КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В.В. ОСТАПЕНКО, Д.А. БЕЛЯЕВ

УДК 519.8

РАСПИСАНИЕ РЕМОНТА ОСНОВНЫХ СРЕДСТВ

Ключевые слова: *оптимальный момент, минимизация затрат, капитальный ремонт, стационарный процесс.*

ВВЕДЕНИЕ

К основным производственным средствам относят средства труда, которые применяются в процессе производства на протяжении длительного периода, при этом не изменяют своей натурально-вещевой формы и переносят свою стоимость на стоимость изготовленной продукции по частям. При использовании основные средства подвергаются физическому износу. Появляется необходимость замены или восстановления изношенных конструктивных элементов в целях восстановления их потребительских стоимостей и поддержания в рабочем состоянии.

Ремонт — это комплекс работ по поддержанию основных средств в рабочем состоянии на протяжении всего срока службы. В зависимости от функции в восстановлении и обновлении все виды ремонта делятся на текущие и капитальные. Капитальный ремонт, в отличие от текущего, намного сложнее по объему выполняемых работ и требует значительных одноразовых расходов [1].

Возникает необходимость определения оптимального момента первого капитального ремонта от начала эксплуатации объекта основных средств. На решении этой задачи иллюстрируется подход к решению общей задачи о капитальном ремонте.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РЕМОНТА

Рассмотрим некоторый объект основных средств. В процессе его эксплуатации проводятся текущие ремонтные работы. Когда затраты на текущий ремонт становятся слишком большими, возникает необходимость проведения капитального ремонта. Задача состоит в определении момента первого капитального ремонта от начала эксплуатации.

Пусть $f(t)$ — функция суммарных затрат на текущий ремонт до момента времени t, а a — разовые расходы на капитальный ремонт. Зафиксируем момент времени T и количество капитальных ремонтов k, выполненных за этот период. Рассмотрим задачу нахождения такого разбиения отрезка $[0, T]$ точками t_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, которое минимизирует функцию затрат:

$$\min \sum_{i=1}^{k} f(t_i), \quad \sum_{i=1}^{k} t_i = T. \tag{1}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. Если функция f выпукла, то равномерное разбиение отрезка $[0, T]$ оптимально, т.е. решением задачи (1) являются точки

$$t_i^* = n\frac{T}{k}, \quad n = 1, 2, \ldots, k.$$

Доказательство.Обозначим $\vec{t}$ вектор $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Введем следующие функции:

$$f_0(\vec{t}) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i), \quad f_1(\vec{t}) = \sum_{i=1}^{k} t_i - T.$$

Задача (1) сводится к задаче

$$\min f_0(\vec{t}), \quad f_1(\vec{t}) = 0. \tag{2}$$

Функция Лагранжа для задачи (2) имеет вид

$$L = (\vec{t}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 f_0(\vec{t}) + \lambda_1 f_1(\vec{t}).$$

Применив теорему о необходимых условиях минимума [2] к задаче (2), получим, что должно выполняться $\dfrac{\partial L}{\partial t_i}(\vec{t}^{\,*}) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$, или

$$\lambda_0 \frac{\partial f(t_i)}{\partial t_i} + \lambda_1 = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$\lambda_0 \neq 0$, так как в противном случае было бы $\lambda_1 = 0$, поэтому

$$\frac{\partial f(t_i)}{\partial t_i} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Следовательно, все t_i равны между собой и $t_i = \dfrac{T}{k}$.

Из леммы следует, что время первого капитального ремонта для данного T и k составляет $x_T = \dfrac{T}{k}$, а следующие капитальные ремонты будут выполняться в моменты nx_T, $n = 2, 3, \ldots, k$. Поэтому для определения x_T следует рассмотреть задачу нахождения целого числа k_T, которое минимизирует функцию затрат за время T на текущий и капитальный ремонты

$$F\left(\frac{T}{k}\right) = kf\left(\frac{T}{k}\right) + (k-1)a,$$

и положить $x_T = \dfrac{T}{k_T}$.

Очевидно, что x_T существенно зависит от T. При этом, чем больше T, тем больше учитывается будущее и соответственно тем эффективнее решается задача. Поэтому в качестве оптимального времени первого капитального ремонта следует выбрать $x^* = \lim\limits_{T \to \infty} x_T$.

Предположение. Пусть функция $f(x)$ такова, что в некоторой окрестности точки x_* глобального минимума функция

$$g(x) = \frac{f(x) + a}{x}$$

монотонно не возрастает при $x \le x_*$ и монотонно не убывает при $x \ge x_*$.

Рассмотрим функцию

$$F\left(\frac{T}{k}\right) = kf\left(\frac{T}{k}\right) + (k-1)a = T\left(\frac{k}{T} f\left(\frac{T}{k}\right) + \frac{k}{T} a\right) - a.$$

Пусть x пробегает множество точек, принадлежащих разбиениям отрезка $[0, T]$: $x \in \Omega = \left\{\dfrac{T}{k},\ k = 1, 2, \ldots\right\}$, тогда $F(x) = Tg(x) - a$.

Ясно, что $\arg\min F(x) = \arg\min g(x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. При выполнении предположения точка $x^* = \lim\limits_{T \to \infty} x_T$ является точкой минимума функции $g(x)$ на $[0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $\bar{k}_T$ является тем k, при котором достигается минимум функции $g(x)$ на Ω для данного T, и точка x^* лежит между точками двух разбиений:

$$\bar{x}_T = -\frac{T}{\bar{k}_T} \le x^* \le \frac{T}{\bar{k}_T - 1} = x_T. \tag{3}$$

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует некоторое T такое, что для всех $T \ge T^*$ выполняется неравенство

$$|x_T - \bar{x}_T| \le \varepsilon. \tag{4}$$

Действительно, пусть $T^* = x^* \left(\dfrac{x^*}{\varepsilon} + 1 \right)$. Тогда если $T \ge T^*$, то

$$T \ge x^* \left(\frac{x^*}{\varepsilon} + 1 \right), \text{ или } \frac{T}{x^*} \ge \frac{x^*}{\varepsilon} + 1.$$

Из (3) следует, что $\bar{k}_T \ge \dfrac{T}{x^*}$, значит, $\bar{k}_T \ge \dfrac{x^*}{\varepsilon} + 1$, или $x^* \le \varepsilon(\bar{k}_T - 1)$. Из (3) также вытекает, что $\dfrac{T}{\bar{k}_T} \le \varepsilon(\bar{k}_T - 1)$, или $\dfrac{T}{\bar{k}_T - 1} - \dfrac{T}{\bar{k}_T} \le \varepsilon$, т.е. выполняется (4). В силу произвольности ε и свойств функции $g(x)$ получаем $\lim\limits_{T \to \infty} x_T = x^*$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построена математическая модель процесса ремонта объектов основных средств. С учетом некоторых предположений относительно стационарности процесса найден оптимальный момент первого капитального ремонта после начала эксплуатации.

Рассмотренный случай является стационарным, поскольку функция f и число a остаются неизменными после каждого последующего капитального ремонта. В общем случае необходимо рассмотреть функцию f, зависящую от двух переменных, $f = f(\tau, t)$, и расходы a, зависящие от одной переменной, $a = a(\tau)$; здесь t — время, τ — момент, в который происходит капитальный ремонт. Для решения нестационарной задачи предполагается использовать модели экономической динамики и методы их решения, разработанные в [2, 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шегда А.В. Економцка пцдпри•мства: Пцдручник. — К.: Знання, 2006. — 614 с.
2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
3. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума для дифференциальных включений // Кибернетика. — 1976. — № 6. — С. 60–73.

Поступила 03.12.2008