СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 519.6

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТЕЛА С ВКЛЮЧЕНИЕМ

Ключевые слова: *многокомпонентные тела, динамическое упругое деформирование, идентификация параметров*.

В работе [1] рассмотрены вопросы построения явных выражений градиентов функционалов-невязок в задачах идентификации градиентными методами [2] различных параметров гиперболических многокомпонентных систем.

С помощью предложенной технологии, основанной на теории оптимального управления [3–5], построения явных выражений градиентов функционалов-невязок получены достаточно хорошие численные приближения различных восстанавливаемых характеристик задач теплопроводности составных пластин [6, 7].

В данной статье построены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами различных параметров задач динамического упругого деформирования многокомпонентных тел.

1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

При решении практических задач анализа динамики напряженно-деформированного состояния упругих тел часто необходимо учитывать их начальное напряженно-деформированное состояние. Следуя [8], имеем $\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0$, где σ, ε — тензоры напряжений, деформаций; σ_0, ε_0 — начальные напряжения, деформации, которые часто сложно определить, D — матрица упругих постоянных.

Предположим, что на ограниченных связных строго липшицевых областях Ω_1, $\Omega_2 \in R^3$ определена система динамического упругого равновесия

$$\rho \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \tilde{f}_i(x,t), \ i = \overline{1,3}, \ t \in (0,T), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\sigma_{ki} = \sigma_{ik}(y) = \sum\limits_{l,m=1}^{3} c_{iklm}(\varepsilon_{lm} - \varepsilon_{lm}^0) + \sigma_{ik}^0$; $\sigma_{ik}, \varepsilon_{lm}$ $(\sigma_{ik}, \varepsilon_{lm}^0)$ — соответственно элементы тензоров напряжений и деформаций (тензоров напряжений и деформаций предварительного напряженно-деформированного состояния), $\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y_l}{\partial x_m} + \frac{\partial y_m}{\partial x_l}\right)$, $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$ — вектор смещений, $y_i(x)$ — его проекция на i-ю ось декартовой системы координат, $\tilde{f} = (\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \tilde{f}_3(x))$ — вектор массовых сил.

Коэффициенты упругости подчинены симметрии $c_{iklm} = c_{lmik} = c_{kilm}$ и удовлетворяют условию

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{lm} \geq \alpha_0 \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2, \ \alpha_0 = \text{const} > 0. \tag{1'}$$

На границе $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$ ($\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma$, $\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \neq \varnothing$) цилиндра $\Omega \cup \gamma_T$ заданы смещения

$$y = \varphi, \tag{2}$$

где $\Omega_T = \Omega \times (0,T), \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \gamma_T = \gamma \times (0,T)$.

На участке γ_T условия слабопрочного включения имеют вид [9]

$$\begin{gathered} [y_n] = 0, \\ [\sigma_n] = 0, \ [\tau_s] = 0, \ \tau_s^{\pm} = r[y_s] \end{gathered} \tag{3}$$

и отражают непрерывность нормальной составляющей y_n вектора смещений y, непрерывность нормальной σ_n и касательной τ_s составляющих вектора напряжений и пропорциональность касательных составляющих вектора напряжений скачку касательной y_s составляющей вектора смещений на γ при $t \in (0,T)$, где $r = \text{const} \geq 0$.

Здесь $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$ — скачок функции φ на разрезе γ при $t \in (0,T)$, $\varphi^+ = \{\varphi\}^+ = \varphi(x,t)$ при $(x,t) \in \gamma_T^+ = \gamma^+ \times (0,T)$, $\gamma^+ = \partial\Omega_2 \cap \gamma$, $\varphi^- = \{\varphi\}^- = \varphi(x,t)$ при $(x,t) \in \gamma_T^- = \gamma^- \times (0,T)$, $\gamma^- = \partial\Omega_1 \cap \gamma$.

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$\begin{gathered} y = y_0, \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = y_1, \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \end{gathered} \tag{4}$$

где $y_1 \in L_2(\Omega)$, $y_0 \in \overline{V}_0$; $\overline{V}_0 = \{v(x) : v\big|_{\Omega_i} \in (W_2^1(\Omega_i))^3, i = 1, 2\}$.

Предполагаем, что на N поверхностях $\gamma_i \in \Omega$ известны смещения, т.е. следы решения $y = y(x,t)$ задачи (1)–(4), заданные равенствами

$$y\big|_{\gamma_i} = f_i\big|_{\gamma_i}, \ t \in (0,T), \ i = \overline{1,N}. \tag{5}$$

Задача (1)–(5) состоит в нахождении вектор-функции $u = u(x) \in \mathcal{U} = ((\Omega_1) \times (\Omega_2))^6 \times ((\Omega_1) \times (\Omega_2))^6$, при которой решение $y = y(u) = y(u; x)$ начально-краевой задачи (1)–(4) удовлетворяет равенствам (5), где неизвестными считаем компоненты $\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{12}^0, \varepsilon_{13}^0, \varepsilon_{22}^0, \varepsilon_{23}^0, \varepsilon_{33}^0$ тензора деформаций ε_0 и компоненты σ_{11}^0, $\sigma_{12}^0, \sigma_{13}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{23}^0, \sigma_{33}^0$ тензора напряжений σ_0. Здесь $u = (u_1(x), u_2(x))$, $u_l^j = u_l\big|_{\overline{\Omega}_j}$, $u_l^j = \{u_{li}\}_{i=1}^6$, $l, j = 1, 2$.

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{1j}^0 = u_{1j}, \ \sigma_{1j}^0 = u_{2j}, \ j = \overline{1,3}; \ \varepsilon_{ii}^0 = u_{1,2i}, \ \sigma_{ii}^0 = u_{2,2i}, \ i = 2, 3; \\ \varepsilon_{23}^0 = u_{15}, \ \sigma_{23}^0 = u_{25}; \ \tilde{u}^l = \{\tilde{u}_{ij}^l\}_{i,j=1}^3, \ \tilde{u}_{ij}^l = \tilde{u}_{ji}^l, \ i, j = \overline{1,3}; \\ \tilde{u}_{1j}^l = u_{lj}, \ j = \overline{1,3}; \ \tilde{u}_{ii}^l = u_{l,2i}, \ i = 2, 3; \ \tilde{u}_{23}^l = u_{l5}, \ l = 1, 2; \\ \tilde{u}_{ij}^l = \{\tilde{u}_{ij}^{lm}\}_{m=1}^2, \ \tilde{u}_{ij}^{lm} = \tilde{u}_{ji}^l\big|_{\Omega_m}, \ m = 1, 2. \end{gathered} \tag{5'}$$

Задачу (1)–(5) будем решать приближенно. Для этого составим функционал-невязку с весовыми коэффициентами ρ_i:

$$J(u)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{T}\rho_i\,\|A_i u-f_i\|^2_{L_2(\gamma_i)}\,dt\,, \tag{6}$$

где $Au=\{A_i u\}_{i=1}^{N}$, $A_i u=y(u;x)\big|_{\gamma_{iT}}$, $\gamma_{iT}=\gamma_i\times(0,T)$, $i=\overline{1,N}$.

Вместо классического решения начально-краевой задачи (1)–(4) используем ее обобщенное решение.

Определение 1. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (1)–(4) называется функция $y=y(u)=y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождествам:

$$\left(\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},w\right)+a(y,w)=l(\tilde{u}(u);w),\ \ t\in(0,T), \tag{7}$$

$$y\big|_{t=0}=y_0(x),\ \ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=y_1(x),\ \ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2. \tag{9}$$

Здесь

$$W(0,T)=\left\{v\in L^2(0,T;V):\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\in L^2(0,T;L_2(\Omega))\right\},$$

$$\overline{V}=\{v(x,t):v\big|_{\Omega_i}\in(W_2^1(\Omega_i))^3,\ i=1,2,\ t\in(0,T)\},$$

$$V=\{v(x,t)\in\overline{V}:v\big|_{\Gamma_T}=\varphi,[v_n]\big|_{\gamma_T}=0\},\ \ V_0=\{v(x)\in\overline{V}_0:v\big|_{\Gamma}=0,[v_n]\big|_{\gamma}=0\},$$

$$\overline{V}_0=\{v(x):v\big|_{\Omega_i}\in(W_2^1(\Omega_i))^3,\ i=1,2\},$$

$W_2^1(\Omega_i)$ — пространство функций Соболева, распределенных на области Ω_i $i=1,2$;

$$a(y,w)=\int_{\Omega}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\,\varepsilon_{ik}(y)\varepsilon_{lm}(w)\,dx+\int_{\gamma}r[y_s][w_s]\,d\gamma\,,$$

$$l(\tilde{u};w)=(\tilde{f},w)+\int_{\Omega}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\,\tilde{u}^1_{ik}\varepsilon_{lm}(w)\,dx-\int_{\Omega}\sum_{i,k=1}^{3}\tilde{u}^2_{ik}\varepsilon_{ik}(w)\,dx\,.$$

Вместо задачи (1)–(5) будем рассматривать задачу (7)–(9), (6), состоящую в нахождении элемента $u\in\mathcal{U}$, при котором функционал (6) принимает минимальное значение на множестве $\mathcal{U}$ при выполнении ограничений (7)–(9).

Итерационная последовательность для нахождения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (7)–(9), (6) имеет вид

$$u_{n+1}=u_n-\beta_n p_n\,,\ \ n=0,1,\ldots,n^*\,, \tag{10}$$

и начинается с некоторого начального приближения $u_0\in\mathcal{U}$, где направление спуска p_n и коэффициент β_n, следуя [2], определяются такими выражениями:

- для метода минимальных ошибок

$$p_n=J'_{u_n},\ \ \beta_n=\frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}\,; \tag{11}$$

- для метода скорейшего спуска

$$p_n=J'_{u_n},\ \ \beta_n=\frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}\,; \tag{12}$$

• для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \ \gamma_0 = 0,$$

$$\gamma_n = \frac{\| J'_{u_n} \|^2}{\| J'_{u_{n-1}} \|^2}, \ \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\| A p_n \|^2}, \tag{13}$$

где $e_n = A u_n - \bar{f}$, $\bar{f} = \{ f_i \}_{i=1}^N$, $\| e_n \|^2 = \int\limits_0^T \sum\limits_{i=1}^N \| A_i u_n - f_i \|^2_{L_2(\gamma_i)} dt$, J'_{u_n} — градиент функционала (6) при $u = u_n$.

Для допустимого приращения Δu элемента $u \in \mathcal{U}$ приращение $\theta = \Delta y$ решения $y(u)$ на основании (7)–(9) можем определить как решение задачи: найти функцию $\theta = \theta(x, t) \in W_0(0, T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, w \right) + a(\theta, w) = l_\theta (\Delta \widetilde{u}; w), \tag{14}$$

$$\theta \big|_{\mathrm{t}=0} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{t}} \bigg|_{\mathrm{t}=0} = 0, \ \mathrm{x} \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \tag{15}$$

где

$$W_0(0, T) = \left\{ v(x, t) \in L^2(0, T; V^0): \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L^2(0, T; L_2(\Omega)) \right\},$$

$$V^0 = \{ v(x, t) \in \overline{V}: v \big|_{\Gamma_T} = 0, [v_n] \big|_{\gamma_T} = 0 \},$$

$$l_\theta (\Delta \widetilde{u}; \ w) = \int\limits_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm} \Delta \widetilde{u}^1_{ik} \varepsilon_{lm}(w) dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^3 \Delta \widetilde{u}^2_{ik} \varepsilon_{ik}(w) dx. \tag{15'}$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (7)–(9), (6) введем в рассмотрение следующую сопряженную начально-краевую задачу:

$$\begin{gathered}
\rho \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \ i = \overline{1, 3}; \ (x, t) \in \Omega_{d_T}, \\
\psi \big|_{\Gamma_T} = 0, \\
[\psi_n] \big|_{\gamma_T} = 0, \ [\sigma_n(\psi)] \big|_{\gamma_T} = 0, \ [\tau_s(\psi)] \big|_{\gamma_T} = 0, \ \tau_s^{\pm}(\psi) \big|_{\gamma_T} = r[\psi(s)] \big|_{\gamma_T}, \\
[\psi] \big|_{\gamma_{iT}} = 0, \ [\sigma_n(\psi)] \big|_{\gamma_{iT}} = -\rho_i (y_n(u_n) - f_{in}) \big|_{\gamma_{iT}}, \\
[\tau_s(\psi)] \big|_{\gamma_{iT}} = -\rho_i (y_s(u_n) - f_{is}) \big|_{\gamma_{iT}}, \ i = \overline{1, N}, \\
\psi \big|_{t=T} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \bigg|_{t=T} = 0, \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2,
\end{gathered} \tag{16}$$

где $\Omega_{d_T} = \Omega \setminus \gamma_{d_T}$, $\gamma_{d_T} = \bigcup\limits_{i=1}^N \gamma_{iT}$, $\gamma_{iT} = \gamma_i \times (0, T)$, $\sigma_{ik}(\psi) = \sum\limits_{l,m=1}^3 c_{iklm} \varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 2. Обобщенным решением начально-краевой задачи (16) называется функция $\psi = \psi(x, t) \in W_d(0, T)$, которая $\forall w(x) \in V_{d_0}$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, w \right) + a(\psi, w) = l_\psi (y(u_n); w), \ t \in (0, T), \tag{17}$$

$$\psi \big|_{t=T} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \bigg|_{t=T} = 0, \ x \in \overline{\Omega}, \tag{18}$$

где

$$W_d(0, T) = \left\{ v(x, t) \in L^2(0, T; V_d): \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L^2(0, T; L_2(\Omega)) \right\},$$

$$V_d=\{v(x,t)\in\overline{V}_d : v\big|_{\Gamma_T}=0, [v_n]\big|_{\gamma_T}=0, [v]\big|_{\gamma_{iT}}=0,\ i=\overline{1,N}\},$$

$$\overline{V}_d=\{v(x,t): v\big|_{\Omega_j}\in (W_2^1(\Omega_j))^3,\ j=\overline{0,N+1},\ t\in(0,T)\},$$

$$V_{d_0}=\{v(x): v\big|_{\Omega_j}\in (W_2^1(\Omega_j))^3,\ j=\overline{0,N+1}, v\big|_{\Gamma}=0, [v_n]\big|_{\gamma}=0, [v]\big|_{\gamma_i}=0,\ i=\overline{1,N}\},$$

$$\Omega_d=\bigcup_{i=0}^{N+1}\Omega_i$$

$$l_\psi(y(u_n);w)=\sum_{i=1}^{N}\rho_i(y(u_n)-f_i,w)_{L_2(\gamma_i)}. \qquad (19)$$

Введем в рассмотрение обозначения

$$\pi(u,v)=(\overline{Y}(u)-Y(0),\overline{Y}(v)-\overline{Y}(0))_\rho,$$
$$L(v)=(\bar{f}-\overline{Y}(0),\overline{Y}(v)-\overline{Y}(0))_\rho, \qquad (20)$$

где $\overline{Y}(v)=Av$, $\overline{Y}(0)=A0$, $(\overline{\varphi},\overline{\psi})_\rho=\int_0^T\rho_i(\varphi_i,\psi_i)_{L_2(\gamma_i)}dt$, $\overline{\varphi}=\{\varphi_i\}_{i=1}^N$, $\psi=\{\psi_i\}_{i=1}^N$, $\varphi_i=\varphi_i(x,t)$, $(x,t)\in\gamma_{iT}$.

Пусть $u,v\in\mathcal{U}$. При $\lambda\in(0,1)$ $z=u+\lambda(v-u)\in\mathcal{U}$. Имеет место выражение

$$\lim_{\lambda\to 0+}\frac{J(u+\lambda(v-u))-J(u)}{\lambda}=\pi(u,v-u)-L(v-u)=J'(u;v-u)=\langle J'_u, v-u\rangle. \qquad (21)$$

Выберем в качестве функции w тождества (17) разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$. С учетом (14), (15) получим

$$\int_0^T\sum_{i=1}^N\rho_i(y(u_n)-f_i, y(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_i)}dt=\int_0^T\left(\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, y(u_{n+1})-y(u_n)\right)dt+$$

$$+\int_0^T a(\psi, y(u_{n+1})-y(u_n))dt=\int_0^T l_\theta(\Delta\widetilde{u}_n;\psi)dt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm}\Delta\widetilde{u}_{ik}^1\varepsilon_{lm}(\psi)dx\,dt-\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,k=1}^3\Delta\widetilde{u}_{ik}^2\varepsilon_{ik}(\psi)dx\,dt, \qquad (22)$$

где $\theta=y(u_{n+1})-y(u_n)$.

Поскольку

$$\pi(u_n,u_{n+1}-u_n)-L(u_{n+1}-u_n)=(\overline{Y}(u_n)-\bar{f},\overline{Y}(u_{n+1})-\overline{Y}(u_n))_\rho, \qquad (23)$$

то с учетом (21), (22) имеем

$$\langle J'_{u_n},\Delta\widetilde{u}_n\rangle=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm}\Delta\widetilde{u}_{ik}^1\varepsilon_{lm}(\psi)dx\,dt-\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,k=1}^3\Delta\widetilde{u}_{ik}^2\varepsilon_{ik}(\psi)dx\,dt. \qquad (24)$$

Равенство (24) позволяет получить явные выражения градиента J'_{u_n} функционала (6) при $u=u_n$ для различных предположений относительно напряженно-деформированного состояния σ^0, ε^0.

Имеем

$$J'_{u_n}=\widetilde{\psi}, \qquad (25)$$

где $\widetilde{\psi}=\{\widetilde{\psi}_l\}_{l=1}^2$, $\widetilde{\psi}_l=\{\widetilde{\psi}_l^j\}_{j=1}^2$, $\widetilde{\psi}_l^j=\{\widetilde{\psi}_{li}^j\}_{i=1}^6$.

В общем случае на основании (24) с учетом симметрии $\widetilde{u}_{ij}^{l}=\widetilde{u}_{ji}^{l}$ имеем:

$$\widetilde{\psi}_{1,2\mathrm{i}-\chi(2-\mathrm{i})}^{\mathrm{j}}=\int_0^{\mathrm{T}}\sum_{\mathrm{l,m}=1}^{3}\mathrm{c}_{\mathrm{iilm}}\varepsilon_{\mathrm{lm}}(\psi)\big|_{\Omega_{\mathrm{j}}}\mathrm{dt},\ \mathrm{i}=\overline{1,3};$$

$$\widetilde{\psi}_{1k}^{j}=2\sum_{l,m=1}^{3}\int_0^{T}c_{1klm}\varepsilon_{lm}(\psi)\big|_{\Omega_j}dt,\ k=2,3;$$

$$\widetilde{\psi}_{15}^{j}=2\int_0^{T}\sum_{l,m=1}^{3}c_{23lm}\varepsilon_{lm}(\psi)\big|_{\Omega_j}dt;\ \widetilde{\psi}_{2,2i-\chi(2-i)}^{j}=-\int_0^{T}\varepsilon_{ii}(\psi)\big|_{\Omega_j}dt,\ i=\overline{1,3};\quad(26)$$

$$\widetilde{\psi}_{2k}^{j}=-2\int_0^{T}\varepsilon_{1k}(\psi)\big|_{\Omega_j}dt,\ k=2,3;\quad \widetilde{\psi}_{25}^{j}=-2\int_0^{T}\varepsilon_{23}(\psi)\big|_{\Omega_j}dt,$$

$$\|J_{u_n}'^{2}\|=\sum_{j,l=1}^{2}\sum_{k=1}^{6}\int_{\Omega_j}(\widetilde{\psi}_{lk}^{j})^2\,dx.$$

Здесь $\chi(k)=1$ при $k>0$, $\chi(k)=0$ при $k\le 0$.

Если материал составляющих Ω_1, Ω_2 тела Ω изотропный, то, следуя [10], можно предположить $\varepsilon_{lm}^{0}=\alpha T\delta_{lm}$, где α — коэффициент теплового расширения, δ_{lm} — символ Кронекера, $T=\overline{T}-\overline{T}_0$ — изменение температуры $\overline{T}$ точки $x\in\Omega$ от начального состояния $\overline{T}_0$.

С учетом предположения изотропии, на основании (5′) можем записать $\varepsilon_{11}^{0}=\varepsilon_{22}^{0}=\varepsilon_{33}^{0}=\alpha T=u_1=\widetilde{u}_{ii}^{1}$, $i=\overline{1,3}$; $\widetilde{u}_{ij}^{1}=0$ при $i\ne j$; $i,j=\overline{1,3}$, где $\alpha\big|_{\Omega_j}=\alpha^{j}$, $j=1,2$.

В этом случае $\widetilde{\psi}=\{\widetilde{\psi}_l\}_{l=1}^{2}$, $\widetilde{\psi}_l=\{\widetilde{\psi}_l^{j}\}_{j=1}^{2}$, $\widetilde{\psi}_2=\{\widetilde{\psi}_2^{j}\}_{j=1}^{2}$, $\widetilde{\psi}_2^{j}=\{\widetilde{\psi}_{2i}^{j}\}_{i=1}^{6}$, $\widetilde{\psi}_1^{j}=$ $=\int_0^{T}\sum_{i=1}^{3}\sum_{l,m=1}^{3}c_{iilm}\varepsilon_{lm}(\psi)\big|_{\Omega_j}dt$.

Составляющие $\widetilde{\psi}_{2i}^{j}$ определяются соответствующими выражениями (26) и

$$\|J_{u_n}'\|^2=\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_j}\left\{(\widetilde{\psi}_1^{j})^2+\sum_{i=1}^{6}(\widetilde{\psi}_{2i}^{j})\right\}^2dx.$$

Если изменение температуры T по областям Ω_1, Ω_2 известно, то на основании (24) имеем $\widetilde{\psi}_1^{j}=\int_0^{T}\int_{\Omega_j}\sum_{i=1}^{3}\sum_{l,m=1}^{3}Tc_{iilm}\varepsilon_{lm}(\psi)\,dx\,dt$. Составляющие $\widetilde{\psi}_{2i}^{j}$ определяются соответствующими выражениями (26) и $\|J_{u_n}'\|^2=\sum_{j=1}^{2}\left((\widetilde{\psi}_1^{j})^2+\sum_{i=1}^{6}\int_{\Omega_j}(\widetilde{\psi}_{2i}^{j})^2dx\right).$

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (10), (11) при определении $(n+1)$-го приближения u_n решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (7)–(9), (6) направление спуска p_n и коэффициента β_n можем определить с помощью выражений (11), где

$$e_n=\{(y(u_n)-f_i)\big|_{\gamma_{iT}}\}_{i=1}^{N},\ \|e_n\|^2=\int_0^{T}\sum_{i=1}^{N}\|y(u_n)-f_i)\|_{L_2(\gamma_i)}^2\,dt.$$

Решив задачу определения функции $z(\widetilde{\psi};x,t)\in W(0,T)$, удовлетворяющей $\forall w\in V_0$ равенствам

$$\left(\rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},w\right)+a(z,w)=l(\widetilde{u}(J_{u_n}');w),\ t\in(0,T),\quad(27)$$

$$z\Big|_{t=0}=y_0\,,\ \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0}=y_1\,,\ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2\,, \tag{28}$$

находим

$$\mathrm{A}\mathrm{J}'_{\mathrm{u_n}}=\mathrm{z_i}\,(\mathrm{J}'_{\mathrm{u_n}})_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\,, \tag{29}$$

где $z_i\,(J'_{u_n})=z(\widetilde{\psi};x)\big|_{\gamma_{iT}}$, $i=\overline{1,N}$; $\|AJ'_{u_n}\|^2=\sum\limits_{i=1}^{N}\int\limits_0^T\|z_i\,(J'_{u_n})\|^2_{L_2(\gamma_i)}dt$.

Учитывая (29), можно реализовать метод скорейшего спуска (10), (12) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (7)–(9), (6).

На основании решения $z\in W(0,T)$ задачи вида (27), (28), где вместо J'_{u_n} использована функция p_n, определенная с помощью первого выражения системы (13), получим вектор Ap_n. Это позволит реализовать метод сопряженных градиентов (10), (13) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (7)–(9), (6).

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

На основании (24) можно получить явное выражение градиента J'_{u_n} для случая, когда все или часть восстанавливаемых неизвестных ε^0_{ij}, σ^0_{ij} представляются в виде линейной комбинации соответствующих систем линейно независимых функций.

Пусть

$$u^k_{li}=\sum_{j=1}^{m^k_{li}}\alpha^{kj}_{li}\varphi^{kj}_{li}(x),\ \ l,k=1,2;\ \ i=\overline{1,6}, \tag{30}$$

где $\alpha^{kj}_{li}\in R, R$ — множество вещественных чисел, $\{\varphi^{kj}_{li}\}^{m^k_{li}}_{j=1}$ — система линейно независимых функций.

На основании (24) с учетом (5′) имеем

$$J'_{u_n}=\widetilde{\psi}\,, \tag{31}$$

где:

$$\widetilde{\psi}=\{\psi^k_{li}\}^{6,2,2}_{i=1,l=1,k=1},\ \ \widetilde{\psi}^k_{li}=\{\widetilde{\psi}^{kj}_{li}\}^{m^k_{li}}_{j=1},$$

$$\widetilde{\psi}^{kj}_{1,2i-\chi(2-i)}=\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_k}\sum_{l,m=1}^{3}c_{iilm}\varphi^{kj}_{1,2i-\chi(2-i)}\varepsilon_{lm}(\psi)\,dx\,dt\,,\ \ j=\overline{1,m^k_{1,2i-\chi(2-i)}}\,,\ \ i=\overline{1,3};$$

$$\widetilde{\psi}^{kj}_{1i}=2\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_k}\sum_{l,m=1}^{3}c_{1ilm}\varphi^{kj}_{1i}\varepsilon_{lm}(\psi)\,dx\,dt,\ \ j=\overline{1,m^k_{1i}},\ \ i=2,3;$$

$$\widetilde{\psi}^{kj}_{15}=2\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_k}\sum_{l,m=1}^{3}c_{23lm}\varphi^{kj}_{15}\varepsilon_{lm}(\psi)\,dx\,dt\,,\ \ j=\overline{1,m^k_{15}}\,;$$

$$\widetilde{\psi}^{kj}_{2,2i-\chi(2-i)}=-\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_k}\varphi^{kj}_{2,2i-\chi(2-i)}\varepsilon_{ii}(\psi)\,dx\,dt\,,$$

$$i=\overline{1,3},\ \ j=\overline{1,m^k_{2,2i-\chi(2-i)}};\ \ \widetilde{\psi}^{kj}_{2i}=-2\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_k}\varphi^{kj}_{2i}\varepsilon_{1i}(\psi)\,dx\,dt,\ \ j=\overline{1,m^k_{2i}},\ \ i=2,3;$$

$$\widetilde{\psi}^{kj}_{25}=-2\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_k}\varphi^{kj}_{2i}\varepsilon_{23}(\psi)\,dx\,dt\,,\ \ j=\overline{1,m^k_{2j}};\ \ \|J'_{u_n}\|^2=\sum_{l,k=1}^{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{m^k_{li}}(\widetilde{\psi}^{kj}_{li})^2.$$

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ НА СДВИГ СЛАБОПРОЧНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Пусть на областях Ω_{1T}, Ω_{2T} определена система уравнений упругого равновесия (1). На границе Γ_T заданы смещения (2). На разрезе γ_T условия сопряжения имеют вид

$$\begin{gathered}[y_n]=0,\\ [\sigma_n]=0,\ [\tau_s]=0,\ \tau_s^{\pm}=u[y_s].\end{gathered} \tag{32}$$

При $t=0$ заданы начальные условия (4).

Предполагаем, что на N поверхностях $\gamma_i \in \Omega$ известны смещения, т.е. следы решения $y=y(x,t)$ начально-краевой задачи (1), (2), (4), (32), заданные равенствами (5).

Задача (1), (2), (4), (5), (32) состоит в нахождении функции $u=u(x,t)\in\mathcal{U}= =C_+(\gamma_T)$, при которой решение $y=y(u)=y(u;x,t)$ задачи (1), (2), (4), (32) удовлетворяет равенствам (5), где $C_+(\gamma_T)=\{v(x,t)\in C(\gamma_T): v>0\}$.

Вместо классического решения начально-краевой задачи (1), (2), (4), (32) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 3. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (1), (2), (4), (32) называется функция $y=y(u)= =y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w\right)+a(u;\, y, w)=l(w),\ t\in(0,T), \tag{33}$$

$$y\big|_{t=0}=y_0(x),\ \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\ x\in\Omega_1\cup\Omega_2, \tag{34}$$

где множества $W(0,T), V_0$ определены в разд. 1,

$$a(u;\, y, w)=\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\varepsilon_{ik}(y)\varepsilon_{lm}(w)dx+\int_\gamma u[y_s][w_s]d\gamma,$$

$$l(w)=(\widetilde{f}, w)+\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\varepsilon_{ik}^0\varepsilon_{lm}(w)dx-\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3}\sigma_{ik}^0\varepsilon_{ik}(w)dx.$$

Следуя [3], легко показать, что при любом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ решение $y=y(u)\in W(0,T)$ задачи (33), (34) существует и единственно.

Приращение $\theta=\Delta y$ решения $y=y(u)$, соответствующее приращению Δu, определим как решение задачи: найти функцию $\theta\in W_0(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}, w\right)+a(u;\theta, w)=l_\theta(\Delta u; w),\ t\in(0,T), \tag{35}$$

$$\theta\big|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\ x\in\overline{\Omega}, \tag{36}$$

где $l_\theta(\Delta u; w)=-\int_\gamma \Delta u[y_s(u)][w_s]d\gamma$.

Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (33), (34), (6) сопряженная начально-краевая задача имеет вид (16), где вместо r используем функцию $u=u_n\in\mathcal{U}$. Соответствующая ей обобщенная задача состоит в нахождении функции $\psi=\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, w\right)+a(u_n;\psi, w)=l_\psi(y(u_n); w),\ t\in(0,T), \tag{37}$$

$$\psi\big|_{t=T} = \frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg| = 0,\ x \in \overline{\Omega}, \tag{38}$$

где множества $W_d(0,T), V_{d_0}$ определены в разд. 1, форма $l_\psi(y(u_n); w)$ имеет вид (19).

Введем в рассмотрение обозначения

$$\begin{gathered} \pi(u,v) = (\overline{Y}(u) - \overline{Y}(u_n), \overline{\overline{Y}}(v) - \overline{Y}(u_n))_\rho, \\ L(v) = (\bar{f} - \overline{Y}(u_n), \overline{\overline{Y}}(v) - \overline{Y}(u_n))_\rho, \end{gathered} \tag{39}$$

где $\overline{\overline{Y}}(u_{n+1}) = \{\widetilde{y}(u_{n+1})\big|_{\gamma_i}\}_{i=1}^N$.

Здесь единственная функция $\widetilde{y} = \widetilde{y}(u_{n+1}) \in W(0,T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho\frac{\partial^2\widetilde{y}}{\partial t^2}, w\right) + a(u_n;\ \widetilde{y}, w) = l(w) - \int_\gamma \Delta u_n[y(u_n)][w]d\gamma,\ t \in (0,T), \tag{40}$$

$$\widetilde{y}\big|_{t=0} = y_0(x),\ \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = y_1(x),\ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{41}$$

При $u_n + \Delta u_n \in \mathcal{U}$ $\forall\lambda \in (0,1)$ $u_n + \lambda\Delta u_n \in \mathcal{U}$. На основании (40), (41) $\forall\lambda \in (0,1)$ имеем

$$\left(\rho\frac{\partial^2(y(u_n) + \Delta_\lambda y)}{\partial t^2}, w\right) + a(u_n;\ y(u_n) + \Delta_\lambda y, w) =$$

$$= l(w) - \int_\gamma \lambda\Delta u_n[y(u_n)][w]d\gamma,\ t \in (0,T), \tag{42}$$

$$(y(u_n) + \Delta_\lambda y)\big|_{t=0} = y_0(x),\ \frac{\partial(y(u_n) + \Delta_\lambda y)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = y_1(x),\ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{43}$$

Легко видеть, что $\Delta_\lambda y = \lambda y_0(\Delta u_n)$, где $y_0(\Delta u_n) = \theta$ — единственное решение задачи (35), (36) при $u = u_n$. С учетом (42), (43) и обозначений (39) имеем

$$\lim_{\lambda\to 0+} \frac{J(u_n + \lambda(u_{n+1} - u)) - J(u_n)}{\lambda} =$$

$$= \langle J'_{u_n}, \Delta u_n\rangle \approx \pi(u_n, \Delta u_n) - L(\Delta u_n). \tag{44}$$

С учетом (39) на основании (44) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n\rangle \approx (\overline{Y}(u_n) - \bar{f}, \overline{\overline{Y}}(u_{n+1}) - \overline{Y}(u_n))_\rho. \tag{45}$$

Выберем в качестве функции w тождества (37) разность $\widetilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)$. С учетом (33), (34), (40), (41), имеем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n\rangle \approx \int_0^T l_\theta(\Delta u_n; \psi)\,dt. \tag{46}$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n, \tag{47}$$

где $\widetilde{\psi}_n = -[y_s(u_n)][\psi_s]\big|_{\gamma_T}$, $\|J'_{u_n}\|^2 \approx \int_0^T\int_\gamma \widetilde{\psi}_n^2\,d\gamma\,dt$.

Замечание 1. Если $\mathcal{U}=0\cup R_+$, $R_+=(0,+\infty)$, то $\widetilde{\psi}_n=-\int\limits_0^T\int\limits_\gamma [y_s(u_n)][\psi_s]d\gamma\, dt$, $\|J'_{u_n}\|^2\approx\widetilde{\psi}_n^2$. Если $\mathcal{U}=C_+=([0,T))$, то $\widetilde{\psi}_n=-\int\limits_\gamma [y_s(u_n)][\psi_s]d\gamma$, $\|J'_{u_n}\|^2\approx\int\limits_0^T\widetilde{\psi}_n^2 dt$. Если $\mathcal{U}=C_+(\gamma)$, то $\widetilde{\psi}_n=-\int\limits_0^T [y_s(u_n)][\psi_s]dt$, $\|J'_{u_n}\|^2\approx\int\limits_\gamma\widetilde{\psi}_n^2\, d\gamma$.

4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ НА СДВИГ СЛАБОПРОЧНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

На основании (46) можно получить явные выражения градиента J'_{u_n} для случая, когда искомый параметр u ищется в виде

$$u=\sum_{i=1}^m \alpha_i\varphi_i(x,t)\ge 0,\ (x,t)\in\gamma_T,\ \alpha_i\in 0\cup R_+,\ i=\overline{1,m},\ \mathcal{U}=0^m\cup R_+^m, \tag{48}$$

где $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых функций.

На основании (46) с учетом (48) получаем

$$J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n, \tag{49}$$

где $\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_{ni}\}_{i=1}^m, \widetilde{\psi}_{ni}=-\int\limits_0^T\int\limits_\gamma \varphi_i[y_s(u_n)][\psi_s]d\gamma\, dt, \|J'_{u_n}\|^2\approx\sum_{i=1}^m\widetilde{\psi}_{ni}^2$.

Замечание 2. Если $\mathcal{U}=(C_+([0,T]))^m$, $\varphi_i=\varphi_i(x)$, то $u=\sum_{i=1}^m\alpha_i(t)\varphi_i(x)$ и $\widetilde{\psi}_{ni}=$ $=\int\limits_\gamma\varphi_i[y_s(u_n)][\psi_s]d\gamma$, $\|J'_{u_n}\|^2\approx\int\limits_0^T\sum_{i=1}^m\widetilde{\psi}_{ni}^2\, dt$.

5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ

Пусть области Ω_1,Ω_2 изотропные. Тогда [11]

$$a_{ijlm}=\lambda\delta_{ij}\delta_{lm}+\mu(\delta_{il}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jl}),$$

$$\sigma_{ij}(y)=\sigma_{ji}(y)=\lambda\left(\sum_{k=1}^3\varepsilon_{kk}(y)\right)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(y),\ i,j=\overline{1,3}, \tag{50}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $\lambda,\mu=\text{const}>0$ — упругие постоянные (постоянные Ляме).

На каждой из областей Ω_i, $i=1,2$, определена система уравнений динамического упругого равновесия (1), где компоненты σ_{ij} тензора напряжений имеют вид (50). На границе Γ_T заданы смещения (2). Условия сопряжения на участке γ_T имеют вид (3). При $t=0$ заданы начальные условия (4). Предполагаем, что на N поверхностях $\gamma_i\in\Omega$ известны смещения, заданные равенствами (5).

Обозначим $u_1=\lambda$, $u_2=\mu$. Получена задача вида (1)–(5), состоящая в нахождении вектора $u=(u_1,u_2)\in\mathcal{U}=R_+^2\times R_+^2$, при котором решение $y=y(u;x,t)$ задачи (1)–(4) удовлетворяет равенствам (5).

Здесь $u_l=(u_l^1,u_l^2)$, $u_l^i=u_l\big|_{\Omega_i}$, $l,i=1,2$. Функционал-невязка имеет вид (6).

Вместо классического решения рассматриваемой начально-краевой задачи вида (1)–(4) используем ее обобщенное решение.

Определение 4. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи вида (1)–(4) называется функция $y=y(u)=$ $=y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w\right)+a(u;\, y, w)=l(w),\ \ t\in(0,T), \tag{51}$$

$$y\big|_{t=0}=y_0,\ \frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{t=0}=y_1,\ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{52}$$

где множества $W(0,T), V_0$ определены в разд. 1,

$$a(u;\, y, w)=\int_\Omega\left\{u_1\operatorname{div} y\operatorname{div} w+2u_2\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(y)\varepsilon_{ij}(w)\right\}dx\ +$$

$$+\int_\gamma r[y_s][w_s]d\gamma,\ \ l(w)=(\widetilde{f}, w).$$

Для каждого приближения $u_n\in\mathcal{U}$ решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (51), (52), (6) сопряженная начально-краевая задача имеет вид (16).

Соответствующая ей обобщенная задача состоит в нахождении функции $\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет тождествам

$$\left(\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, w\right)+a(u_n;\,\psi, w)=l_\psi(y(u_n);\, w),\ \ t\in(0,T), \tag{53}$$

$$\psi\big|_{t=T}=\frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{t=T}=0,\ x\in\overline{\Omega}, \tag{54}$$

где форма $l_\psi(y(u_n);\, w)$ имеет вид (19), множества $W_d(0,T), V_{d_0}$ определены в разд. 1,

$$a(u_n;\,\psi, w)=\int_\Omega\left\{u_1\operatorname{div}\psi\operatorname{div} w+2u_2\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(w)\right\}dx+\int_\gamma r[\psi_s][w_s]d\gamma.$$

Справедливы выражения вида (35), (36), где

$$l_\theta(\Delta u_n;\, w)=-\int_\Omega\left\{\Delta u_1\operatorname{div} y(u_n)\operatorname{div} w+2\Delta u_2\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(y(u_n))\varepsilon_{ij}(w)\right\}dx. \tag{55}$$

Следовательно,

$$J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n, \tag{56}$$

где $\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_{nl}\}_{l=1}^2$, $\widetilde{\psi}_{nl}=\{\widetilde{\psi}_{nl}^i\}_{i=1}^2$, $l=1,2$, $\widetilde{\psi}_{n1}^l=-\int_0^T\int_{\Omega_l}\operatorname{div} y(u_n)\operatorname{div}\psi\, dx\,dt$, $\widetilde{\psi}_{n2}^l=$ $=-2\int_0^T\int_{\Omega_l}\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(y(u_n))\varepsilon_{ij}(\psi)\,dx\,dt$, $l=1,2$; $\|J'_{u_n}\|^2\approx\sum_{l,i=1}^{2}(\widetilde{\psi}_{nl}^i)^2$.

Замечание 3. Если приращение $\theta=\Delta y$ решения $y=y(u)$, соответствующее приращению Δu определим на основании рассматриваемой начально-краевой задачи вида (1)–(4) состояния тела, то

$$l_\theta(\Delta u_n;\, w)=\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Delta u_1\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{ll}(y(u_n))\delta_{ik}+2\Delta u_2\varepsilon_{ik}(y(u_n))\right)\right\}w_i\,dx. \tag{56′}$$

Следовательно, для определения составляющих $\widetilde{\psi}_{nl}^i$ вектора $\widetilde{\psi}_n$ (56) имеем

$$\widetilde{\psi}_{n1}^j=\int_0^T\int_{\Omega_j}\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{ll}(y(u_n))\right)\right\}\delta_{ik}\psi_i\,dx\,dt,$$

$$\widetilde{\psi}_{n2}^j=2\int_0^T\int_{\Omega_l}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\varepsilon_{ik}(y(u_n))}{\partial x_k}\psi_i\,dx\,dt,\ \ j=1,2.$$

Замечание 4. В силу взаимно однозначной зависимости между коэффициентами Ляме λ, μ и упругими постоянными E, ν (E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $\lambda = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$, $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$), на основании (55) или (56′) легко можем получить приближение $\widetilde{\psi}_n$ градиента J'_{u_n} (56) для идентификации одного из неизвестных параметров E или ν на областях Ω_1, Ω_2, одной из них или разных параметров E, ν на разных областях Ω_1, Ω_2.

6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАССОВЫХ СИЛ

Предположим, что на ограниченных связных строго липшицевых областях Ω_1, Ω_2 определена система уравнений упругого равновесия

$$\rho \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + u_i(x,t), \ i = \overline{1,3}, \ t \in (0,T), \tag{57}$$

где

$$\sigma_{ik} = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}, \ u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{U} = (L^2(0,T; L_2(\Omega)))^3. \tag{57′}$$

На границе Γ_T заданы краевые условия (2). Условия сопряжения на γ_T имеют вид (3), а при $t=0$ заданы начальные условия (4). Предполагаем, что на N поверхностях $\gamma_i \in \Omega$ известны смещения, определенные равенствами (5).

При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения $y = y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (57), (2)–(4) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 5. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (57), (2)–(4) называется функция $y = y(u; x, t) \in W(0,T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w \right) + a(y, w) = l(u; w), \ t \in (0,T), \tag{58}$$

$$y\big|_{t=0} = y_0, \ \frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{t=0} = y_1, \ x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{59}$$

где множества $W(0,T), V_0$ определены в разд. 1,

$$a(y, w) = \int_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(y) \varepsilon_{ik}(w) dx + \int_{\gamma} r[y_s][w_s] d\gamma. \tag{60}$$

Полученную задачу (58), (59), (6), состоящую в нахождении вектор-функции u, минимизирующей на $\mathcal{U}$ функционал (6), при ограничениях (58), (59), будем решать с помощью итерационного процесса (10).

На каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ введем в рассмотрение сопряженную начально-краевую задачу вида (16), где $\sigma_{ik}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(\psi)$. Соответствующая ей обобщенная задача имеет вид (17), (18).

Выбирая в качестве функции w тождества (17) разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (58), (59), (18) получаем

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N} \rho_i (y(u_n) - f_i, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_i)} dt =$$

$$= \int_0^T \left(\rho \frac{\partial^2 (y(u_{n+1}) - y(u_n))}{\partial t^2}, \psi \right) dt + a(y(u_{n+1}) - y(u_n), \psi) = \int_0^T (\Delta u_n, \psi) dt.$$

На основании этого равенства имеем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = \int\limits_0^T (\psi, \Delta u_n)dt\,. \qquad (60')$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}\,, \qquad (61)$$

где $\widetilde{\psi} = \psi\,|_{\Omega_T}$.

Наличие градиента J'_{u_n} позволяет реализовать итерационный процесс (10) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$.

7. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАССОВЫХ СИЛ

На основании равенства (60′) можно получить явные выражения градиента J'_{u_n} для случая, когда все или часть составляющих вектора массовых сил $u = \{u_i(x,t)\}_{i=1}^3$ представляются в виде линейной комбинации соответствующих систем линейно независимых функций.

Пусть

$$u_i(x,t) = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(x,t),\ i = \overline{1,3},\ (x,t) \in \Omega_T\,, \qquad (62)$$

где $\alpha_{ij} \in R$, $\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$ — система линейно независимых функций.

На основании (60′) получаем

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}\,, \qquad (63)$$

где $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_i\}_{i=1}^3$, $\widetilde{\psi}_i = \{\widetilde{\psi}_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$, $\widetilde{\psi}_{ij} = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \varphi_{ij}\psi_i\,dx\,dt$, $||J'_{u_n}||^2 = \sum\limits_{i=1}^3 \sum\limits_{j=1}^{m_i} (\widetilde{\psi}_{ij})^2$.

Замечание 5. Если $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(x), \alpha_{ij} = \alpha_{ij}(t)$ — восстанавливаемые параметры, то $\widetilde{\psi}_{ij} = \int\limits_\Omega \varphi_{ij}(x)\psi_i(x,t)dx$, $||J'_{u_n}||^2 = \sum\limits_{i=1}^3 \sum\limits_{j=1}^{m_i} \int\limits_0^T \widetilde{\psi}_{ij}^2\,dt$.

Замечание 6. Если составляющая u_i вектора массовых сил неизвестна лишь на области Ω_l, $l \in \{1,2\}$, а остальные составляющие u_k известны, то имеем $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}$, где $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_j\}_{j=1}^{m_i}$, $\widetilde{\psi}_j = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_l} \varphi_{ij}(x,t)\psi_i\,dx\,dt$, где $k \in \{\overline{1,3}\} \setminus i$.

Аналогично можем определить составляющие градиента J'_{u_n} при других предположениях об восстанавливаемом векторе u.

8. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Пусть для напряженно-деформированного состояния составного тела имеет место система уравнений динамического равновесия

$$\rho\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial\sigma_{ik}(y)}{\partial x_k} + \widetilde{f}_i(x,t),\ (x,t) \in \Omega_T\,,\ i = \overline{1,3}, \qquad (64)$$

где $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(y) = \sum\limits_{l,m=1}^3 c_{iklm}\varepsilon_{lm}(y)$, $\widetilde{f} = \{\widetilde{f}_i\}_{i=1}^3$ — массовые силы.

Заданы краевые условия (2), условия сопряжения (3) и начальные условия

$$y\,|_{t=0} = u_1(x),\ \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = u_2(x),\ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2\,. \qquad (65)$$

Предполагаем, что на N поверхностях $\gamma_i \in \Omega$ известны смещения, заданные равенствами (5). Тем самым получена задача (64), (2), (3), (65), (5), состоящая в нахождении функции $u = (u_1(x), u_2(x)) \in \mathcal{U} = \overline{V}_0 \times L_2(\Omega)$, при которой решение

$y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (64), (2), (3), (65) удовлетворяет равенствам (5). Вместо классического решения упомянутой начально-краевой задачи будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 6. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (64), (2), (3), (65) называется функция $y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w\right) + a(y, w) = l(w), \ t \in (0, T), \tag{66}$$

$$y\big|_{t=0} = u_1, \ \frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_2, \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \tag{67}$$

где множества $W(0, T), V_0$, форма $l(\cdot)$ определены в разд. 1, а билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ — в разд. 6.

Приращение $\theta = \Delta y$, соответствующее приращению Δu элемента $u \in \mathcal{U}$, определим как решение начально-краевой задачи:

$$\begin{gathered} \rho \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\theta)}{\partial x_k}, \ (x, t) \in \Omega_T, \\ \theta = 0, \ (x, t) \in \Gamma_T, \\ [\theta_n]\big| = 0, \ [\sigma_n(\theta)] = 0, [\tau_s(\theta)] = 0, \ \tau_s^{\pm}(\theta) = r[\theta_s], \ (x, t) \in \gamma_T, \\ \theta\big|_{t=0} = \Delta u_1, \ \frac{\partial \theta}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \Delta u_2, \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \end{gathered} \tag{68}$$

Определение 7. Обобщенным решением начально-краевой задачи (68) называется функция $\theta \in W_0(0, T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{gathered} \left(\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, w\right) + a(\theta, w) = 0, \ t \in (0, T), \\ \theta\big|_{t=0} = \Delta u_1, \ \frac{\partial \theta}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \Delta u_2, \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \end{gathered} \tag{69}$$

где пространства $W_0(0, T), V_0$ определены в разд. 2.

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (66), (67), (6) сопряженная задача имеет вид (16). Соответствующая ей обобщенная задача определена выражениями (17), (18). Выберем в качестве функции w тождества (17) разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$. С учетом (18), (69) получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^T \sum_{i=1}^{N} \rho_i (y(u_n) - f_i, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_i)} dt = \\ &= \int_0^T \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, y(u_{n+1}) - y(u_n)\right) dt + \\ &+ \int_0^T a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n)) dt = -\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial t}, y(u_{n+1}) - y(u_n)\right)(0) + \\ &+ \left(\rho\psi, \frac{\partial}{\partial t}(y(u_{n+1}) - y(u_n))\right)(0) + \int_0^T \left(\rho \frac{\partial^2 (y(u_{n+1}) - y(u_n))}{\partial t^2}, \psi\right) dt + \\ &+ \int_0^T a((u_{n+1}) - y(u_n), \psi) dt = -\left(\Delta u_1, \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)(0) + (\Delta u_2, \rho\psi)(0), \end{aligned}$$

т.е.
$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N} \rho_i \,(y(u_n)-f_i\,, y(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_i)}\, dt =$$
$$= -\left(\Delta u_1 , \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)(0) + (\Delta u_2 , \rho\psi)(0). \qquad (70)$$

На основании (70) получаем
$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}, \qquad (71)$$
где $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_i\}_{i=1}^2, \widetilde{\psi}_1 = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t=0}(x), \widetilde{\psi}_2 = \rho\psi\big|_{t=0}(x),\ \|J'_{u_n}\|^2 = (\widetilde{\psi}, \widetilde{\psi})$.

Если $\mathcal{U} = R \times R$, то $\widetilde{\psi}_1 = -\int_\Omega \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t=0} dx,\ \widetilde{\psi}_2 = \int_\Omega \rho\psi\big|_{t=0} dx,\ \|J'_{u_n}\|^2 = \widetilde{\psi}_1^2 + \widetilde{\psi}_2^2$.

9. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

На основании равенства (70) можно получить явные выражения градиента J'_{u_n} для случая, когда все или часть составляющих вектора u представляются в виде линейной комбинации соответствующих систем линейно независимых функций.

Пусть
$$u_i(x) = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(x),\ x \in \Omega,\ i = 1, 2, \qquad (72)$$
где $\alpha_{ij} \in R$, $\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$ — система линейно независимых функций.

На основании (70) с учетом (72) получаем выражение (71), где $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_i\}_{i=1}^2$,
$\widetilde{\psi}_i = \{\widetilde{\psi}_{ij}\}_{j=1}^{m_i}, \widetilde{\psi}_{1j} = -\int_\Omega \rho\varphi_{1j} \frac{\partial \psi}{\partial t} dx\Big|_{t=0}, \widetilde{\psi}_{2j} = \int_\Omega \rho\varphi_{2i}\psi\, dx\big|_{t=0}, \|J'_{u_n}\|^2 = \sum_{\iota=1}^{2} \sum_{j=2}^{m_i} \widetilde{\psi}_{ij}^2$.

Замечание 7. Для восстановления функций u_i на каждой из областей Ω_j, $j = 1, 2$, можно использовать свои системы линейно независимых функций, т.е.
$$u_i^j(x) = \sum_{l=1}^{m_i^j} \alpha_{il}^j \varphi_{il}^j(x),\ x \in \Omega_j,\ i, j = 1, 2. \qquad (73)$$

На основании (70) с учетом представления (73) для составляющих $\widetilde{\psi}_i$ вектора $\widetilde{\psi}$ (71) имеем
$$\widetilde{\psi}_i = \{\widetilde{\psi}_i^l\}_{l=1}^2,\ \widetilde{\psi}_i^l = \{\widetilde{\psi}_{ij}^l\}_{j=1}^{m_i^l},\ \widetilde{\psi}_{1j}^l = -\int_{\Omega_l} \rho\varphi_{1j}^l \frac{\partial \psi}{\partial t} dx(0),$$
$$\widetilde{\psi}_{2j}^l = \int_{\Omega_l} \rho\varphi_{2j}^l \psi\, dx(0),\ \|J'_{u_n}\|^2 = \sum_{i,l=1}^{2} \sum_{j=1}^{m_i^l} (\widetilde{\psi}_{ij}^l)^2. \qquad (74)$$

Замечание 8. Высказывая другие предположения относительно принадлежности составляющих восстанавливаемой функции u, на основании равенства (70) можем получить соответствующие представления градиента $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}$ (71).

10. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ МАТЕРИАЛА ОБЛАСТЕЙ Ω_1, Ω_2

Пусть на области Ω_T определена система уравнений динамического упругого равновесия
$$\mathrm{u}(\mathrm{x}) \frac{\partial^2 \mathrm{y}_\mathrm{i}}{\partial \mathrm{t}^2} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{\mathrm{ik}}(\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{k}} + \widetilde{\mathrm{f}}_\mathrm{i}(\mathrm{x}, \mathrm{t}). \qquad (75)$$

На границе Γ_T заданы смещения (2). На участке γ_T условия сопряжения имеют вид (3). При $t=0$ определены начальные условия (4). Предполагаем, что на N поверхностях $\gamma_i \in \Omega$ известны смещения, заданные равенствами (5).

Получена задача (75), (2)–(5), состоящая в нахождении функции $u=u(x)\in\mathcal{U}= =C_+(\overline{\Omega}_1)\times C_+(\overline{\Omega}_2)(C_+(\overline{\Omega}_j)=v(x)\in C(\overline{\Omega}_j):v>0)$, при которой классическое решение $y=y(u;x,t)$ начально-краевой задачи (75), (2)–(4) удовлетворяет равенствам (5). Вместо классического решения начально-краевой задачи (75), (2)–(4) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 8. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (75), (2)–(4) называется функция $y=y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w\right)+a(y,w)=(\widetilde{f},w),\ t\in(0,T), \tag{76}$$

$$y\big|_{t=0}=y_0,\ \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=y_1,\ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{77}$$

где множества $W(0,T), V_0$ определены в разд. 1, а билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ и вектор $\widetilde{f}$ — в разд. 9.

Приращение $\theta=\Delta y$ решения $y=y(u)$, соответствующее приращению Δu элемента $u\in\mathcal{U}$, пренебрегая членами второго порядка малости, на основании задачи (76), (77) можем определить как функцию $\theta\in W_0(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, w\right)+a(\theta,w)=l_\theta(\Delta u;w),\ t\in(0,T), \tag{78}$$

$$\theta\big|_{t=0}=\left.\frac{\partial \theta}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\ x\in\Omega, \tag{79}$$

где $l_\theta(\Delta u;w)=-\left(\Delta u\dfrac{\partial^2 y(u)}{\partial t^2}, w\right)$.

Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (76), (77), (6) введем в рассмотрение следующую сопряженную начально-краевую задачу:

$$\begin{gathered}
u\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k}=0,\ i=\overline{1,3},\ (x,t)\in\Omega_{d_T},\\
\psi\big|_{\Gamma_T}=0,\\
[\psi_n]\big|_{\gamma_T}=0,\ [\sigma_n(\psi)]\big|_{\gamma_T}=0,\ [\tau_s(\psi)]\big|_{\gamma_T}=0,\ \tau_s^{\pm}(\psi)\big|_{\gamma_T}=r[\theta_s]\big|_{\gamma_T},\\
[\psi]\big|_{\gamma_{iT}}=0,\ [\sigma_n(\psi)]\big|_{\gamma_{iT}}=-\rho_i(y_s(u_n)-f_{in})\big|_{\gamma_{iT}},\\
[\tau_s(\psi)]\big|_{\gamma_{iT}}=0,\ \tau_s^{\pm}(\psi)\big|_{\gamma_T}=-\rho_i(y_s(u_n)-f_{is})\big|_{\gamma_{iT}},\ i=\overline{1,N},\\
\psi\big|_{t=T}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=T}=0,\ x\in\overline{\Omega},
\end{gathered} \tag{80}$$

где $u=u_n$.

Определение 9. Обобщенным решением начально-краевой задачи (80) называется функция $\psi\in W_d(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_d$ удовлетворяет равенствам

$$\left(u\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, w\right)+a(\psi,w)=l_\psi(y(u_n);w),\ t\in(0,T), \tag{81}$$

$$\psi\big|_{\mathrm{t=T}}=\left.\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{t}}\right|_{\mathrm{t=T}}=0,\ \mathrm{x}\in\overline{\Omega}. \tag{82}$$

Используя обозначения (39), получаем выражения (44), (45), где $\tilde{y}=\tilde{y}(u_{n+1})$ — функция из $W(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(u_n\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial t^2},w\right)+a(\tilde{y},w)=l(w)-\left(\Delta u_n\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2},w\right),\ t\in(0,T),\tag{83}$$

$$\tilde{y}\big|_{t=0}=y_0,\ \frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}\bigg|_{t=0}=y_1,\ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2.\tag{84}$$

При $u_n+\Delta u_n\in\mathcal{U}$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $u_n+\lambda\Delta u_n\in\mathcal{U}$. На основании (76), (77) $\forall\lambda\in(0,1)$ имеем

$$\left(u_n\frac{\partial^2(y(u_n)+\Delta_\lambda y)}{\partial t^2},w\right)+a(y(u_n)+\Delta_\lambda y,w)=$$
$$=l(w)-\left(\Delta u_n\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2},w\right),\ t\in(0,T),\tag{85}$$

$$(y(u_n)+\Delta_\lambda y)\big|_{t=0}=y_0,\ \frac{\partial(y(u_n)+\Delta_\lambda y)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=y_1,\ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2,\tag{86}$$

где $\Delta_\lambda y=\lambda y_0(\Delta u_n)$, $y_0(\Delta u_n)=\theta$ — единственное решение задачи (78), (79) при $u=u_n$, $\Delta u=\Delta u_n$.

С учетом обозначений (39) на основании выражения вида (44) получаем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle\approx(\overline{Y}(u_n)-\bar{f},\overline{\overline{Y}}(u_{n+1})-\overline{Y}(u_n))_\rho.\tag{87}$$

Выберем в тождестве (81) вместо функции w разность $\tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$. С учетом (78), (79) имеем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle\approx\int_0^T l_\theta(\Delta u_n;\psi)\,dt,\tag{88}$$

где $l_\theta(\Delta u_n;\psi)=-\left(\Delta u_n\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2},\psi\right)$.

Следовательно,

$$J'_{u_n}\approx\tilde{\psi}_n,\tag{88$'$}$$

где $\tilde{\psi}_n=\{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2$, $\tilde{\psi}_n^i=-\int_0^T\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2}\psi\,dt\big|_{\Omega_i}$, $||J'_{u_n}||^2\approx\sum_{i=1}^2\int_\Omega(\tilde{\psi}_n^i)^2\,dx$.

Замечание 9. Если $\mathcal{U}=R_+^2$, то $\tilde{\psi}_n=\{\tilde{\psi}_n^i\}$, $\tilde{\psi}_n^i=-\int_0^T\int_{\Omega_i}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2}\psi\,dx\,dt$, $||J'_{u_n}||^2=\sum_{i=1}^2(\tilde{\psi}_n^i)^2$.

Замечание 10. Если $\mathcal{U}=R_+\times C_+(\overline{\Omega}_{2T})$, то $\tilde{\psi}_n^1=-\int_0^T\int_{\Omega_1}\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2}\psi\,dx\,dt$, $\tilde{\psi}_n^2=-\int_0^T\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2}\psi\,dt$, $||J'_{u_n}||^2\approx(\tilde{\psi}_n^1)^2+\int_{\Omega_2}(\tilde{\psi}_n^2)^2\,dx$.

11. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПЛОТНОСТЕЙ МАТЕРИАЛА

На основании выражения (88) можно получить явные выражения приближения градиента J'_{u_n}, когда составляющие восстанавливаемого вектора плотностей материалов областей Ω_1,Ω_2 представляются в виде линейной комбинации соответствующих систем линейно независимых функций.

Пусть
$$u_i(x)=\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\varphi_{ij}(x)>0,\ i=1,2. \tag{89}$$

На основании (88) с учетом (89) получаем выражение (88′), где $\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2$, $\widetilde{\psi}_n^i=\{\widetilde{\psi}_{nj}^i\}_{j=1}^{m_i}$, $\widetilde{\psi}_{nj}^i=-\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\varphi_{ij}\dfrac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2}\psi\,dx\,dt$, $\|J'_{u_n}\|^2\approx\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{m_i}(\widetilde{\psi}_{nj}^i)^2$.

Замечание 11. Если плотность одной из областей Ω_i представляется в виде (89), а второй — из класса функций $C_+(\overline{\Omega}_{\{1,2\}\setminus i})$, то $\widetilde{\psi}_{nj}^i=-\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\varphi_{ij}\dfrac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2}\psi\,dx\,dt$, $\widetilde{\psi}_n^l=-\int\limits_0^T\dfrac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2}\psi\,dt$.

Замечание 12. Если плотность одной из областей Ω_i представляется в виде (89), а второй — из класса R_+, то $\widetilde{\psi}_{nj}^i=-\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_i}\varphi_{ij}\dfrac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2}\psi\,dx\,dt$, $\widetilde{\psi}_n^l=-\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_l}\dfrac{\partial^2 y(u_n)}{\partial t^2}\psi\,dx\,dt$, $\|J'_{u_n}\|^2\approx\sum\limits_{j=1}^{m_i}(\widetilde{\psi}_{nj}^i)^2+(\widetilde{\psi}_n^l)^2$, $i\in 1,2$, $l=\{1,2\}\setminus i$.

12. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ ТЕЛА

Предположим, что в ограниченных связных строго липшицевых областях Ω_1, $\Omega_2\in R^3$ определена система динамического упругого равновесия
$$\rho\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+f_i(x,t),\ i=\overline{1,3},\ t\in(0,T), \tag{90}$$
где $\sigma_{ik}=\sum\limits_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm}(y)$.

Краевые условия имеют вид
$$y=\varphi,\ (x,t)\in\Gamma_{1T}, \tag{91}$$
$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(y)n_j=u_i,\ i=\overline{1,3},\ (x,t)\in\Gamma_{2T}, \tag{92}$$
где $n_j=\cos(n,x_j)$, n — единичный вектор внешней нормали к границе $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing$, $\Gamma_{iT}=\Gamma_i\times(0,T)$, $i=1,2$.

На участке γ_T условия сопряжения имеют вид
$$[y_n]=0, \tag{93}$$
$$[\sigma_n]=0,\ [\tau_s]=0,\ \tau_s^{\pm}=r[y_s]. \tag{94}$$

При $t=0$ заданы начальные условия
$$y\big|_{t=0}=y_0,\ \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=y_1,\ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{95}$$
где u_i — проекция на i-ю ось декартовой системы координат плотности силы u, приложенной к телу $\overline{\Omega}$ в точке $x\in\Gamma_2$ при $t\in(0,T)$.

Предполагаем, что на N поверхностях $\gamma_i\in\Omega$ известны смещения, заданные равенствами (5).

Задача (90)–(95), (5) состоит в нахождении вектора $u\in\mathcal{U}=(L^2(0,T;L_2(\Gamma_2)))^3$, при котором решение $y=y(u)=y(u;x,t)$ начально-краевой задачи (90)–(95) удовлетворяет равенствам (5).

Определение 10. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (90)–(95) называется функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w\right) + a(y, w) = l(u; w), \ t \in (0, T), \tag{96}$$

$$y\big|_{t=0} = y_0, \ \frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{t=0} = y_1, \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \tag{97}$$

где

$$W(0, T) = \left\{ v \in L^2(0, T; V): \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L^2(0, T; L_2(\Omega)) \right\},$$

$$V = \{v(x, t) \in \overline{V} : v\big|_{\Gamma_{1T}} = \varphi, [v_n]\big|_{\gamma_T} = 0\}, \ V_0 = \{v(x) \in \overline{V}_0 : v\big|_{\Gamma_1} = 0, [v_n]\big|_{\gamma} = 0\},$$

$$a(y, w) = \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(y) \varepsilon_{ik}(w) dx + \int_\gamma r[y_s][w_s] d\gamma, l(u; w) = (\tilde{f}, w) + \int_{\Gamma_2} uw \, d\Gamma_2.$$

Получена задача: найти функцию u, минимизирующую на $\mathcal{U}$ функционал-невязку (6) при ограничениях (96), (97).

Для допустимого приращения Δu элемента $u \in \mathcal{U}$ приращение $\theta = \Delta y$ решения $y(u)$ на основании начально-краевой (90)–(95) или обобщенной (96), (97) задачи можем определить как решение задачи: найти функцию $\theta = \theta(x, t) \in W_0(0, T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, w\right) + a(\theta, w) = l_\theta(\Delta u; w), \ t \in (0, T), \tag{98}$$

$$\theta\big|_{t=0} = \frac{\partial \theta}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \ x \in \overline{\Omega}, \tag{99}$$

где

$$W_0(0, T) = \left\{ v(x, t) \in L^2(0, T; V^0): \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L^2(0, T; L_2(\Omega)) \right\},$$

$$V^0 = \{v(x, t) \in \overline{V} : v\big|_{\Gamma_{1T}} = 0; [v]\big|_{\gamma_T} = 0\},$$

$$l_\theta(\Delta u; w) = \int_{\Gamma_2} \Delta u w \, d\Gamma_2. \tag{99$'$}$$

Для каждого приближения $u_n \in \mathcal{U}$ задачи (96), (97), (6) введем в рассмотрение следующую сопряженную начально-краевую задачу:

$$\begin{gathered}
\rho \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \ i = \overline{1, 3}, \ (x, t) \in \Omega_{d_T}, \\
\psi\big|_{\Gamma_{1T}} = 0, \\
\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0, \ i = \overline{1, 3}, \ (x, t) \in \Gamma_{2T}, \\
[\psi_n]\big|_{\gamma_T} = 0, \ [\sigma_n(\psi)]\big|_{\gamma_T} = 0, \ [\tau_s(\psi)]\big|_{\gamma_T} = 0, \ \tau_s^{\pm}(\psi)\big|_{\gamma_T} = r[\psi_s]\big|_{\gamma_T}, \\
[\psi]\big|_{\gamma_{iT}} = 0, \ [\sigma_n(\psi)]\big|_{\gamma_{iT}} = -\rho_i (y_n(u_n) - f_{in})\big|_{\gamma_{iT}}, \\
[\tau_s(\psi)]\big|_{\gamma_{iT}} = -\rho_i (y_s(u_n) - f_{is})\big|_{\gamma_{iT}}, \ i = \overline{1, N}, \\
\psi\big|_{t=T} = \frac{\partial \psi}{\partial t}\bigg|_{t=T} = 0, \ x \in \overline{\Omega}.
\end{gathered} \tag{100}$$

Определение 11. Обобщенным решением начально-краевой задачи (100) называется функция $\psi=\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, w\right)+a(\psi, w)=l_\psi(y(u_n); w),\ t\in(0,T), \tag{101}$$

$$\psi\Big|_{t=T}=\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=T}=0,\ x\in\overline{\Omega}, \tag{102}$$

где форма $l(\cdot;\cdot)$ определена выражением (19),

$$W_d(0,T)=\left\{v(x,t)\in L^2(0,T;V_d): \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\in L^2(0,T;L_2(\Omega))\right\},$$

$$V_d=\{v(x,t)\in\overline{V}_d : v\big|_{\Gamma_{1T}}=0, [v_n]\big|_{\gamma_T}=0, [v]_{\gamma_{iT}}=0, i=\overline{1,N}\},$$

$$\overline{V}_d=\{v(x,t): v\big|_{\Omega_j}\in(W_2^1(\Omega_j))^3, j=\overline{0,N+1}\},$$

$$V_{d_0}=\{v(x): v\big|_{\Omega_j}\in(W_2^1(\Omega_j))^3, j=\overline{0,N+1}, v\big|_{\Gamma_1}=0, [v_n]\big|_{\gamma}=0, [v]_{\gamma_i}=0, i=\overline{1,N}\}.$$

Выберем в качестве функции w тождества (101) разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$. С учетом (98), (99), (102) получим

$$\int_0^T\sum_{i=1}^N\rho_i(y(u_n)-f_i, y(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_i)}dt=\int_0^T\left(\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, y(u_{n+1})-y(u_n)\right)dt+$$

$$+\int_0^T a(\psi, y(u_{n+1})-y(u_n))dt=\int_0^T l_\theta(\Delta u_n;\psi)dt. \tag{103}$$

В силу того, что

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n\rangle=\int_0^T\sum_{i=1}^N\rho_i(y(u_n)-f_i, y(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_i)}dt=\int_0^T l_\theta(\Delta u_n;\psi)dt,$$

с учетом (99′) имеем

$$J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n, \tag{104}$$

где $\widetilde{\psi}_n=\psi\big|_{\Gamma_{2T}}$, $\|J'_{u_n}\|^2=\int_0^T\int_{\Gamma_2}\widetilde{\psi}_n^2\,d\Gamma_2\,dt$.

Если $\mathcal{U}=L_2(\Gamma_2)$, то $\widetilde{\psi}_n=\int_0^T\psi\big|_{\Gamma_2}dt$, $\|J'_{u_n}\|^2=\int_{\Gamma_2}\widetilde{\psi}_n^2\,d\Gamma_2$.

Замечание 13. Если вместо (92) заданы условия

$$\sigma_n=u,\ \tau_s=g, \tag{105}$$

то $l(u;w)=(\widetilde{f},w)+(u,w_n)_{L_2(\Gamma_2)}+(g,w_s)_{L_2(\Gamma_2)}$, где g — известная вектор-функция, $u\in\mathcal{U}=L^2(0,T;L_2(\Gamma_2))$. Сопряженная задача имеет вид (100) и $l_\theta(\Delta u;w)=$ $=\int_{\Gamma_2}\Delta u w_n\,d\Gamma_2$.

Следовательно, $J'_{u_n}=\widetilde{\psi}$, где

$$\widetilde{\psi}=\psi_n\big|_{\Gamma_2}=(\psi,n)\big|_{\Gamma_2},\ \ \|J'_{u_n}\|^2=\int_0^T\|\psi_n\|^2_{L_2(\Gamma_2)}dt. \tag{106}$$

Замечание 14. Если вместо условий (105) задано

$$\sigma_n = u, \ y_s \big|_{\Gamma_{2T}} = g \big|_{\Gamma_{2T}}, \tag{106$'$}$$

то выражения (106) сохраняются, однако при этом изменятся множества $W(0,T)$, V_0, $W_d(0,T)$, V_{d_0}, $l(u;w) = (\widetilde{f}, w) + (u, w_n)_{L_2(\Gamma_2)}$.

13. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРА СЛАБОПРОЧНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ПРИ ЗАДАННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ И СМЕЩЕНИЯХ НА ОБЩЕМ УЧАСТКЕ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Предположим, что на областях $\Omega_1, \Omega_2 \in R^3$ определена система уравнений (90). Краевые условия имеют вид

$$y = \varphi, \ (x,t) \in \Gamma_{1T}, \tag{107}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = g_i, \ i = \overline{1,3}, \ (x,t) \in \Gamma_{2T}, \tag{108}$$

$$y = f_0, \ (x,t) \in \gamma_{0T}, \tag{109}$$

где $\gamma_0 \subset \Gamma_2, \gamma_{0T} = \gamma_0 \times (0,T), g = \{g_i\}_{i=1}^3, \bar{f} = f_0$.

На участке γ_T заданы условия сопряжения:

$$[y_n] = 0, \tag{110}$$

$$[\sigma_n] = 0, \ [\tau_s] = 0, \ \tau_s^{\pm} = u[y_s]. \tag{111}$$

При $t = 0$ имеем начальные условия (95).

Задача (90), (95), (107)–(111) состоит в нахождении элемента $u \in \mathcal{U} = C_+(\gamma_T)$, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \| Au - \bar{f} \|^2_{L_2(\gamma_0)} dt, \tag{112}$$

где $Au = y(u; x, t)\big|_{\gamma_{0T}}$ при ограничениях (90), (95), (107), (108), (110), (111).

Вместо классического решения начально-краевой задачи (90), (95), (107), (108), (110), (111) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 12. При каждом $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (90), (95), (107), (108), (110), (111) называется функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0,T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w \right) + a(u; y, w) = l(w), \ t \in (0,T), \tag{113}$$

$$y\big|_{t=0} = y_0, \ \frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{t=0} = y_1, \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \tag{114}$$

где множества $W(0,T), V_0$ определены в разд. 12,

$$a(u; y, w) = \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(y) \varepsilon_{ik}(w) dx + \int_\gamma u[y_s][w_s] d\gamma,$$

$$l(w) = (\widetilde{f}, w) + \int_{\Gamma_2} g w \, d\Gamma_2.$$

Для допустимого приращения Δu элемента $u \in \mathcal{U}$ приращение $\theta = \Delta y$ решения задачи (113), (114) можем определить как решение задачи (98), (99), где

$$\begin{gathered} a(\theta, w) = a(u_n; \theta, w), \ l_\theta(\Delta u; w) = -\int_\gamma \Delta u [y_s(u)][w_s] d\gamma, \\ u = u_n, \ \Delta u = \Delta u_n. \end{gathered} \tag{114$'$}$$

Для каждого приближения $u_n \in \mathcal{U}$ задачи (112)–(114) введем в рассмотрение следующую сопряженную начально-краевую задачу:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \ i = \overline{1,3}, \ (x,t) \in \Omega_{dT},$$

$$\psi \big|_{\Gamma_{1T}} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i}, \ i = \overline{1,3}, \ (x,t) \in \gamma_{0T},$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0, \ (x,t) \in \Gamma_{2T} \setminus \gamma_{0T}, \tag{115}$$

$$[\psi_n]\big|_{\gamma_T} = 0, \ [\sigma_n(\psi)]\big|_{\gamma_T} = 0, \ [\tau_s(\psi)]\big|_{\gamma_T} = 0, \ \tau_s^{\pm}(\psi) = u_n[\psi_s]\big|_{\gamma_T},$$

$$\psi\big|_{t=T} = \frac{\partial \psi}{\partial t}\bigg|_{t=T} = 0, \ x \in \overline{\Omega}.$$

Здесь $f_0 = \{f_{0i}\}_{i=1}^{3}, \Omega_{dT} = \Omega_T$.

Определение 13. Обобщенным решением начально-краевой задачи (115) называется функция $\psi \in W_0(0,T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, w\right) + a(u_n; \psi, w) = l_{\psi}(y(u_n); w), \ t \in (0,T), \tag{116}$$

$$\psi\big|_{t=T} = \frac{\partial \psi}{\partial t}\bigg|_{t=T} = 0, \ x \in \overline{\Omega}, \tag{117}$$

где множества $W_0(0,T), V_0$ определены в разд. 12,

$$l_{\psi}(y(u_n); w) = (y(u_n) - f_0, w)_{L_2(\gamma_0)}.$$

Выберем в качестве функции w тождества (116) разность $\tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)$. С учетом (98), (99), (114′), (117) получим

$$\int_0^T (y(u_n) - \bar{f}, \tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} dt = -\int_0^T \int_{\gamma} \Delta u_n [y_s(u_n)][w_s] d\gamma\, dt, \tag{118}$$

где $\tilde{y}(u_{n+1})$ — решение задачи: найти функцию $\tilde{y} \in W(0,T)$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2}, w\right) + a(u_n; \tilde{y}, w) = l(w) - \int_{\gamma} \Delta u_n [y_s(u_n)][w_s] d\gamma,$$

$$\tilde{y}\big|_{t=0} = y_0, \ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = y_1, \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}_n, \tag{119}$$

где $\tilde{\psi}_n = -[y_s(u_n)][w_s]\big|_{\gamma_T}$,

$$\|J'_{u_n}\|^2 \approx \int_0^T \int_{\gamma} \tilde{\psi}_n^2 \, d\gamma\, dt. \tag{119′}$$

Относительно $\tilde{\psi}_n$ справедливо замечание 1 (разд. 3).

Замечание 14. Если в задаче (90), (95), (107)–(111) вместе с условием (109) также имеем

$$y = f_i, \ (x,t) \in \gamma_{iT}, \ i = \overline{1,N}, \tag{120}$$

где $\gamma_i \in \Omega$, то функционал-невязку зададим в виде

$$J(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\int_0^T \| A_i u - f_i \|^2_{L_2(\gamma_i)} dt, \tag{121}$$

где $A_i u = y(u; x, t)\big|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{0, N}$.

Для каждого приближения $u_n \in \mathcal{U}$ сопряженная задача определяется системой равенств (115), где $\Omega_{dT} = \Omega_T \setminus \gamma_{dT}$, $\gamma_{dT} = \bigcup_{i=1}^{N} \gamma_{iT}$, и ограничениями

$$\begin{gathered} [\psi_n]\big|_{\gamma_{iT}} = 0, \; [\sigma_n(\psi)]\big|_{\gamma_{iT}} = -\rho_i (y_n(u_n) - f_{in})\big|_{\gamma_{iT}}, \\ [\tau_s(\psi)]\big|_{\gamma_{iT}} = -\rho_i (y_s(u_n) - f_{is})\big|_{\gamma_{iT}}, \; i = \overline{1, N}. \end{gathered} \tag{122}$$

Определение 14. Обобщенным решением начально-краевой задачи (115), (122) называется функция $\psi \in W_d(0, T)$, которая $\forall w(x) \in V_{d_0}$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, w\right) + a(u_n; \psi, w) = l_\psi(y(u_n); w), \; t \in (0, T), \tag{123}$$

$$\psi\big|_{t=T} = \frac{\partial \psi}{\partial t}\bigg|_{t=T} = 0, \; x \in \overline{\Omega}, \tag{124}$$

где множества $W_d(0, T)$, V_{d_0} определены в разд. 12, а

$$l_\psi(y(u_n); w) = \sum_{i=0}^{N} (y(u_n) - f_i, w)_{L_2(\gamma_i)}.$$

На основании задачи (123), (124) получаем выражения (119), (119′), для которых остается в силе замечание 1 (разд. 3).

Замечание 16. При наличии условий (108), (109) можем получить явные выражения градиента J'_{u_n} для идентификации других параметров задач теории упругости, например упругих постоянных и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для гиперболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 2. — С. 55–80.
2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 506 с.
4. Дейнека В.С. Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2005. — 364 с.
5. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Academ. Publ., 2005. — 400 p.
6. Дейнека В.С., Вещунова Н.А. Численное решение задач идентификации параметров параболических многокомпонентных систем // Компьютерная математика. — 2008. — № 1. — С. 22–33.
7. Дейнека В.С., Вещунова Н.А. Численное решение обратных задач нестационарной теплопроводности для пластин // Там же. — 2008. — № 2. — С. 32–43.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 544 с.
9. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. — Киев: Наук. думка, 2001. — 606 с.
10. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. — Киев: Наук. думка, 1970. — 308 с.
11. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

Поступила 26.12.2008