УДК 517.954: 532.546

**В.М. БУЛАВАЦКИЙ, В.В. СКОПЕЦКИЙ**

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОНСОЛИДАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

**Ключевые слова:** *математическое моделирование, консолидация, массоперенос, релаксация, неклассические модели, системы дифференциальных уравнений в частных производных, краевые задачи, асимптотические приближения, численные решения.*

## ВВЕДЕНИЕ

В связи с возрастающим влиянием антропогенных нагрузок на окружающую среду особую актуальность приобретают задачи теоретического изучения техногенного влияния факторов человеческой деятельности. Одним из негативных результатов такого влияния является загрязнение грунтов и грунтовых вод различными химическими веществами и отходами промышленности. Актуальность теоретических исследований в данной области обусловлена не только практической потребностью изучения условий экологически безопасной эксплуатации различных инженерных объектов, но также дороговизной (а иногда и принципиальной невозможностью) натурного моделирования динамических процессов в указанных объектах при их эксплуатации. Данное обстоятельство способствовало интенсификации исследований в области математического моделирования процессов массопереноса солевых растворов в условиях фильтрационного уплотнения грунтовых основ хранилищ промышленных и бытовых стоков, а также других гидротехнических объектов [1–6]. Следует отметить, что методы математического моделирования в рамках данной тематики хотя и достигли существенного развития, однако еще далеки от совершенства. Так, например, в известных в настоящее время математических моделях консолидации не учтено ряд факторов, которые существенно влияют на динамику процесса в сложных горно-геологических условиях, а также в случае сложной внутренней структуры солевых растворов, заполняющих хранилища промышленных или бытовых стоков. В связи с этим важное значение приобретает учет в моделях релаксационных свойств как фильтрационного поцесса, так и процесса деформирования пористой среды [1]. Так, в работе [2] выполнено математическое моделирование процесса фильтрационной консолидации насыщенной солевым раствором пористой среды, как процесса в системе с двойной релаксацией: релаксационная фильтрация поровой жидкости в релаксационно-сжимаемой среде.

Настоящая статья посвящена математическому моделированию процессов фильтрационной консолидации насыщенных солевыми растворами деформируемых пористых сред с учетом в модели эффектов пространственно-временной нелокальности [7], что позволяет в ряде случаев точнее моделировать динамику этих процессов в сложных условиях их протекания.

## ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА БЕЗ УЧЕТА РЕЛАКСАЦИИ СКОРОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Используем следующее обобщение фильтрационного закона Дарси [8, 9] на случай движения солевых растворов в условиях существенного влияния пространственно-временной нелокальности

$$u_x = -k\frac{\partial}{\partial x}\left(H + \lambda_1 \frac{\partial H}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right) \pm \nu \frac{\partial C}{\partial x}, \tag{1}$$

где $H$ — избыточный напор, $C$ — концентрация солей в жидкой фазе, $u_x$ — скорость фильтрации, $k$ — коэффициент фильтрации [9], $\nu$ — коэффициент осмоса (знаки + и − соответствуют нормальной и аномальной осмотической фильтрации), $\lambda_i$ $(i=1,2)$ — релаксационные параметры. Отметим, в частности, что при $\lambda_1=\lambda_2=0$ из соотношения (1) получаем обобщение закона Дарси на случай движения солевых растворов, предложенное в [4]. При $\nu=0$ соотношение (1) представляет собой обобщенный закон диффузии, рассмотренный в [7].

Уравнение для избыточного напора получим из уравнения неразрывности с учетом линейного закона уплотнения [8] путем исключения скорости фильтрации в соответствии с соотношением (1). В результате имеем

$$\frac{\partial H}{\partial t}=C_v\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H+\lambda_1\,\frac{\partial H}{\partial t}-\lambda_2\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)\mp\mu\,\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\,, \tag{2}$$

где $C_v$ — коэффициент консолидации [8], $\mu=\nu C_v k^{-1}$.

Учитывая в уравнении конвективной диффузии (гидродинамической дисперсии [9]) значение скорости фильтрации $u_x$ согласно (1), для определения концентрации солей в жидкой фазе получаем

$$\sigma\,\frac{\partial C}{\partial t}=D\,\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+k\,\frac{\partial}{\partial x}\left(H+\lambda_1\,\frac{\partial H}{\partial t}-\lambda_2\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)\frac{\partial C}{\partial x}\mp\nu\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2, \tag{3}$$

где $\sigma$ — пористость, $D$ — коэффициент конвективной диффузии [9].

Система дифференциальных уравнений (2), (3) образует искомую математическую модель процесса фильтрационной консолидации в условиях пространственно-временной нелокальности. Согласно построенной модели изучение процесса фильтрационного уплотнения пористого массива конечной мощности $l$, расположенного, например, на непроницаемом основании, сводится к решению в области $(0,l)\times(0,+\infty)$ нелинейной краевой задачи для системы уравнений (2), (3) при следующих условиях:

$$H(0,t)=0,\ H_{xx}(0,t)=0, \tag{4}$$

$$H_x(l,t)=0,\ H_{xxx}(l,t)=0, \tag{5}$$

$$H(x,0)=H_0, \tag{6}$$

$$C(0,t)=C_0,\ C_x(l,t)=0, \tag{7}$$

$$C(x,0)=0. \tag{8}$$

Здесь $H_0, C_0$ — соответственно начальное значение избыточного напора и концентрация солей на входе фильтрационного потока, являющиеся известными величинами.

**АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$x'=\frac{x}{l},\ t'=\frac{t}{T},\ H'=\frac{H}{H_0},\ C'=\frac{C}{C_0},\ C'_v=\frac{C_vT}{l^2},$$
$$\nu'=\frac{\nu TC_0}{l^2},\ D'=\frac{DT}{l^2},\ \zeta'=\frac{kH_0T}{l^2}, \tag{9}$$
$$\mu'=\frac{\mu C_0T}{l^2H_0},\ \lambda'_1=\frac{\lambda_1}{T},\ \lambda'_2=\frac{\lambda_2}{l^2}\ \ (D,T,C_0,H_0=\mathrm{const})$$

(знак штрих над безразмерными величинами в дальнейшем опускаем).

Рассмотрим сначала задачу (2), (4)–(6) относительно избыточного напора и применим к ней дифференциально–разностный метод в сочетании с методом суммарных представлений [10, 11]. Для этого введем в рассмотрение сеточную область $x_i = ih$ $(i = \overline{0, m+1})$ и поставим в соответствие краевой задаче дифференциально-разностную (в безразмерных переменных (9)) задачу вида

$$\left(1+\frac{2C_v\lambda_1}{h^2}\right)\frac{d\vec{u}(t)}{dt} - \frac{C_v\lambda_1}{h^2}T_3^{(m)}\frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \frac{2C_v}{h^2}\left(1+\frac{3\lambda_2}{h^2}\right)\vec{u}(t) -$$

$$-\frac{C_v}{h^2}\left(1+\frac{4\lambda_2}{h^2}\right)T_3^{(m)}\vec{u}(t) + \frac{C_v\lambda_2}{h^4}[(T_3^{(m)})^2 - 2E]\,\vec{u}(t) = \vec{w}(t), \tag{10}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{e}, \tag{11}$$

где $\vec{e} = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$, $\vec{u}(t) = [H_1(t), H_2(t), \ldots, H_m(t)]^{\mathrm{T}}$, $\vec{w}(t) = \dfrac{\mu}{h^2}[(2E - T_3^{(m)})\times$ $\times \vec{V}(t) - \vec{\omega}_1]$, $\vec{V}(t) = [C_1(t), C_2(t), \ldots, C_m(t)]^{\mathrm{T}}$, $\vec{\omega}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, $T_3^{(m)}$ — квадратная матрица порядка $m$, определенная в [11], $E$ — единичная матрица.

Введем в рассмотрение $P$-трансформации [11] векторов $\vec{u}$ и $\vec{w}$ согласно соотношениям

$$\hat{\vec{u}}(t) = P_3^{(m)^*}\vec{u}(t), \quad \hat{\vec{w}}(t) = P_3^{(m)^*}\vec{w}(t), \tag{12}$$

где $P_3^{(m)^*}$ — квадратная матрица порядка $m$, транспонированная относительно матрицы $P_3^{(m)} = [p_{kj}^{(3)}]_{k,j=1}^m$ (см. [11]). Умножая (10), (11) слева на матрицу $P_3^{(m)^*}$, с учетом соотношения [11]

$$T_3^{(m)} = P_3^{(m)}\Lambda_3^{(m)}P_3^{(m)^*},$$

где $\Lambda_3^{(m)} = [\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, \ldots, \lambda_m^{(3)}]$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $T_3^{(m)}$, получаем задачу Коши в изображениях, записываемую в скалярной форме в виде

$$\sigma_i\frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} + \theta_i\hat{u}_i(t) = \hat{w}_i(t) \quad (i = \overline{1, m}), \tag{13}$$

$$\hat{u}_i(0) = \hat{e}_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{14}$$

где

$$\sigma_i = 1 + \frac{C_v\lambda_1}{h^2}(2 - \lambda_i^{(3)}), \;\; \hat{e}_i = \sum_{k=1}^m p_{ki}^{(3)}, \;\; \hat{w}_i(t) = \frac{\mu}{h^2}\left[p_{1i}^{(3)} + (\lambda_i^{(3)} - 2)\sum_{k=1}^m p_{ki}^{(3)}C_k(t)\right],$$

$$\theta_i = \frac{C_v}{h^2}\left\{2\left(1+\frac{3\lambda_2}{h^2}\right) - \left(1+\frac{4\lambda_2}{h^2}\right)\lambda_i^{(3)} + \frac{\lambda_2}{h^2}[(\lambda_i^{(3)})^2 - 2]\right\}.$$

Решение задачи (13), (14) имеет вид

$$\hat{u}_i(t) = \hat{e}_i Q_i(t) + \int_0^t \hat{w}_i(\tau)K_i(t-\tau)d\tau \quad (i = \overline{1, m}), \tag{15}$$

где

$$Q_i(t) = \exp\left(-\frac{\theta_i}{\sigma_i}t\right), \;\; K_i(t) = \frac{Q_i(t)}{\sigma_i} \quad (i = \overline{1, m}). \tag{16}$$

Возвращаясь в соотношениях (15) к оригиналам, получаем решение исходной дифференциально-разностной задачи в виде явной зависимости функции напора от концентрации

$$H_i(t)=G_i(t)+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t C_k(\tau)S_{ik}(t-\tau)d\tau \quad (i=\overline{1,m}), \tag{17}$$

где

$$G_i(t)=\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(3)}\left(Q_j(t)\sum_{k=1}^{m} p_{kj}^{(3)}+\frac{\mu}{h^2}p_{1j}^{(3)}\frac{1-Q_j(t)}{\theta_j}\right),$$

$$S_{ik}(t-\tau)=\frac{\mu}{h^2}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(3)}p_{kj}^{(3)}(\lambda_j^{(3)}-2)K_j(t-\tau).$$

Переходя к задаче (3), (7), (8) относительно функции концентрации, предварительно линеаризуем ее подстановкой $C(x,t)=-\frac{D}{\nu}\ln U(x,t)$. В результате получаем в переменных (9) краевую задачу (случай нормальной осмотической фильтрации)

$$\sigma U_t=DU_{xx}+wU_x, \tag{18}$$

$$U(0,t)=U_0,\ U_x(1,t)=0, \tag{19}$$

$$U(x,0)=1, \tag{20}$$

где

$$U_0=\exp\left(-\frac{\nu}{D}\right),\ w=w(H)=\zeta\frac{\partial}{\partial x}\left(H+\lambda_1\frac{\partial H}{\partial t}-\lambda_2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right).$$

С учетом изложенного можно предложить методику решения рассматриваемой краевой задачи (2)–(8), базирующуюся на совместном применении дифференциально-разностного и собственно разностного методов. При этом вычисление поля концентраций может производиться, например, в соответствии с монотонной разностной схемой Самарского, которая в обозначениях работы [12] запишется в виде

$$\sigma U_t=\eta\hat{U}_{\bar{x}x}+w^+\hat{U}_x+w^-\hat{U}_{\bar{x}}, \tag{21}$$

где $w^+=\frac{1}{2}(w+|w|)$, $w^-=\frac{1}{2}(w-|w|)$, $w=\zeta(H_{\overset{0}{x}}+\lambda_1 H_{x\bar{t}}-\lambda_2 H_{\bar{x}x\bar{x}})$, $\eta=\frac{D}{1+R}$, $R=\frac{h|w|}{D}$, $h$ — шаг сетки по геометрической переменной. Тогда алгоритм вычислений может быть сформулирован следующим образом.

1. На данном временном слое вычисляем значение функции $U$ (а следовательно, и концентрации $C$) в соответствии с разностной схемой (21), использующей значение напорной функции $H$ из предыдущего временного слоя.

2. С учетом найденных значений $U$ на данном временном слое вычисляем значение поля избыточных напоров $H$ согласно явной зависимости, вытекающей из соотношений (17):

$$H_i(t)=G_i(t)-\frac{D}{\nu}\sum_{k=1}^{m}\int_0^t \ln U_k(\tau)S_{ik}(t-\tau)d\tau \quad (i=\overline{1,m}). \tag{22}$$

3. Переходим на следующий временной слой и повторяем вычисления, начиная с шага 1.

При численной реализации алгоритма интеграл в соотношениях (22) аппроксимируется с помощью соответствующей квадратурной формулы [13].

### УЧЕТ РЕЛАКСАЦИИ СКОРОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИЗБЫТОЧНОГО НАПОРА В СЛУЧАЕ СЛАБОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ

Обобщим рассмотренную выше математическую модель процесса консолидации на случай учета влияния эффекта релаксации скорости фильтрации. В этом случае соответствующий закон фильтрации запишем в виде

$$u_x+\lambda_1\frac{\partial u_x}{\partial t}=-k\frac{\partial}{\partial x}\left(H+\lambda_2\frac{\partial H}{\partial t}-\lambda_3\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)\pm\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(C+\lambda_1\frac{\partial C}{\partial t}\right), \qquad (23)$$

где $\lambda_1$ — параметр релаксации скорости.

Уравнения для определения избыточного напора получим, как и выше, из уравнения неразрывности жидкой фазы с учетом линейного закона уплотнения [8] путем исключения скорости фильтрации в соответствии с (23). Выполняя преобразования, аналогичные изложенным в [6], получаем искомое уравнение в виде

$$\lambda_1\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}+\frac{\partial H}{\partial t}=C_v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H+\lambda_2\frac{\partial H}{\partial t}-\lambda_3\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)\mp\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C+\lambda_1\frac{\partial C}{\partial t}\right). \qquad (24)$$

Исходя из математической модели, базирующейся на уравнении (24), рассмотрим задачу определения функции избыточного напора в процессе консолидации водонасыщенного пористого массива, расположенного на непроницаемом основании, в предположении слабо выраженных свойств пространственной нелокальности ($\lambda_3=\varepsilon^2$ — малый параметр). С учетом указанных предпосылок приходим к краевой задаче

$$\lambda_1\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}+\frac{\partial H}{\partial t}=C_v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H+\lambda_2\frac{\partial H}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)+f(x,t), \qquad (25)$$

$$H(0,t)=H_{xx}(0,t)=0, \qquad (26)$$

$$H_x(1,t)=H_{xxx}(1,t)=0, \qquad (27)$$

$$H(x,0)=h_0(x),\ H_t(x,0)=h_1(x), \qquad (28)$$

где $f, h_0, h_1$ — заданные функции соответствующих аргументов.

В предположении достаточной гладкости и так называемых «сильных» условий согласованности начальных и граничных условий [14] приближенное решение рассматриваемой задачи будем искать в соответствии с асимптотическим методом Вишика–Люстерника [15] в виде

$$H(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^i H_i(x,t)+\varepsilon^2\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i(\Pi_i(\xi,t)+P_i(\eta,t))+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad (29)$$

где $H_i$ — регулярные члены асимптотики; $\Pi_i$, $P_i$ — пограничные функции для описания погранслоя в окрестностях $x=0$ и $x=1$ соответственно; $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$, $\eta=\frac{1-x}{\varepsilon}$ — погранслойные переменные; $R_N$ — остаточный член.

Используя стандартную процедуру метода возмущений [15], для определения регулярной части асимптотики получаем последовательность краевых задач

$$\lambda_1\frac{\partial^2 \mathrm{H_i}}{\partial \mathrm{t}^2}+\frac{\partial \mathrm{H_i}}{\partial \mathrm{t}}=\mathrm{C}_v\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\left(\mathrm{H_i}+\lambda_2\frac{\partial \mathrm{H_i}}{\partial \mathrm{t}}\right)+\varphi_{\mathrm{i}}(\mathrm{x},\mathrm{t})\ (\mathrm{i}=\overline{0,\mathrm{N}}), \qquad (30)$$

$$\mathrm{H_i}(0,\mathrm{t})=-\Pi_{\mathrm{i}-2}(0,\mathrm{t})\ (\mathrm{i}=\overline{0,\mathrm{N}}), \qquad (31)$$

$$\frac{\partial \mathrm{H_i}(1,\mathrm{t})}{\partial \mathrm{x}}=-\frac{\partial \mathrm{P_i}(0,\mathrm{t})}{\partial\eta}\ (\mathrm{i}=\overline{0,\mathrm{N}}), \qquad (32)$$

$$\mathrm{H_i}(\mathrm{x},0)=\mathrm{g_i}(\mathrm{x}),\ \mathrm{H}_{\mathrm{i_t}}(\mathrm{x},0)=\rho_{\mathrm{i}}(\mathrm{x})\ (\mathrm{i}=\overline{0,\mathrm{N}}), \qquad (33)$$

где

$$\varphi_i(x,t)=\begin{cases} f(x,t) & (i=0),\\ -C_v\dfrac{\partial^4 H_{i-2}}{\partial x^4} & (i=\overline{1,N}),\end{cases} \qquad g_i(x)=\begin{cases} h_0(x) & (i=0),\\ 0 & (i=\overline{1,N}),\end{cases}$$

$$\rho_i(x)=\begin{cases} h_1(x) & (i=0),\\ 0 & (i=\overline{1,N}),\end{cases} \qquad \Pi_{-2}=\Pi_{-1}=H_{-1}\equiv 0.$$

Численно-аналитическое решение краевой задачи вида (30)–(33) приведено в [1]. Аналитическое решение этой задачи можно получить (используя, например, метод конечных интегральных преобразований) в виде

$$\mathrm{H_i}(x,t)=\mathrm{T_i}(x,t)-\Pi_{i-2}(0,t)-\frac{\partial \mathrm{P_i}(0,t)}{\partial\eta}x \quad (i=\overline{0,\mathrm{N}}),\tag{34}$$

где

$$T_i(x,t)=\int_0^1[g_i(\xi)G_1(x,\xi;t)+\rho_i(\xi)G_2(x,\xi;t)]d\xi+$$

$$+\frac{1}{\lambda_1}\int_0^t\int_0^1\psi_i(\xi,\tau)G_2(x,\xi;t-\tau)d\xi\,d\tau \ \ (i=\overline{0,N}),\tag{35}$$

$$\psi_i(x,t)=\varphi_i(x,t)+\frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda_1\frac{\partial\Pi_{i-2}(0,t)}{\partial t}+\Pi_{i-2}(0,t)\right]+$$

$$+x\frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda_1\frac{\partial^2P_i(0,t)}{\partial\eta\,\partial t}+\frac{\partial P_i(0,t)}{\partial\eta}\right]\ (i=\overline{0,N})\tag{36}$$

(функции $G_1$, $G_2$ определены в [1]).

Аналогично получаем рекуррентные последовательности задач для определения функций типа погранслоя $\Pi_i$ и $P_i$ $(i=\overline{0,N})$

$$\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\xi^2}+\lambda_2\frac{\partial^3\Pi_i}{\partial\xi^2\partial t}-\frac{\partial^4\Pi_i}{\partial\xi^4}=\frac{1}{C_v}\left(\lambda_1\frac{\partial^2\Pi_{i-2}}{\partial t^2}+\frac{\partial\Pi_{i-2}}{\partial t}\right)\ \ (i=\overline{0,N}),\tag{37}$$

$$\frac{\partial^2\Pi_i(0,t)}{\partial\xi^2}=-\frac{\partial^2H_i(0,t)}{\partial x^2},\ \Pi_i(\xi,0)=0,\ \Pi_i(\xi,t)\to0\ (\xi\to+\infty)\ \ (i=\overline{0,N}),\tag{38}$$

$$\frac{\partial^2P_i}{\partial\eta^2}+\lambda_2\frac{\partial^3P_i}{\partial\eta^2\partial t}-\frac{\partial^4P_i}{\partial\eta^4}=\frac{1}{C_v}\left(\lambda_2\frac{\partial^2P_{i-2}}{\partial t^2}+\frac{\partial P_{i-2}}{\partial t}\right)\ \ (i=\overline{0,N}),\tag{39}$$

$$\frac{\partial^3P_i(0,t)}{\partial\eta^3}=-\frac{\partial^3H_{i-1}(1,t)}{\partial x^3},\ P_i(\eta,0)=0,\ P_i(\eta,t)\to0\ (\eta\to+\infty)\ (i=\overline{0,N}),\tag{40}$$

где $P_{-2}=P_{-1}\equiv0$.

Подстановкой $\Pi_{\xi\xi}=u(\xi,t)$ задача (37), (38) $\forall\, i\in(\overline{0,N})$ преобразуется в краевую задачу для линейного параболического уравнения относительно функции $u$, решение которой легко выписывается в явном виде. Поскольку в рассматриваемом случае $\Pi(\xi,t)=\int_\xi^{+\infty}\int_\mu^{+\infty}u(s,t)ds\,d\mu$, то решение задач (37), (38) принимает вид

$$\Pi_i(\xi,t)=\frac{1}{\lambda_2C_v}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_\xi^{+\infty}\int_\mu^{+\infty}\left(\lambda_1\frac{\partial^2\Pi_{i-2}}{\partial\tau^2}+\frac{\partial\Pi_{i-2}}{\partial\tau}\right)e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_2}}\tilde{G}(s,\zeta;t-\tau)ds\,d\mu\,d\zeta\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\pi}}\int_0^t\int_\xi^{+\infty}\int_\mu^{+\infty}\frac{sH_{i_{xx}}(0,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\left[\frac{t-\tau}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2 s^2}{4(t-\tau)}\right]}ds\,d\mu\, d\tau \quad (i=\overline{0,N}), \tag{41}$$

где

$$\widetilde{G}(\xi,\zeta;t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\pi\tau}}\left[e^{-\frac{\lambda_2(\xi-\zeta)^2}{4t}}-e^{-\frac{\lambda_2(\xi+\zeta)^2}{4t}}\right].$$

Из явного вида (41) функций $\Pi_i\,(i=\overline{0,N})$ непосредственно следует, что указанные функции являются функциями типа погранслоя в окрестности точки $x=0$.

Аналогично получаем решения задач (39), (40) в виде

$$P_i(\eta,t)=\frac{1}{\lambda_2 C_v}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_\eta^{+\infty}\int_\theta^{+\infty}\left(\lambda_1\frac{\partial^2 P_{i-2}}{\partial\tau^2}+\frac{\partial P_{i-2}}{\partial\tau}\right)e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_2}}\widetilde{\widetilde{G}}(\nu,\xi;t-\tau)d\nu\, d\theta\, d\xi\, d\tau+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi\lambda_2}}\int_0^t\int_\eta^{+\infty}\int_\theta^{+\infty}\frac{H_{i-1_{xxx}}(1,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\left[\frac{t-\tau}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2\nu^2}{4(t-\tau)}\right]}d\nu\, d\theta\, d\tau \ (i=\overline{0,N}), \tag{42}$$

где

$$\widetilde{\widetilde{G}}(\eta,\xi;t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\pi t}}\left[e^{-\frac{\lambda_2(\eta-\xi)^2}{4t}}+e^{-\frac{\lambda_2(\eta+\xi)^2}{4t}}\right].$$

Из явного представления (42) функций $P_i$ $(i=\overline{0,N})$ следует, что они являются функциями типа погранслоя в окрестности точки $x=1$. С учетом того, что $P_{-2}=H_{-1}\equiv 0$, заключаем, что $P_0\equiv 0$.

Последовательность вычислений согласно полученных соотношений такова: $P_i$, $H_i$, $\Pi_i$ $(i=\overline{0,N})$. Основной вклад в решение вносят функции $H_0$, $\Pi_0$, $P_1$. При этом уравнения (30) для определения регулярных членов асимптотики являются уравнениями, описывающими процесс фильтрационной консолидации пористых массивов, насыщенных солевыми растворами, с учетом влияния лишь эффектов памяти. Таким образом, рассматриваемая модель, учитывающая эффекты пространственно-временной нелокальности, в некотором смысле «близка» к консолидационной модели, учитывающей влияние на динамику процесса собственно эффектов памяти [1]. Найденные выше функции $\Pi$ и $P$, являющиеся функциями погранслойного типа по переменным $\xi$ и $\eta$, «уточняют» решение $H(x,t)$ с учетом влияния на процесс эффектов пространственной нелокальности, затухая при $\xi,\eta\to+\infty$. В этой связи отметим, что в расчетной практике, как правило, достаточно найти несколько первых членов рассмотренного асимптотического представления.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные результаты позволяют произвести комплексный учет совместного влияния на динамику консолидационных процессов релаксационных эффектов при насыщении пористых массивов концентрированными солевыми растворами сложной внутренней структуры в сложных горно-геологических условиях их деформирования. Учет указанных эффектов при построении математических моделей консолидационных процессов диктуется прежде всего стремлением к повышению адекватности теоретического описания динамики указанных процессов (особенно начальных стадий их протекания) в случаях, когда имеет место существенное влияние на процесс отмеченных выше условий. Программная реализация приведенных алгоритмов открывает возможности учета важных дополнительных факторов (не учитываемых в классических математических моделях) при разработке конструктивных решений в инженерной практике с целью определения оптимальных характеристик консолидационного процесса, в частности при проектировании таких экологически небезопасных инженерных объектов, как поверхностные накопители промышленных и бытовых стоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. — Київ: Наук. думка, 2005. — 283 с.
2. Булавацкий В.М. Математическое моделирование фильтрационной консолидации с учетом солепереноса в рамках системы с двойной релаксацией // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 1. — С. 116–126.
3. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации // Там же. — 2006. — № 6. — С. 71–79.
4. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації грунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. — Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. — 211 с.
5. Власюк А.П., Остапчук О.П. Математичне моделювання масопереносу сольових розчинів під гідротехнічними спорудами // Вісник Нац. ун-ту водного господарства та природокористування. — 2006. — Вип. 4(36). — С. 30–38.
6. Скопецький В.В., Булавацький В.М. Математичне моделювання процесу фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами за умов релаксаційної фільтрації // Доп. НАН України. — 2006. — № 2. — С. 55–61.
7. Aifantis E.C., Hill J.M. On the theory of diffusion in media with double diffusivity // Quart. J. Mech. Appl. Math. — 1980. — **33.** — P. 1–21.
8. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. — М.: Высш. шк., 1991. — 447 с.
9. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 264 с.
10. Глущенко А.А. Один приближенный метод решения нестационарных задач математической физики // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1978. — № 6. — С. 490–494.
11. Положий Г.Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. — Киев: Вища шк., 1962. — 161 с.
12. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. — М.: Научный мир, 2003. — 316 с.
13. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений. — Киев: Вища шк., 1977. — 408 с.
14. Бутузов В.Ф., Мамонов В.М. Процедура сглаживания в одной сингулярно возмущенной квазилинейной параболической задаче // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1987. — **27,** № 3. — С. 391–399.
15. Вишик М.И., Люстерник Л.Я. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12,** вып. 5. — С. 3–122.


*Поступила 20.06.2008*