УДК 519.65

В.В. СКОПЕЦКИЙ, П.С. МАЛАЧИВСКИЙ

ЧЕБЫШЕВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММОЙ МНОГОЧЛЕНА И ВЫРАЖЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПАРАМЕТРОМ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕМ В КРАЙНИХ ТОЧКАХ ОТРЕЗКА

Ключевые слова: *чебышевское (равномерное, минимаксное) приближение с интерполированием, нелинейное приближение, точки альтернанса, схема Ремеза.*

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы чебышевского приближения функций нелинейным выражением обусловлены двумя причинами: во-первых, такое приближение не всегда существует, во-вторых, вычисление значений нелинейных параметров приближения (если оно существует) в большинстве случаев достаточно трудоемкое.

Рассмотрим чебышевское приближение функций с интерполированием суммой многочлена и выражения $\varphi(p;x)$ с нелинейным параметром p:

$$V_n(a;x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + A\varphi(p;x),\ \ A\neq 0,\ \ p_1<p<p_2. \tag{1}$$

Условия существования такого чебышевского приближения исследовано лишь для частных случаев и конкретных выражений $\varphi(p;x)$ в [1–4]. Использование таких приближений с интерполированием в крайних точках отрезка для построения непрерывных сплайн-приближений рассмотрено в [4]. В данной работе устанавливаются достаточные условия существования и характеристическое свойство чебышевского приближения выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью и интерполированием в крайних точках отрезка.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССА ПРИБЛИЖАЮЩИХ ВЫРАЖЕНИЙ И ПРИБЛИЖАЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть в выражении вида (1) функция $\varphi(p;x)$ с нелинейным параметром p имеет такие свойства:

1) функция $\varphi(p;x)$ непрерывно дифференцируемая до $(n+1)$-го порядка на отрезке $[\alpha,\beta]$ $(\varphi(p;x)\in C^{n+1}[\alpha,\beta])$;

2) производные $\varphi^{(i)}(p;x)$, $i=\overline{1,n}$, — строго монотонные функции от x на отрезке $[\alpha,\beta]$ для любых $p\in(p_1,p_2)$;

3) отношение $(n+1)$-х производных $\varphi(p;x)$ по x $\varphi^{(n+1)}(p;\chi_2)/\varphi^{(n+1)}(p;\chi_1)$ — строго монотонная функция от p $(p\in(p_1,p_2))$ для произвольных разных χ_1, $\chi_2\in[\alpha,\beta]$.

Пусть приближаемые функции $f(x)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$ и удовлетворяют неравенствам

$$0<W_1^{(n)}<W^{(n)}<W_2^{(n)}, \tag{2}$$

где

$$W^{(n)}=\frac{D_{n+1}(f;z_2,z_3,\ldots,z_{n+4})}{D_{n+1}(f;z_1,z_2,\ldots,z_{n+3})}, \tag{3}$$

$$D_k(U;z_j,z_{j+1},\ldots,z_{j+k+1})=\frac{D_{k-1}(U;z_{j+1},z_{j+2},\ldots,z_{j+k+1})}{D_{k-1}(s_{k-1};z_{j+1},z_{j+2},\ldots,z_{j+k+1})}-$$

$$-\frac{D_{k-1}(U;z_j,z_{j+1},\ldots,z_{j+k})}{D_{k-1}(s_{k-1};z_j,z_{j+1},\ldots,z_{j+k})},\ \ k=\overline{2,n+1},\ \ j=\overline{1,n-k+3}, \tag{4}$$

$$D_1(U;\, z_j,\, z_{j+2}) = U(z_{j+2}) - U(z_j),\ \ j = \overline{1, n+2}, \tag{5}$$

$$s_k(x) = x^k,$$

$$W_1^{(n)} = \min(r_1^{(n)}, r_2^{(n)});\ \ W_2^{(n)} = \max(r_1^{(n)}, r_2^{(n)}); \tag{6}$$

$$r_i^{(n)} = \lim_{p \to p_i} \frac{D_{n+1}(\varphi;\, z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi;\, z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})},\ \ i = \overline{1, 2};$$

а z_j $(j = \overline{1, n+4})$ — произвольные, упорядоченные по возрастанию $z_j < z_{j+1}$ числа из отрезка $[\alpha, \beta]$.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СУММОЙ МНОГОЧЛЕНА И ВЫРАЖЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПАРАМЕТРОМ С НАИМЕНЬШЕЙ АБСОЛЮТНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕМ В КРАЙНИХ ТОЧКАХ ОТРЕЗКА

Достаточное условие существования чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точным восстановлением ее значения в крайних точках отрезка сформулируем в теореме.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и имеет ограниченную производную на (α, β), а функция $\varphi(p; x)$ удовлетворяет требованиям 1–3, тогда:

а) достаточным условием существования чебышевского приближения функции $f(x)$ суммой многочлена и выражения с нелинейным параметром (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точным восстановлением ее значения в крайних точках отрезка α и β (или только в одной из них) есть выполнение неравенств (2), в которых в случае интерполирования в точке α

$$D_1(U;\, z_1, z_3) = U(z_3) + U(z_2) - 2U(z_1),\ \text{ где }\ z_1 = \alpha, \tag{7}$$

а в случае интерполирования в точке β

$$D_1(U;\, z_{n+2}, z_{n+4}) = 2U(z_{n+4}) - U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}),\ \text{ где }\ z_{n+4} = \beta; \tag{8}$$

б) при выполнении условий а) существует единственное чебышевское приближение функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точным восстановлением ее значения в крайних точках отрезка, а его параметры удовлетворяют системе уравнений

$$\mathrm{f}(\mathrm{z}_\mathrm{j}) - \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_\mathrm{i} \mathrm{z}_\mathrm{j}^\mathrm{i} - \mathrm{A}\varphi(\mathrm{p};\, \mathrm{z}_\mathrm{j}) = \lambda_\mathrm{j} (-1)^\mathrm{j} \mu,\ \ \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}+4}, \tag{9}$$

в которой

$$|\mu| = \max_{x \in [\alpha, \beta]} \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - A\varphi(p; x) \right|;$$

$$\lambda_j = 1,\ \ j = \overline{1, n+4};$$

z_j $(j = \overline{1, n+4})$ — упорядоченные по возрастанию точки альтернанса и интерполирования; $z_1 = \alpha$ и $\lambda_1 = 0$, если интерполирование проводится в точке α; $z_{n+4} = \beta$ и $\lambda_{n+4} = 0$, если интерполирование проводится в точке β.

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости теоремы в случае чебышевского приближения функции $f(x)$ с интерполированием в обеих крайних точках отрезка α и β. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда в соответствии с теоремой о существовании и единственности чебышевского приближения нелинейным выражением с интерполированием [4] для существования чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точным восстановлением ее значения в обеих крайних точках отрезка α и β достаточно, чтобы система уравнений

$$
\begin{aligned}
& f(\alpha)-\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i - A\varphi(p;\alpha)=0, \\
& f(z_j)-\sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A\varphi(p;z_j)=(-1)^j \mu, \ \ j=\overline{2,n+3}, \qquad (10) \\
& f(\beta)-\sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i - A\varphi(p;\beta)=0
\end{aligned}
$$

имела единственное решение относительно неизвестных a_i $(i=\overline{0,n})$, A, p и μ, где z_j $(j=\overline{2,n+3})$ — произвольные, упорядоченные по возрастанию $z_j < z_{j+1}$ числа из интервала (α,β).

Покажем, что в случае выполнения условий (2)–(8) система уравнений (10) имеет единственное решение. Исключив из системы (10) неизвестные a_0 и μ, получим систему $(n+2)$-х уравнений относительно неизвестных a_i $(i=\overline{1,n})$, A и p:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} a_i (z_3^i + z_2^i - 2\alpha^i) + A(\varphi(p;z_3)+\varphi(p;z_2)-2\varphi(p;\alpha)) = \\
& \qquad = f(z_3)+f(z_2)-2f(\alpha), \\
& \sum_{i=1}^{n} a_i (z_{j+2}^i - z_j^i) + A(\varphi(p;z_{j+2})-\varphi(p;z_j)) = f(z_{j+2})-f(z_j), \ \ j=\overline{2,n+1}, \qquad (11) \\
& \sum_{i=1}^{n} a_i (2\beta^i - z_{n+2}^i - z_{n+3}^i) + A(2\varphi(p;\beta)-\varphi(p;z_{n+2})-\varphi(p;z_{n+3})) = \\
& \qquad = 2f(\beta)-f(z_{n+2})-f(z_{n+3}).
\end{aligned}
$$

С учетом соотношений (3)–(8) система уравнений (11) приобретает вид

$$
\sum_{i=1}^{n} a_i D_1(s_i; z_j, z_{j+2}) + AD_1(\varphi; z_j, z_{j+2}) = D_1(\varphi; z_j, z_{j+2}), \ \ j=\overline{1,n+2}. \qquad (12)
$$

Из системы уравнений (12) исключим неизвестные a_i $(i=\overline{1,n})$ и A, которые входят линейно. Исключение параметров a_i $(i=\overline{1,n})$ проведем в порядке возрастания индекса. Начиная с $i=1$, из каждого уравнения системы (12) определяем a_i, а затем, попарно вычитая j-е уравнения от $(j+1)$-х $(j=\overline{i,n+1})$, получаем систему относительно остальных неизвестных параметров: a_r $(r=\overline{i+1,n})$, A и p. После исключения из системы уравнений (12) неизвестного a_1 получим

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=2}^{n} a_i D_2(s_i; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}) + AD_2(\varphi; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}) = \\
& \qquad = D_2(f; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}), \ \ j=\overline{1,n+1}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Такое исключение неизвестного a_1 допустимо, поскольку коэффициенты возле a_1 во всех уравнениях системы (12) не приобретают нулевого значения. Действительно, ни одно из значений выражения

$$
D_1(s_1; z_j, z_{j+2}) = \begin{cases} z_3 + z_2 - 2z_1, \text{ если } j=1, \\ z_{j+2} - z_j, \text{ если } 1 < j \le n+1, \\ 2z_{n+4} - z_{n+3} - z_{n+2}, \text{ если } j=n+2, \end{cases}
$$

для $j=\overline{1,n+2}$ не равняется нулю, поскольку по условию теоремы числа z_j $(j=\overline{2,n+3})$ — это разные упорядоченные по возрастанию числа из интервала (α,β).

Для продолжения исключения остальных параметров $a_i (i = \overline{2, n})$ из системы уравнений (13) необходимо убедиться, что коэффициенты возле них также отличаются от нуля. Оценим сначала значения коэффициентов возле неизвестного a_2. Для этого рассмотрим выражение

$$\frac{D_1(s_2; z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})}, \quad j = \overline{1, n+2}. \tag{14}$$

Значение выражения (14) при $j = \overline{2, n+1}$ равняется отношению приращений функции $s_2(x) = x^2$ к приращениям аргумента

$$\frac{D_1(s_2; z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})} = \frac{z_{j+2}^2 - z_j^2}{z_{j+2} - z_j}.$$

Согласно теореме Лагранжа [5] о конечных приращениях значение этого отношения равняется производной функции $s_2(x) = x^2$ в некоторой средней точке ζ_j интервала (z_j, z_{j+2}).

В случае $j = 1$ значение выражения (14) равняется отношению

$$\frac{D_1(s_2; z_1, z_3)}{D_1(s_1; z_1, z_3)} = \frac{z_3^2 + z_2^2 - 2z_1^2}{z_3 + z_2 - 2z_1}, \tag{15}$$

а для $j = n+2$ соответственно

$$\frac{D_1(s_2; z_{n+2}, z_{n+4})}{D_1(s_1; z_{n+2}, z_{n+4})} = \frac{2z_{n+4}^2 - z_{n+3}^2 - z_{n+2}^2}{2z_{n+4} - z_{n+3} - z_{n+2}}. \tag{16}$$

Эти отношения на основании [2] также равняются производной функции $s_2(x) = x^2$ в некоторой средней точке соответствующих интервалов, а именно: отношение (15) — производной в точке ζ_1 из интервала (α, z_3), а отношение (16) — производной в точке ζ_{n+2} из (z_{n+2}, β).

Следовательно, значение выражения (14) равняется производной функции $s_2(x) = x^2$ в средних точках ζ_j интервалов (z_j, z_{j+2}) $j = \overline{1, n+2}$. Соответственно коэффициенты возле неизвестного a_2 в уравнениях системы (13) приобретают следующие значения:

$$D_2(s_2; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+3}) = 2(\zeta_{j+1} - \zeta_j), \quad j = \overline{1, n+1}. \tag{17}$$

Поскольку числа z_j $(j = \overline{1, n+4})$ упорядочены по возрастанию, то точки ζ_j $(j = \overline{1, n+2})$ также будут упорядочены по возрастанию. Итак, коэффициенты возле неизвестного a_2 во всех уравнениях системы (13) приобретают лишь положительные значения. Поэтому неизвестное a_2 можно исключить из системы уравнений (13).

Аналогично можно убедиться, что коэффициенты возле остальных неизвестных a_i $(i = \overline{3, n})$ также не приобретают нулевых значений в процессе их последовательного исключения из системы уравнений (13). Во время исключения неизвестного a_k коэффициенты возле него будут следующими:

$$\mathrm{D_k(s_k; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k+1})} = \frac{\mathrm{D_{k-1}(s_k; z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k+1})}}{\mathrm{D_{k-1}(s_{k-1}; z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k+1})}} -$$
$$- \frac{\mathrm{D_{k-1}(s_k; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})}}{\mathrm{D_{k-1}(s_{k-1}; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})}}, \quad \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n-k+3}}. \tag{18}$$

Последовательно $(k-1)$ раз, применив к каждому из слагаемых в правой части выражения (18) теорему Коши об отношении приростов функций [5], можно убедиться, что коэффициенты возле неизвестного a_k равняются разнице $(k-1)$-х производных функции $s_k(z)=z^k$ в некоторых средних точках соответствующих интервалов, т.е.

$$D_k(s_k; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k+1}) = k(\xi_{j+1} - \xi_j), \ \ j=\overline{1, n-k+3}, \tag{19}$$

где $\xi_j \in (z_j, z_{j+k})$ $j=\overline{1, n-k+4}$.

Поскольку $(k-1)$-я производная степенной функции $s_k(z)=z^k$ строго монотонна и точки z_j $(j=\overline{2, n+3})$ упорядочены по возрастанию, то числа ξ_j $(j=\overline{1, n-k+4})$ также упорядочены по возрастанию, т.е. $\xi_j < \xi_{j+1}$. Отсюда следует, что коэффициенты около неизвестного a_k во всех уравнениях соответствующей системы уравнений приобретают лишь положительные значения.

Следовательно, из системы уравнений (13) можно последовательно исключить неизвестные параметры a_i $(i=\overline{2, n})$. В итоге относительно неизвестных A и p получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &AD_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4}) = D_{n+1}(f; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4}), \\ &AD_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3}) = D_{n+1}(f; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3}). \end{aligned} \tag{20}$$

Исследуем свободные члены уравнений этой системы и коэффициенты возле неизвестного A. Для этого рассмотрим выражения

$$\frac{D_n(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+n+1})}{D_n(S_n; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+n+1})}, \ \ j=\overline{1, 3}. \tag{21}$$

Аналогично, как и в случае с выражениями (14) и (18), последовательно применив теорему Лагранжа и $(n-1)$ раз теорему Коши, можно показать, что выражения (21) являются разделенными разностями n-го порядка функции $U(z)$ на множестве точек $\{z_i\}_{i=j}^{j+n+1}$. Следовательно, каждое из этих выражений равняется n-й производной функции $U(z)$ в некоторой средней точке σ_j из интервала (z_j, z_{j+n+1}), т.е.

$$\frac{D_n(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+n+1})}{D_n(S_n; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+n+1})} = U^{(n)}(\zeta_j), \ \ j=\overline{1, 3}, \tag{22}$$

где $\zeta_j \in (z_j, z_{j+n+1})$, $j=1, 2, 3$. Это означает, что коэффициенты возле неизвестного параметра A в системе уравнений (20) равняются приращению n-й производной функции $\varphi(p; x)$ по x, которая по условию теоремы строго монотонна. Итак, коэффициенты при A в уравнениях системы (20) не приобретают нулевого значения. Поэтому система уравнений (20) будет иметь вещественное решение, отличающееся от нулевого относительно неизвестного A, если свободные члены ее уравнений также не приобретают нулевого значения.

Оценим значения $D_{n+1}(f; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+n+2})$, $j=1, 2$, свободных членов уравнений системы (20). Поскольку по условию теоремы функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и имеет ограниченную производную на (α, β), то можно применить оценку значения комбинации ее приращений [2]. Поэтому, применяя рассуждения, изложенные во время обоснования оценки значений выражения (14), а также равенств (18) и (22), относительно значений свободных членов уравнений системы (20) получим, что они равняются приращениям n-й производной функции $f(x)$, т.е.

$$D_{n+1}(f; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+n+2}) = f^{(n)}(\xi_{j+1}) - f^{(n)}(\xi_j) \ \ j=1, 2, \tag{23}$$

где $\xi_j \in (z_j, z_{j+n+1})$.

Поскольку по условию теоремы (2) $W^{(n)} > 0$, то отношение приращений n-х производных функции $f(x)$ положительно, поэтому соответственно и сами приращения отличаются от нуля. Это означает, что свободные члены уравнений системы (20) также не приобретают нулевых значений. Исключив A из системы (20), получим относительно p трансцендентное уравнение

$$\omega_{\mathrm{n}}(\mathrm{p}) = \mathrm{W}^{(\mathrm{n})}, \qquad (24)$$

где

$$\omega_n(p) = \frac{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})},$$

а выражение $W^{(n)}$ определяется по формуле (3).

С учетом соотношения (22) левую часть уравнения (24) представим в виде

$$\omega_{\mathrm{n}}(\mathrm{p}) = \frac{\varphi^{(\mathrm{n})}(\mathrm{p}; \tau_3) - \varphi^{(\mathrm{n})}(\mathrm{p}; \tau_2)}{\varphi^{(\mathrm{n})}(\mathrm{p}; \tau_2) - \varphi^{(\mathrm{n})}(\mathrm{p}; \tau_1)}, \qquad (25)$$

где $\tau_i \in (z_i, z_{i+n+1})$ $i = 1, 2, 3$.

По условию теоремы n-я производная $\varphi^{(n)}(p; x)$ — строго монотонная функция от x на отрезке $[\alpha, \beta]$ для любых $p \in (p_1, p_2)$, поэтому согласно [6] для чисел τ_i $(i = 1, 2, 3)$ выполняются соотношения $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$. Тогда в левой части уравнения (24) можно сформировать отношение разделенных разностей функции $\varphi^{(n)}(p; x)$. Для этого левую часть уравнения (24) умножим и разделим на соответствующие разности приращений аргумента $(\tau_2 - \tau_1) / (\tau_3 - \tau_2)$. После замены полученных разделенных разностей соответствующими производными в средних точках получим

$$\omega_n(p) = K \varphi^{(n+1)}(p; \zeta_2) / \varphi^{(n+1)}(p; \zeta_1), \qquad (26)$$

где $K = \dfrac{\tau_3 - \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$, $\zeta_1 \in (z_1, z_{n+3})$, $\zeta_2 \in (z_2, z_{n+4})$.

Поскольку по условию теоремы отношение $(n+1)$-х производных $\varphi^{(n+1)}(p; \chi_2) / \varphi^{(n+1)}(p; \chi_1)$ является строго монотонной функцией от p $(p_1 < p < p_2)$ для любых $\chi_1, \chi_2 \in [\alpha, \beta]$, то из (26) следует, что левая часть уравнения (24) — строго монотонная функция от p для $p \in (p_1, p_2)$. Мы получили, что для любых упорядоченных по возрастанию чисел z_j $(j = \overline{1, n+4})$ из отрезка $[\alpha, \beta]$ левая часть уравнения (24) для $p \in (p_1, p_2)$ приобретает значение из интервала $(W_1^{(n)}, W_2^{(n)})$, где $W_1^{(n)}$ и $W_2^{(n)}$ определяются по формулам (6).

Следовательно, в случае выполнения условий теоремы система уравнений (10) имеет единственное решение относительно неизвестных a_i $(i = \overline{0, n})$, A, p и μ для любых упорядоченных по возрастанию чисел z_j $(j = \overline{2, n+3})$ из интервала (α, β). Таким образом, выполнение условий (2) является достаточным для существования чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и интерполированием в крайних точках отрезка.

Поскольку в случае выполнения функцией $f(x)$ условий (2) с учетом соотношений (7) и (8) система уравнений (10) имеет единственное решение, то в соответствии с теоремой о существовании и единственности чебышевского приближения нелинейным выражением [4] параметры чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на $[\alpha, \beta]$ и интерполированием в крайних точках отрезка α и β определяются из системы уравнений (10), в которой $z_j (j = \overline{2, n+3})$ — упорядоченные по возрастанию точки альтернанса. В этом случае система уравнений (10) с учетом $z_1 = \alpha$, $\lambda_1 = 0$, $z_{n+4} = \beta$ и $\lambda_{n+4} = 0$ совпадает с системой уравнений (9). Следовательно, справедливость теоремы для случая чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точным восстановлением ее значения в обеих крайних точках отрезка подтверждено.

Подобным образом можно убедиться в справедливости теоремы и в случае чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точным восстановлением ее значения в одной из крайних точек отрезка — α или β. Тогда, в соответствии с характеристической теоремой существования и единственности чебышевского приближения нелинейным выражением с интерполированием [5], для существования чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точным восстановлением ее значения в точке α достаточно, чтобы система уравнений

$$\begin{aligned} & f(\alpha)-\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i - A\varphi(p;\alpha)=0, \\ & f(z_j)-\sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A\varphi(p;z_j)=(-1)^j \mu, \ \ j=\overline{2, n+4}, \end{aligned} \tag{27}$$

имела единственное решение относительно неизвестных a_i $(i=\overline{0,n})$, A, p и μ, где z_j $(j=\overline{2,n+4})$ — произвольные, упорядоченные по возрастанию $z_j < z_{j+1}$ числа из $(\alpha, \beta]$.

Для существования чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точным восстановлением ее значения в точке β достаточно, чтобы система уравнений

$$\begin{aligned} & f(z_j)-\sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A\varphi(p;z_j)=(-1)^j \mu, \ \ j=\overline{1, n+3}, \\ & f(\beta)-\sum_{i=1}^{n} a_i \beta^i - A\varphi(p;\beta)=0, \end{aligned} \tag{28}$$

имела единственное решение относительно неизвестных a_i $(i=\overline{0,n})$, A, p и μ, где z_i $(i=\overline{1,n+3})$ — произвольные, упорядоченные по возрастанию $z_j < z_{j+1}$ числа из $(\alpha, \beta]$. Единственность решения систем уравнений (27) и (28) можно обосновать так же, как и для системы уравнений (10).

В случае удовлетворения функцией $f(x)$ условий (2)–(8) системы уравнений (27) и (28) будут иметь соответственно единственные решения. Поэтому согласно теореме о существовании и единственности чебышевского приближения нелинейным выражением [5] параметры чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и интерполированием в одной из крайних точек отрезка определяются соответственно из системы уравнений (27) или (28), которые с учетом конкретной точки интерполирования α или β совпадают с системой уравнений (9).

Теорема доказана.

Для нахождения значений параметров приближения выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью и интерполированием можно использовать схему Ремеза [5].

Заметим, что условия (2) не являются необходимыми для существования чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и интерполированием в крайних точках отрезка. Выполнение условий (2) необходимо лишь в точках чебышевского альтернанса. В случае использования алгоритма Ремеза для нахождения параметров аппроксимации функции $f(x)$ выражением (1) выполнение условий (2) необходимо во всех точках промежуточных приближений к точкам альтернанса.

Выражение (1) удовлетворяет требованиям 1–3, например, с такими функциями $\varphi(p;x)$:

1) $\varphi(p;x)=e^{px}$ на всей числовой оси $(-\infty,\infty)$ $(\forall x \in (-\infty,\infty))$ с отличным от нуля значением параметра p $(p \in (-\infty, 0) \bigcup (0,\infty))$;

2) $\varphi(p;x)=x^p$ на $[0,\infty)$ со значением параметра p, отличным от j $(p\neq j)$ при $j=\overline{0,n}$;

3) $\varphi(p;x)=\ln(x+p)$ на $[\alpha,\infty)$ при $p>-\alpha$;

4) $\varphi(p;x)=xe^{px}$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, если аргумент x и параметр p удовлетворяют соотношениям $px+n+1>0$ и $p\neq 0$ при $n>0$;

5) $\varphi(p;x)=erf(px)$ и $\varphi(p;x)=erfc(px)$ на $[0,\infty)$ с отличным от нуля значением параметра p $(p\in(-\infty,0)\bigcup(0,\infty))$ при $n=1,2$;

6) $\varphi(p;x)=x^{px}$ на интервале (e^{-1},∞) с отличным от нуля значением параметра p $(p\in(-\infty,0)\bigcup(0,\ \infty))$ при $n=1,2$.

Приведенные примеры функций $\varphi(p;x)$ удовлетворяют требованиям 1–3, потому что все производные этих функций при указанных ограничениях монотонны по x, а их отношение монотонно по p.

В соответствии с теоремой о существовании и единственности чебышевского приближения функции нелинейным выражением с интерполированием [4] параметры чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1), если оно существует, можно определить по схеме Ремеза. Такое чебышевское приближение на отрезке $[\alpha,\beta]$ в случае интерполирования в обеих крайних точках отрезка α и β имеет $n+2$ точки альтернанса, а в случае интерполирования в одной из крайних точек — $n+3$ точки альтернанса.

Пусть z_j $(j=\overline{2,n+3})$ — точки альтернанса в случае приближения с интерполированием в обеих крайних точках отрезка, z_j $(j=\overline{2,n+4})$ — точки альтернанса в случае приближения с интерполированием только в точке α, а z_j $(j=\overline{1,n+3})$ — соответственно в точке β. Если функции $f(x)$ и $\varphi(p;x)$ удовлетворяют условиям теоремы и точки альтернанса известны, то параметры a_i $(i=\overline{0,n})$ и A чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей абсолютной погрешностью и интерполированием в крайних точках отрезка определяются по формулам:

$$A=D_{n+1}(f;z_1,z_2,\ldots,z_{n+3})/D_{n+1}(\varphi;z_1,z_2,\ldots,z_{n+3});\tag{29}$$

$$a_k=\Bigg(D_k(f;z_1,z_2,\ldots,z_{k+2})-\sum_{i=k+1}^{n}a_iD_k(s_i;z_1,z_2,\ldots,z_{k+2})-$$
$$-AD_k(\varphi;z_1,z_2,\ldots,z_{k+2})\Bigg)\Big/D_k(s_i;z_1,z_2,\ldots,z_{k+2}),\ k=\overline{1,n},\tag{30}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(f(z_2)+f(z_3)-\sum_{i=1}^{n}a_i(z_2^i+z_3^i)-A(\varphi(p;z_2)+\varphi(p;z_3))\right).\tag{31}$$

Здесь значение выражений $D_k(U;z_j,z_{j+1},\ldots,z_{j+k+1})$ $j=\overline{1,n-k+3}$ при $k=\overline{2,n+1}$ определяется по формуле (4), а выражения $D_1(s_1;z_j,z_{j+2})$ в зависимости от точек интерполирования — по формулам (5), (7) или (8).

Значение параметра p определяется как решение уравнения (24). Способы решения этого уравнения зависят от функции $\varphi(p;x)$. Рассмотрим условия существования чебышевского приближения выражением (1) для функции $f(x)$ с наименьшей абсолютной погрешностью и интерполированием в случае приближения суммой многочлена n степени.

3. ЧЕБЫШЕВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММОЙ МНОГОЧЛЕНА *n* СТЕПЕНИ С НАИМЕНЬШЕЙ АБСОЛЮТНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕМ В КРАЙНИХ ТОЧКАХ ОТРЕЗКА

Чебышевское приближение суммой многочлена n степени

$$S_n(a;x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+Ax^p,\ x\geq 0,\ A\neq 0,\ p\neq k\ (k=\overline{0,n}),\tag{32}$$

с интерполированием используется для описания различных физических процессов [1] и приближения некоторых специальных функций, в частности эллиптических интегралов [7]. Разработаны также и технические устройства, которые реализуют вычисление значения суммы многочлена n степени [1, 4].

Достаточное условие существования чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (32) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точным восстановлением ее значения в крайних точках отрезка устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и имеет ограниченную производную на (α, β). Тогда достаточным условием существования чебышевского приближения функции $f(x)$ суммой многочлена n степени (32) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точным восстановлением ее значения в крайних точках отрезка α и β (или только в одной из них) есть удовлетворение неравенств

$$W^{(n)} > 0,\ W^{(n)} \neq \widetilde{W}_r^{(n)},\ r = \overline{0, n}, \tag{33}$$

где

$$\widetilde{W}_r^{(n)} = \begin{cases} 0, \text{ если } z_1 = 0, \\ \dfrac{D_{n+1}(l_{n+1}; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(l_{n+1}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}, \text{ если } z_1 > 0, \end{cases} \tag{34}$$

$$l_k(x) = x^k \ln(x), \tag{35}$$

величина $W^{(n)}$ определяется по формуле (3), значение выражений $D_k(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k+1})$, $j = \overline{1, n-k+3}$, при $k = \overline{2, n+1}$ — по формуле (4), а выражения $D_1(s_1; z_j, z_{j+2})$ в зависимости от точек интерполирования — по формулам (5), (7) или (8).

В случае выполнения условий (33) существует единственное чебышевское приближение функции $f(x)$ суммой многочлена n степени (32) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точным восстановлением ее значения в крайних точках отрезка, а его параметры удовлетворяют системе уравнений (9), в которой $\varphi(p; x) = x^p$.

Доказательство. Сумма многочлена n степени (32) для значений параметра p, отличающихся от $0, 1, \ldots, n$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Рассмотрим, например, случай отрицательных значений параметра p ($p > 0$). Для функции $\varphi(p; x) = x^p$ величины $W_1^{(n)}$ и $W_2^{(n)}$ определяются по формулам (6) и приобретают следующие значения:

$$\mathrm{W}_1^{(\mathrm{n})} = \lim_{\mathrm{p} \to -\infty} \omega_{\mathrm{n}}(\mathrm{p}) = 0,\ \mathrm{W}_2^{(\mathrm{n})} = \lim_{\mathrm{p} \to -0} \omega_{\mathrm{n}}(\mathrm{p}) = \widetilde{\mathrm{W}}_0^{(\mathrm{n})},$$

где

$$\omega_n(p) = \frac{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})},$$

величина $\widetilde{W}_0^{(n)}$ определяется по формуле (34), значение выражений $D_k(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k+1})$ $j = \overline{1, n-k+3}$, при $k = \overline{2, n+1}$ — по формуле (4), а выражения $D_1(s_1; z_j, z_{j+2})$ в зависимости от точек интерполирования — по формулам (5), (7) или (8).

Следовательно, на основании теоремы 1 достаточным условием существования чебышевского приближения выражением (32) с отрицательным значением параметра p функции $f(x)$ с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и интерполированием в крайних точках отрезка является выполнение неравенств

$$0 < \mathrm{W}^{(\mathrm{n})} < \widetilde{\mathrm{W}}_0^{(\mathrm{n})}. \tag{36}$$

Аналогично в случае значений параметра p из интервалов $p \in (j-1, j)$, $j=\overline{1,n}$, имеем

$$W_1^{(n)} = \lim_{p \to j-1+0} \omega_n(p) = \widetilde{W}_{j-1}^{(n)} \text{ и } W_2^{(n)} = \lim_{p \to j-0} \omega_n(p) = \widetilde{W}_j^{(n)}.$$

Согласно теореме 1 это означает, что достаточным условием существования чебышевского приближения функции $f(x)$ с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и интерполированием в крайних точках отрезка выражением (32) со значением параметра p из интервалов $p \in (j-1, j)$, $j=\overline{1,n}$, является выполнение неравенств

$$\widetilde{W}_{j-1}^{(n)} < W^{(n)} < \widetilde{W}_j^{(n)}. \tag{37}$$

Если же значение параметра p больше n ($p \in (n, \infty)$), то

$$W_1^{(n)} = \lim_{p \to n+0} \widetilde{W}_n^{(n)} \text{ и } W_2^{(n)} = \lim_{p \to \infty} \omega_n(p) = \infty.$$

В соответствии с теоремой 1 это означает, что достаточным условием существования чебышевского приближения функции $f(x)$ с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и интерполированием в крайних точках отрезка выражением (32) со значением параметра p, большим n, есть выполнение неравенства

$$W^{(n)} > \widetilde{W}_n^{(n)}. \tag{38}$$

Отсюда следует, что выражение (32) удовлетворяет условиям теоремы 1 при любых значениях p, отличающихся от $0, 1, \ldots, n$. Таким образом, достаточным условием существования чебышевского приближения функции $f(x)$ с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и интерполированием в крайних точках отрезка суммой многочлена n степени (32) со значением параметра p, отличным от $0, 1, \ldots, n$, является выполнение одного из неравенств (36), (37) или (38), что эквивалентно условиям (33).

Теорема доказана.

Рассмотрим условие (33). Значение выражения $W^{(n)}$ (3) совпадает со значением $\widetilde{W}_r^{(n)}$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$ для функций $f(x)$, которые имеют вид

$$\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + B x^r \ln(x), \; x > 0, \tag{39}$$

где $b_i \, (i=\overline{1,n})$ и B — произвольные вещественные числа.

При доказательстве теоремы 1 было установлено, что неравенство $W^{(n)} > 0$ удовлетворяют функции, n-производная которых строго монотонна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Следовательно, достаточному условию (33) существования чебышевского приближения выражением (32) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ удовлетворяют, в частности, функции $f(x)$ $(f(x) \in C^{(n)}[\alpha, \beta])$, отличные от (39), n-производная которых строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то параметры a_i $(i=\overline{0,n})$ и A чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (32) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и интерполированием в крайних точках отрезка определяются по формулам (29)–(31), в которых $\varphi(p; x) = x^p$, а значение параметра p определяется как решение уравнения (24).

Решение уравнения (24) для $\varphi(p; x) = x^p$ проводится с учетом того, что если значение величины $W^{(n)}$ удовлетворяет неравенствам

$$\widetilde{W}_0^{(n)} < W^{(n)} < \widetilde{W}_n^{(n)}, \tag{40}$$

его решение находится в одном из интервалов $(k, k+1)$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Поэтому сначала необходимо проверить, не попадает ли корень уравнения в один из этих интервалов. Если да, то его можно определить методом хорд или половинного деления, в противном случае значение параметра p находится в одном из интервалов $(-\infty, 0)$ или (n, ∞).

Левая часть уравнения (24) при $\varphi(p; x) = x^p$ является степенной функцией. Это следует из равенства (26), которое в этом случае можно представить в виде

$$K(\zeta_2 / \zeta_1)^{p-n-1} = W^{(n)}, \qquad (41)$$

где K, ζ_1, ζ_2 и $W^{(n)}$ определяются так же, как и в формуле (26). Учитывая характер степенной зависимости левой части уравнения (24) от p, его решение целесообразно искать как корень уравнения

$$g_n(p) = V^{(n)}, \qquad (42)$$

где $V^{(n)} = \ln(W^{(n)})$. Решение уравнения (42) можно вычислить итерационным методом Ньютона

$$\mathrm{p}_{i+1} = \mathrm{p}_i - \frac{\mathrm{g}_n(\mathrm{p}_i) - \mathrm{V}^{(n)}}{\mathrm{g}'_n(\mathrm{p}_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (43)$$

где:

$$g'_n(p) = \frac{D_{n+1}(\overline{\varphi}; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})} - \frac{D_{n+1}(\overline{\varphi}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})};$$

$$\overline{\varphi}(p, x) = x_p \ln(x); \; \varphi(p; z) = z^p;$$

$$p_0 = \begin{cases} p^*, \text{ если } W^{(n)} < \widetilde{W}_0^{(n)}, \\ n + 1 + p^*, \text{ если } W^{(n)} > \widetilde{W}_n^{(n)}; \end{cases} \qquad (44)$$

$$p^* = \frac{|\ln W^{(n)}|}{\ln(z_{n+4} + z_2) - \ln(z_{n+3} + z_1)};$$

выражения $W^{(n)}$ и $D_{n+1}(U; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+n+2})$, $i = \overline{1, 2}$, в зависимости от точек интерполирования определяются по соответствующим формулам (5), (7) или (8), а $\widetilde{W}_0^{(n)}$ и $\widetilde{W}_n^{(n)}$ — по формуле (34).

Выбор начального значения p_0 (44) достаточно близкий к решению уравнения (42) и обеспечивает совпадение их знаков, что необходимо для соблюдения стойкости итерационного метода (43). Функция $g_n(p)$ при $\varphi(p; x) = x^p$ имеет разрывы в точках $p = 0, 1, \ldots, n$ и переход промежуточных значений p_i через одну из этих точек может нарушить сходимость метода (43). Предварительная проверка условия (40) и выбор начального значения p_0 по формуле (44) обеспечивают обход упоминаемых точек разрыва левой части уравнения (24) во время нахождении его решения по итерационной схеме (43). Предлагаемая комбинация применения итерационных методов для решения уравнения (42) обеспечивает достаточно быструю их сходимость, в частности, для тестовых примеров сходимость итерационного процесса (43) достигалась за три-четыре итерации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Достаточным условием существования чебышевского приближения функции $f(x)$ суммой многочлена и выражения с нелинейным параметром (1) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и интерполированием в крайних точках отрезка является выполнение неравенств (2) с учетом (7) и (8). Параметры a_i $(i = \overline{0, n})$ и A такого чебышевского приближения определяются по формулам (29)–(31). Значение параметра p является корнем трансцендентного уравнения (24). Для нахождения решения уравнения (24) при $\varphi(p; x) = x^p$ предложена схема локализации корня этого уравнения с использованием итерационного метода (43) в случае бесконечного интервала.

Достаточным условием существования чебышевского приближения функции $f(x)$ суммой многочлена и степени (32) с наименьшей абсолютной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ и интерполированием в крайних точках отрезка является выполнение неравенств (33). Этому условию удовлетворяют, в частности, функции $f(x)$ ($f(x) \in C^n [\alpha, \beta]$), n-я производная которых строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, за исключением функций вида (39).

Чебышевское приближение выражением (1) с точным восстановлением значения функции в крайних точках отрезка используется для построения непрерывных минимаксных сплайн-приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробель Р.А., Попов Б.А. Равномерное приближение экспоненциальными и степенными выражениями с условием. Ч. 1, 2 // Алгоритмы и программы для вычисления функций на ЭЦВМ. — Киев: Ин-т кибернетики АН УССР. — 1981. — Вып. 5. — Ч. 1. — С. 158–170; Ч. 2. — С. 171–180.
2. Малачівський П.С. Чебишевське наближення сумою многочлена й експоненти з інтерполюванням у крайніх точках // Доп. НАН України. — 2008. — № 2. — С. 54–58.
3. Dunham C., Zhu C. Strong uniqueness of nonlinear Chebyshev approximation (with interpolation) // Numerical mathematics and computing, Proc. 20th Manitoba Conf., Winnipeg/Can. 1990, Congr. Numerantium 80. — 1991. — P. 161–169.
4. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. — Киев: Наук. думка, 1989. — 272 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников. — М: Мир, 1977. — 831 с.
6. Малачівський П. Чебишевське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 1. — С. 134–145.
7. Kobayashi Y., Ohkita M., Inoue M. Fractional power approximations of elliptic integrals and Bessel functions // Math. Comput. Simlation. — 1978. — **20,** N 4. — P. 285–290.

Поступила 17.09.2008