}_{MN} M^{-1/2} \right\| \left\| M^{1/2} (b-\overline{b}) \right\| = \left\| \overline{A}^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| (b-\overline{b}) \right\|_{M}.$$

Поскольку $\left\| I-\overline{P} \right\|_{NN} < 1$, то, учитывая результаты леммы 2 для относительной погрешности, приходим к оценке во взвешенной норме:

$$\frac{\left\| x-\overline{x} \right\|_{N}}{\left\| x \right\|_{N}} \le \frac{\left\| \overline{A}^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| \Delta A \right\|_{MN} \left\| x \right\|_{N}}{\left\| x \right\|_{N}} + \frac{\left\| \Delta A \right\|_{MN} \left\| A^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| x \right\|_{N}}{\left\| x \right\|_{N}} +$$
$$+ \frac{\left\| \overline{A}^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| A^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| \Delta A \right\|_{MN} \left\| r \right\|_{M}}{\left\| x \right\|_{N}} + \frac{\left\| \overline{A}^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| \Delta b \right\|_{M}}{\left\| x \right\|_{N}} \le$$
$$\le \left\| \overline{A}^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| \Delta A \right\|_{MN} + \left\| \Delta A \right\|_{MN} \left\| A^{+}_{MN} \right\|_{NM} +$$
$$+ \frac{\left\| \overline{A}^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| A^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| \Delta A \right\|_{MN} \left\| r \right\|_{M}}{\left\| x \right\|_{N}} + \frac{\left\| \overline{A}^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| \Delta b \right\|_{M}}{\left\| x \right\|_{N}} \le$$
$$\le \frac{\left\| A^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| A \right\|_{MN}}{1-\left\| \Delta A \right\|_{MN} \left\| A^{+}_{MN} \right\|_{NM}} \left(2\frac{\left\| \Delta A \right\|_{MN}}{\left\| A \right\|_{MN}} + \frac{\left\| \Delta b \right\|_{M}}{\left\| A \right\|_{MN} \left\| x \right\|_{N}} + \right.$$
$$\left. + \left\| A^{+}_{MN} \right\|_{NM} \left\| A \right\|_{MN} \frac{\left\| \Delta A \right\|_{MN}}{\left\| A \right\|_{MN}} \frac{\left\| r \right\|_{M}}{\left\| A \right\|_{MN} \left\| x \right\|_{N}} \right) \le$$
$$\le \frac{h(A)}{1-h(A)\varepsilon_{A}} \left(2\varepsilon_{A} + \frac{\left\| \Delta b \right\|_{M}}{\left\| A \right\|_{MN} \left\| x \right\|_{N}} + h(A)\varepsilon_{A} \frac{\left\| r \right\|_{M}}{\left\| x \right\|_{N} \left\| A \right\|_{MN}} \right).$$

Таким образом, мы приходим к требуемой оценке.

Далее получим оценку полной погрешности взвешенного нормального псевдорешения по аналогии с [22].

Теорема 2. Предположим, что $\left\| \Delta A \right\|_{MN} \left\| A^{+}_{MN} \right\|_{NM} < 1$, $\operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A) = k$ и пусть $\overline{\overline{x}} \in \Re(\overline{A}^{\#})$.

Тогда имеет место оценка полной погрешности

$$\frac{\left\| x-\overline{\overline{x}} \right\|_{N}}{\left\| x \right\|_{N}} \le \frac{h}{1-h\varepsilon_{A}} \left(2\varepsilon_{A} + \alpha + h \cdot \varepsilon_{A} \cdot \beta + \gamma \right). \tag{29}$$

Доказательство. Для наследственной погрешности в этом случае имеет место оценка (21).

Для оценки вычислительной погрешности $\bar{x}-\bar{\bar{x}}$ воспользуемся соотношением

$$\bar{A}(\bar{x}-\bar{\bar{x}})=\bar{r}=\bar{b}_k-\bar{A}\bar{\bar{x}}, \tag{30}$$

где $\bar{b}_k$ — проекция вектора $\bar{b}$ на главное левое взвешенное сингулярное подпространство матрицы $\bar{A}$, т.е. $\bar{b}_k \in R(\bar{A})$.

Учитывая, что $\bar{x}-\bar{\bar{x}} \in R(\bar{A}^{\#})$ и что $\bar{A}^{+}_{MN}\cdot\bar{A}$ — взвешенный проектор в $R(\bar{A}^{\#})$, имеем $\bar{A}^{+}_{MN}\bar{A}(\bar{x}-\bar{\bar{x}})=\bar{x}-\bar{\bar{x}}=\bar{A}^{+}_{MN}\bar{r}$.

Отсюда получаем оценку вычислительной погрешности

$$\frac{\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|_N}{\|\bar{x}\|_N} \le \|\bar{A}\|_{MN}\left\|\bar{A}^{+}_{MN}\right\|_{NM}\frac{\|\bar{r}\|_M}{\|\bar{b}_k\|_M}. \tag{31}$$

Оценка полной погрешности нормального псевдорешения следует из соотношений

$$\frac{\|x-\bar{\bar{x}}\|_N}{\|x\|_N} \le \frac{\|x-\bar{x}\|_N}{\|x\|_N}+\frac{\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|_N}{\|x\|_N}, \tag{32}$$

$$\frac{\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|_N}{\|x\|_N} \le \|A\|_{MN}\left\|\bar{A}^{+}_{MN}\right\|_{NM}\frac{\|\bar{r}\|_M}{\|b_k\|_M} \tag{33}$$

и оценок (21), (14).

Теорема доказана.

2. Ранг возмущенной матрицы больше ранга исходной матрицы *A*

Введем следующие идемпотентные матрицы:

$$P=A^{+}_{MN}A,\ Q=AA^{+}_{MN},$$
$$\bar{P}_k=\bar{A}^{+}_{kMN}\bar{A},\ \bar{Q}_k=\bar{A}\cdot\bar{A}^{+}_{kMN}, \tag{34}$$

где k — ранг матрицы A.

Теорема 3. Предположим, что выполняется условие $\|\Delta A\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}<\frac{1}{2}$, $\operatorname{rank}(\bar{A})>\operatorname{rank}(A)=k$.

Тогда для наследственной погрешности имеет место оценка

$$\frac{\|x-\bar{x}_k\|_N}{\|x\|_N} \le \frac{h}{1-2h\varepsilon_A}\left(2\varepsilon_A+\alpha+h\cdot\varepsilon_A\cdot\beta\right). \tag{35}$$

Доказательство. Для получения оценки используем способ из [12], основанный на сингулярном разложении матриц. Представим $\bar{A}$ в виде взвешенного сингулярного разложения

$$\bar{A}=\bar{U}\,\bar{D}\,\bar{V}^T. \tag{36}$$

Наряду с (36) рассмотрим разложение

$$\bar{A}_k=\bar{U}\,\bar{D}_k\bar{V}^T, \tag{37}$$

где $\bar{D}_k$ — прямоугольная матрица, первые k диагональных элементов которой отличны от нуля и совпадают с соответствующими элементами матрицы $\bar{D}$, а все остальные элементы равны нулю.

Взвешенное нормальное псевдорешение задачи (9) будем аппроксимировать $\bar{x}_k$ взвешенным нормальным псевдорешением задачи

$$\min_{x\in C}\|\bar{x}\|_N,\ C=\{x\,|\,\|\bar{A}_k\bar{x}-\bar{b}\|_M=\min\}. \tag{38}$$

Матрица $\bar{A}_k$ построена в соответствии (37), имеет ранг k, такой же, как и матрица невозмущенной задачи. Таким образом, проблема оценки погрешности псевдорешения для матриц, ранг которых изменился, сведена к случаю, когда ранги матриц одинаковы [23]. Используем этот факт для оценки $\|x-\bar{x}_k\|_N/\|x\|_N$. Выражение для погрешности взвешенных псевдообратных матриц в этом случае приобретает вид

$$G_k = [\overline{P}_k + (I-\overline{P}_k)]\,(\overline{A}^{+}_{kMN} - A^{+}_{MN})\,[Q + (I-Q)] =$$
$$= \overline{P}_k\ \overline{A}^{+}_{kMN} Q + \overline{P}_k\ \overline{A}^{+}_{kMN} (I-Q) - \overline{P}_k A^{+}_{MN} Q - \overline{P}_k A^{+}_{MN} (I-Q) - (I-\overline{P}_k)\,\overline{A}^{+}_{kMN} Q +$$
$$+ (I-\overline{P}_k)\,\overline{A}^{+}_{kMN} (I-Q) - (I-\overline{P}_k)\,A^{+}_{MN} Q + (I-\overline{P}_k)\,A^{+}_{MN} (I-Q) =$$
$$= (\overline{A}^{+}_{kMN} Q - \overline{P}_k A^{+}_{MN}) - (I-\overline{P}_k) A^{+}_{MN} + \overline{A}^{+}_{kMN} (I-Q) =$$
$$= \overline{A}^{+}_{kMN} A A^{+}_{MN} - \overline{A}^{+}_{kMN} \overline{A} A^{+}_{MN} - (I-\overline{P}_k) A^{+}_{MN} + \overline{A}^{+}_{kMN} (I-Q) =$$
$$= \overline{A}^{+}_{kMN} (A-\overline{A}) A^{+}_{MN} - (I-\overline{P}_k) A^{+}_{MN} + \overline{A}^{+}_{kMN} (I-Q).$$

Используя результаты леммы 3, получаем

$$G_k = \overline{A}^{+}_{kMN} - A^{+}_{MN} =$$
$$= -\overline{A}^{+}_{kMN} \Delta A A^{+}_{MN} - (I-\overline{P}_k) N^{-1} \Delta A^{T} A^{+T}_{MN} N A^{+}_{MN} + \overline{A}^{+}_{kMN} (I-Q). \qquad (39)$$

Для погрешности взвешенного псевдорешения буем иметь

$$\overline{x}_k - x = \overline{A}^{+}_{kMN} \Delta A x + (I-\overline{P}_k)\, N^{-1} \Delta A^{T} A^{+T}_{MN} N x - \overline{A}^{+}_{kMN} (I-Q)\, b + \overline{A}^{+}_{kMN} (b-\overline{b}). \quad (40)$$

Тогда из (40), переходя к взвешенным нормам и учитывая результаты леммы 2, имеем

$$\frac{\|x-\overline{x}_k\|_N}{\|x\|_N} \le \frac{\left\|\overline{A}^{+}_{kMN}\right\|_{NM} \|\Delta A\|_{MN} \|x\|_N}{\|x\|_N} + \frac{\|\Delta A\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} \|x\|_N}{\|x\|_N} +$$
$$+ \frac{\left\|\overline{A}^{+}_{kMN}\right\|_{NM} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} \|\Delta A\|_{MN} \|r\|_M}{\|x\|_N} + \frac{\left\|\overline{A}^{+}_{kMN}\right\|_{NM} \|\Delta b\|_M}{\|x\|_N} \le$$
$$\le \left\|\overline{A}^{+}_{kMN}\right\|_{NM} \|\Delta A\|_{MN} + \|\Delta A\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} +$$
$$+ \frac{\left\|\overline{A}^{+}_{kMN}\right\|_{NM} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} \|\Delta A\|_{MN} \|r\|_M}{\|x\|_N} + \frac{\left\|\overline{A}^{+}_{kMN}\right\|_{NM} \|\Delta b\|_M}{\|x\|_N} \le$$
$$\le \frac{\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} \|A\|_{MN}}{1 - \|\Delta A_k\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}} \Bigg(2\frac{\|\Delta A\|_{MN}}{\|A\|_{MN}} + \frac{\|\Delta b\|_M}{\|A\|_{MN} \|x\|_N} +$$
$$+ \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} \|A\|_{MN} \frac{\|\Delta A\|_{MN}}{\|A\|_{MN}} \frac{\|r\|_M}{\|A\|_{MN} \|x\|_N}\Bigg). \qquad (41)$$

Оценим $\Delta A_k = A - \overline{A}_k$:

$$\|\Delta A_k\|_{MN} = \left\|\overline{A}_k - A\right\|_{MN} = \left\|\overline{A}_k - \overline{A} + \Delta A\right\|_{MN} \le \left\|\overline{A}_k - \overline{A}\right\|_{MN} + \|\Delta A\|_{MN} =$$
$$= \left\| \overline{U} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{k+1} \end{pmatrix} \overline{V}^{T} \right\|_{MN} + \|\Delta A\|_{MN} \le 2\|\Delta A\|_{MN}.$$

Кроме того, условие теоремы $\|\Delta A\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} < \frac{1}{2}$ приводит к неравенству $\|\Delta A_k\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} < 1$, что необходимо для корректности выражения (41). Учитывая это, из (41) приходим к оценке (35) для погрешности нормального взвешенного псевдорешения. Далее получим оценку полной погрешности взвешенного нормального псевдорешения.

Если выполняется условие $\|\Delta A\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} < 1$, то из [21] следует, что ранг возмущенной матрицы не может уменьшиться. В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Предположим, что выполняется условие $\|\Delta A\|_{MN} \left\|A_{MN}^{+}\right\|_{NM} < \frac{1}{2}$, $\operatorname{rank}(\overline{A}) > \operatorname{rank}(A) = k$ и пусть $\overline{\overline{x}} \in R(\overline{A}_k^{\#})$.

Тогда имеет место оценка

$$\frac{\|x-\overline{\overline{x}}\|_N}{\|x\|_N} \le \frac{h}{1-h\varepsilon_A}\left(2\varepsilon_A + \alpha + h\varepsilon_A \beta + \gamma_k\right). \tag{42}$$

Доказательство. Для оценки вычислительной погрешности $\|\overline{x}_k - \overline{\overline{x}}\|_N$ используем тот факт, что $\overline{A}_k \overline{x}_k = \overline{b}_k$. Тогда для произвольного вектора $\overline{\overline{x}} \in \Re(\overline{A}_k^{\#})$ имеют место соотношения $\overline{A}_k(\overline{x}_k - \overline{\overline{x}}) = \overline{r}_k = \overline{b}_k - \overline{A}_k \overline{\overline{x}}$.

Учитывая, что $x_k - \overline{\overline{x}} \in \Re(\overline{A}_k^{\#})$, а оператор $\overline{A}_{kMN}^{+} \overline{A}_k$ — оператор проектирования в $\Re(\overline{A}_k^{\#})$, получаем

$$\overline{A}_{kMN}^{+} \overline{A}_k(\overline{x}_k - \overline{\overline{x}}) = \overline{x}_k - \overline{\overline{x}} = \overline{A}_{kMN}^{+} \overline{r}_k,$$
$$\overline{x}_k - \overline{\overline{x}} = \overline{A}_{kMN}^{+} \overline{r}_k. \tag{43}$$

Отсюда следует оценка вычислительной погрешности для проекции нормального псевдорешения

$$\frac{\|\overline{x}_k - \overline{\overline{x}}\|_N}{\|\overline{x}_k\|_N} \le \|\overline{A}_k\|_{MN} \|\overline{A}_{kMN}^{+}\|_{NM} \frac{\|\overline{r}_k\|_M}{\|\overline{b}_k\|_M}.$$

Оценка полной погрешности следует из неравенств

$$\frac{\|x-\overline{\overline{x}}\|_N}{\|x\|_N} \le \frac{\|x-\overline{x}_k\|_N}{\|x\|_N} + \frac{\|\overline{x}_k - \overline{\overline{x}}\|_N}{\|x\|_N}, \qquad \frac{\|\overline{x}_k - \overline{\overline{x}}\|_N}{\|x\|_N} \le \frac{\|A\|_{MN} \|\overline{A}_{kMN}^{+}\|_{NM} \|\overline{r}_k\|_M}{\|b_k\|_M}$$

и оценок (14), (35).

3. Ранг исходной матрицы больше ранга возмущенной

Аналогично (34) введем идемпотентные матрицы:

$$P_l = A_{lMN}^{+} A,\ Q_l = A A_{lMN}^{+},$$
$$\overline{P} = \overline{A}_{MN}^{+} \overline{A},\ \overline{Q} = \overline{A}\,\overline{A}_{MN}^{+}, \tag{44}$$

где l — ранг матрицы $\overline{A}$.

Теорема 5. Предположим, что $\operatorname{rank}(A) > \operatorname{rank}(\overline{A}) = l$, $\frac{\|\Delta A\|_{MN}}{\mu_l} < \frac{1}{2}$.

Тогда имеет место оценка

$$\frac{\|x_l - \overline{x}\|_N}{\|x_l\|_N} \le \frac{\mu_1/\mu_l}{1-2\|\Delta A\|_{MN}/\mu_l}\left(2\varepsilon_A + \alpha_l + \frac{\mu_1}{\mu_l}\varepsilon_A \beta_l\right), \tag{45}$$

где μ_i — взвешенные сингулярные числа матрицы A.

Доказательство. Наряду с задачей (8) рассмотрим задачу

$$\min_{x \in C} \|x_l\|_N,\ C = \left\{ x \,\middle|\, \|A_l x - b\|_M = \min \right\} \tag{46}$$

с матрицей $A_l = U D_l V^T$ ранга l.

Аналогично, записывая равенства (23), (25) для задач (9) и (46), ранги матриц которых совпадают, получаем

$$G_l = \overline{A}_{MN}^{+} - A_{lMN}^{+} = -\overline{A}_{MN}^{+} \Delta A A_{lMN}^{+} - (I-\overline{P})\ N^{-1} \Delta A^T A_{lMN}^{+T} N A_{lMN}^{+} + \overline{A}_{MN}^{+}\left(I - Q_l\right),$$

$$\overline{x} - x_l = \overline{A}_{MN}^{+} \Delta A x_l + (I-\overline{P})\ N^{-1} \Delta A^T A_{lMN}^{+T} N x_l - \overline{A}_{MN}^{+}\left(I-Q_l\right) b + \overline{A}_{MN}^{+}(b-\overline{b}).$$

Учитывая результаты леммы 2 и переходя к взвешенным нормам, приходим к оценке

$$\frac{\|x_l-\bar{x}\|_N}{\|x_l\|_N}\le\left\|\bar{A}^{+}_{MN}\right\|_{NM}\|\Delta A\|_{MN}+\|\Delta A\|_{MN}\left\|A^{+}_{lMN}\right\|_{NM}+$$

$$+\frac{\left\|\bar{A}^{+}_{MN}\right\|_{NM}\left\|A^{+}_{lMN}\right\|_{NM}\|\Delta A\|_{MN}\|r\|_M}{\|x_l\|_N}+\frac{\left\|\bar{A}^{+}_{MN}\right\|_{NM}\|\Delta b\|_M}{\|x_l\|_N}\le$$

$$\le\frac{\left\|A^{+}_{lMN}\right\|_{NM}\|A\|_{MN}}{1-\|\Delta A_l\|_{MN}\left\|A^{+}_{lMN}\right\|_{NM}}\left(2\frac{\|\Delta A\|_{MN}}{\|A\|_{MN}}+\frac{\|\Delta b\|_M}{\|A\|_{MN}\|x_l\|_N}+\right.$$

$$\left.+\left\|A^{+}_{lMN}\right\|_{NM}\|A\|_{MN}\frac{\|\Delta A\|_{MN}}{\|A\|_{MN}}\frac{\|r\|_M}{\|A\|_{MN}\|x_l\|_N}\right),$$

откуда следует (45), т.е. утверждение теоремы 5.

Теорема 6. Предположим, что $\operatorname{rank}(A)>\operatorname{rank}(\bar{A})=l$, $\dfrac{\|\Delta A\|_{MN}}{\mu_l}<\dfrac{1}{2}$ и пусть $\bar{\bar{x}}\in\Re(\bar{A}^{\#})$.

Тогда имеет место оценка

$$\frac{\|x_l-\bar{\bar{x}}\|_N}{\|x_l\|_N}\le\frac{\mu_1/\mu_l}{1-2\|\Delta A\|_{MN}/\mu_l}\left(2\varepsilon_A+\alpha_l+\frac{\mu_1}{\mu_l}\varepsilon_A\beta_l+\gamma_l\right). \qquad (47)$$

Доказательство. Для доказательства наряду с задачей (8) рассмотрим задачу

$$\min_{x\in C}\|x_l\|_N,\ C=\left\{x\,\middle|\,\|A_lx-b\|_M=\min\right\} \qquad (48)$$

с матрицей $A_l=U\Sigma_lV^T$ ранга l.

Оценкой вычислительной погрешности в этом случае будет

$$\frac{\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|_N}{\|\bar{x}\|_N}\le\|\bar{A}\|_{MN}\left\|\bar{A}^{+}_{MN}\right\|_{NM}\frac{\|\bar{r}\|_M}{\|\bar{b}_l\|_M}.$$

Оценка полной погрешности следует из неравенств

$$\frac{\|x_l-\bar{\bar{x}}\|_N}{\|x_l\|_N}\le\frac{\|x_l-\bar{x}\|_N}{\|x_l\|_N}+\frac{\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|_N}{\|x_l\|_N}, \qquad \frac{\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|_N}{\|x_l\|_N}\le\frac{\|A\|_{MN}\left\|\bar{A}^{+}_{lMN}\right\|_{NM}\|\bar{r}_l\|_M}{\|b_l\|_M},$$

очевидных соотношений, $\|A\|_{MN}=\|A_l\|_{MN}$, $\left\|A^{+}_{lMN}\right\|_{NM}=1/\mu_l$ — оценки наследственной погрешности (45) и неравенства $\|\Delta A_l\|_{MN}\le 2\|\Delta A\|_{MN}$.

Замечание. Связь между числом обусловленности задачи с точными исходными данными $h(A)$ и числом обусловленности матрицы системы с приближенно заданными исходными данными $h(\bar{A})$ устанавливают оценки

$$\mu_k-\|\Delta A\|_{MN}\le\bar{\mu}_k\le\mu_k+\|\Delta A\|_{MN},\ \mu_1-\|\Delta A\|_{MN}\le\bar{\mu}_1\le\mu_1+\|\Delta A\|_{MN},$$

$$\frac{\mu_1-\|\Delta A\|_{MN}}{\mu_k+\|\Delta A\|_{MN}}\le\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_k}\le\frac{\mu_1+\|\Delta A\|_{MN}}{\mu_k-\|\Delta A\|_{MN}},$$

$$\frac{1-\varepsilon_A}{1+\varepsilon_A h}\le\frac{h(\bar{A})}{h(A)}\le\frac{1+\varepsilon_A}{1-\varepsilon_A h},$$

которые легко получить для взвешенной матричной нормы на основании результатов леммы 2.

Лемма 5. Пусть $A,\ \Delta A \in R^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A)$ и $\|\Delta A\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} < 1$.

Тогда относительная оценка наследственной погрешности взвешенной псевдообратной матрицы имеет вид

$$\frac{\left\|\overline{A}^{+}_{MN} - A^{+}_{MN}\right\|_{NM}}{\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}} \le C\,\frac{\varepsilon_A h}{1-\varepsilon_A h}, \tag{49}$$

причем если A — матрица не полного ранга, то $C=3$; если $m>n=k$ и $n>m=k$, то $C=2$; если $m=n=k$, то $C=1$.

Доказательство. Для получения оценок воспользуемся результатами леммы 3:

$$\overline{A}^{+}_{MN} - A^{+}_{MN} = -\overline{A}^{+}_{MN}\,\Delta A A^{+}_{MN} - (I-\overline{P})\ \Delta A^{\#}\,(A^{+}_{MN})^{\#}\,A^{+}_{MN} + \overline{A}^{+}_{MN}\,(I-Q)\,.$$

Переходя к взвешенным нормам и используя (20) и (28), получаем оценку абсолютной погрешности взвешенной псевдообратной матрицы A:

$$\begin{gathered}\left\|\overline{A}^{+}_{MN} - A^{+}_{MN}\right\|_{NM} \le \left\|\overline{A}^{+}_{MN}\,\Delta A A^{+}_{MN}\right\|_{NM} + \left\|\Delta A^{\#}\,(A^{+}_{MN})^{\#}\,A^{+}_{MN}\right\|_{NM} + \\ + \left\|\overline{A}^{+}_{MN}\,\overline{Q}(I-Q)\right\|_{NM} \le \left\|\overline{A}^{+}_{MN}\,\Delta A A^{+}_{MN}\right\|_{NM} + \left\|\Delta A^{\#}\,(A^{+}_{MN})^{\#}\,A^{+}_{MN}\right\|_{NM} + \\ + \left\|A^{+}_{MN}\,Q(I-\overline{Q})\right\|_{NM} \le \left\|\overline{A}^{+}_{MN}\right\|_{NM} \|\Delta A\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} + \|\Delta A\|_{MN} \left\|A^{+}_{MN}\right\|^{2}_{NM} + \\ + \left\|\overline{A}^{+}_{MN}\right\|_{NM} \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} \|\Delta A\|_{MN}\,,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left\|\overline{A}^{+}_{MN} - A^{+}_{MN}\right\|_{NM} \le \frac{\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}}{1-\|\Delta A\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}}\Big(\|\Delta A\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} + \\ + \|\Delta A\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} + \left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}\|\Delta A\|_{MN}\Big) = \\ \frac{h\varepsilon_A}{1-h\varepsilon_A}\,(h\varepsilon_A + h\varepsilon_A + h\varepsilon_A) = C\,\frac{(h\varepsilon_A)^2}{1-h\varepsilon_A},\ \ C=1,2,3.\end{gathered}$$

Для оценки относительной погрешности имеем

$$\frac{\left\|\overline{A}^{+}_{MN} - A^{+}_{MN}\right\|_{NM}}{\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}} \le C\|\Delta A\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}\ \frac{1}{1-\|\Delta A\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}} = C\,\frac{h\varepsilon_A}{1-h\varepsilon_A},$$

$$C=1,2,3.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что для получения оценок определяющим является использование взвешенного сингулярного разложения [19] и методика сведения проблемы оценки погрешности псевдорешения к оценке погрешности [12] для задач с матрицами одинакового ранга. На основании полученных результатов может быть разработан алгоритм нахождения эффективного ранга матриц, а также алгоритм вычисления устойчивых проекций взвешенного нормального псевдорешения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ben Israel A., Greville T.N.E. Generalized Inverse: Theory and Applications. — New York: Springer Verlag, 2003. — 400 p.
2. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1977. — 224 с.

3. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 2. — С. 98–107.
4. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с положительно — определенными весами и регуляризация задач // Там же. — 2003. — № 6. — С. 46 — 65.
5. Икрамов Х.Д., Матин фар М. Пересчет нормальных псевдорешений в рекурсивной задаче наименьших квадратов с линейными связями // Журн. вычис. математики и мат. физики. — 2004. — **44**, № 10. — С. 1726–1734.
6. Голуб Дж, Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999. — 548 с.
7. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.Н. Гарантированная точность решения систем линейных алгебраических уравнений в евклидовых пространствах. — Новосибирск: Наука, 1992. — 360 с.
8. Elden L. Perturbation theory for the least squares problem with linear equality constraints // SIAM J.Numer. Anal. — 1980. — **17**. — P. 338–350.
9. Bjork A. Numerical methods for Least squares problems. — 1996. — 408 p.
10. Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру. — Новосибирск: Наука, 1991. — 229 с.
11. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1989. — 320 с.
12. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 142–145.
13. Химич А.Н., Войцеховский С.А., Брусникин Р.Н. Достоверность решений линейных математических моделей с приближенно заданными исходными данными // Математические машины и системы. — 2004. — № 3. — С. 3–17.
14. Elden L. A weighted pseudoinverse, generalized singular values and constrained least squares problems // BIT. — 1982. — **22**. — P. 487–502.
15. Wei Y., Wu H. Expression for the Perturbation of the Weighted Moore– Penrose Inverse // Comput. and Mathematics with Appl. — 2000. — **39**. — P. 13–18.
16. Wei M. Supremum and Stability of Weighted Pseudoinverses and Weighted Least Squares Problems: Analysis and Computations. — New York: Huntington, 2001. — 182 p.
17. Wang D. Some topics on weighted Moore–Penrose inverse, weighted least squares and weighted regularized Tikhonov problems // Appl. Math. and Comput. — 2004. — **157**. — P. 243–267.
18. Wei Y., Wang D. Condition numbers and perturbation of weighted Moore-Penrose inverse and weighted least squares problem // Ibid. — 2003. — **145.** — P. 45–58.
19. Van Loan C.F. Generalizing the singular value decomposition // SIAM J. Numer. Anal. — 1976. — **13**. — P. 76–83.
20. Молчанов И.Н., Галба Е.Ф. Взвешенные псевдообращения комплексных матриц // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 1. — С. 53–57.
21. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. — М.: Наука, 1986. — 232 с.
22. Химич А.Н., Николаевская Е.А. Оценка погрешности решения задачи взвешенных наименьших квадратов // Компьютерная математика. — 2006. — № 3. — С. 36–45.

Поступила 08.01.2008