СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

В.В. СКОПЕЦКИЙ, О.А. МАРЧЕНКО, Т.А. САМОЙЛЕНКО

УДК 532.546:539.3

ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИНАМИКИ ДВУХФАЗНЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕД

Ключевые слова: *нелинейная система, дифференциальная модель динамики двухфазных грунтовых сред, обобщенное решение, метод конечных элементов, оценка дискретного по времени приближенного обобщенного решения*.

Настоящая статья является продолжением темы, получившей развитие в [1], где для нелинейной дифференциальной модели динамики двухфазных грунтовых сред на основании метода Галеркина сформулировано обобщенное решение и получена оценка погрешности непрерывного по времени приближенного обобщенного решения. Далее предложены построение и исследование полностью дискретного приближенного обобщенного решения рассматриваемой начально-краевой задачи [1, 2]. Система уравнений записана в виде

$$\rho_{\text{ск}}(1-m)\frac{\partial^2 w_{\text{ск}}}{\partial t^2}+P(w)\frac{\partial}{\partial t}(w_{\text{ск}}-w_{\text{в}})-(Aw_{\text{ск}})(w_{\text{ск}})-$$

$$-M^{\text{в}}\frac{1-m}{m}[(1-m)\operatorname{grad}\operatorname{div} w_{\text{ск}}+m\operatorname{grad}\operatorname{div} w_{\text{в}}]=F_1, \tag{1}$$

$$\rho_{\text{в}}m\frac{\partial^2 w_{\text{в}}}{\partial t^2}+P(w)\frac{\partial}{\partial t}(-w_{\text{ск}}+w_{\text{в}})-M^{\text{в}}[(1-m)\operatorname{grad}\operatorname{div} w_{\text{ск}}+m\operatorname{grad}\operatorname{div} w_{\text{в}}]=F_2, \tag{2}$$

где $w_{\text{ск}}(x,y,t)=(u_{\text{ск}}(x,y,t),v_{\text{ск}}(x,y,t))^T$, $w_{\text{в}}(x,y,t)=(u_{\text{в}}(x,y,t),v_{\text{в}}(x,y,t))^T$, $(x,y,t)\in\Omega_T$, $\Omega_T=\Omega\times(0,T]$, $u_{\text{ск}}$, $v_{\text{ск}}$ — горизонтальная и вертикальная составляющие вектора смещений для скелета грунта; $u_{\text{в}}$, $v_{\text{в}}$ — соответствующие составляющие вектора смещений жидкости; $\rho_{\text{ск}}$, $\rho_{\text{в}}$ — плотности минеральных частиц скелета грунта и пóровой жидкости соответственно (плотность водонасыщенного грунта $\rho=\rho_{\text{ск}}(1-m)+\rho_{\text{в}}m$); m — пористость; $M^{\text{в}}$ — модуль упругости жидкости. Матрица $P(w)$ имеет вид

$$P(w)=\rho_{\text{в}}gm^2\begin{pmatrix}K^{-1}_{\text{ф},x}(w) & 0\\ 0 & K^{-1}_{\text{ф},y}(w)\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $K_{\text{ф},x}$, $K_{\text{ф},y}$ — коэффициенты фильтрации в направлении осей x и y соответственно, зависящие от вектор-функции $w(x,y,t)=(w_{\text{ск}}(x,y,t),w_{\text{в}}(x,y,t))^T$; A — оператор теории упругости

$$(Aw_{\text{ск}})(w_{\text{ск}})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\sigma_x+\dfrac{\partial}{\partial y}\tau_{xy}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}\tau_{xy}+\dfrac{\partial}{\partial y}\sigma_y\end{pmatrix},\quad (x,y,t)\in\Omega_T,$$

© В.В. Скопецкий, О.А. Марченко, Т.А. Самойленко, 2009

где

$$\sigma_x = \lambda(w_{ск})\left(\frac{\partial u_{ск}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ск}}{\partial y}\right) + 2\mu(w_{ск})\frac{\partial u_{ск}}{\partial x},$$

$$\sigma_y = \lambda(w_{ск})\left(\frac{\partial u_{ск}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ск}}{\partial y}\right) + 2\mu(w_{ск})\frac{\partial v_{ск}}{\partial y}, \qquad \tau_{xy} = \mu(w_{ск})\left(\frac{\partial u_{ск}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ск}}{\partial x}\right),$$

коэффициенты Ламе $\lambda(w_{ск})$, $\mu(w_{ск})$ зависят от производных компонент вектор-функции $w_{ск}(x,y,t)$ по пространственным переменным и имеют вид

$$\lambda(w_{ск}) = b_1(x,y)K\left(x, y, \frac{\partial w_{ск}}{\partial x}, \frac{\partial w_{ск}}{\partial y}\right), \ \mu(w_{ск}) = b_2(x,y)K\left(x, y, \frac{\partial w_{ск}}{\partial x}, \frac{\partial w_{ск}}{\partial y}\right); \quad (4)$$

$$F_1(x,y,t) = (F_{11}(x,y,t), F_{12}(x,y,t))^T, \ F_2(x,y,t) = (F_{21}(x,y,t), F_{22}(x,y,t))^T,$$

где F_{ij}, $i,j=1,2,$ — заданные функции.

Начальные условия:

$$w_{ск}(x,y,0) = W_{ск}^0(x,y), \ \frac{\partial w_{ск}}{\partial t}(x,y,0) = W_{ск}^1(x,y), \ (x,y)\in\overline{\Omega},$$

$$w_{в}(x,y,0) = W_{в}^0(x,y), \ \frac{\partial w_{в}}{\partial t}(x,y,0) = W_{в}^1(x,y), \ (x,y)\in\overline{\Omega}. \quad (5)$$

Краевые условия:

$$w_{ск,n}(x,y,t) = 0, \ w_{ск,s}(x,y,t) = 0, \ (x,y,t)\in\Gamma_1\times(0,T], \quad (6)$$

$$\sigma_n = S(x,y,t), \ \tau_s = T(x,y,t), \ (x,y,t)\in\Gamma_2\times(0,T], \quad (7)$$

$$\frac{M^{в}}{m}[(1-m)\operatorname{div} w_{ск} + m\operatorname{div} w_{в}] = \Psi(x,y,t), \ (x,y,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \quad (8)$$

где $\Gamma_1\bigcup\Gamma_2 = \partial\Omega$; $w_{ск,n}$, $w_{ск,s}$ — нормальная и касательная составляющие вектора смещений скелета грунта $w_{ск}$; σ_n, τ_s — соответствующие составляющие вектора напряжений.

Предполагаем, что граница $\partial\Omega$, а также функции $K_{ф,x}^{-1}(w)$, $K_{ф,y}^{-1}(w)$, $F_{ij}(x,y,t)$, $b_i(x,y)$, $i,j=1,2,$ $K\left(x, y, \frac{\partial w_{ск}}{\partial x}, \frac{\partial w_{ск}}{\partial y}\right)$, $W_{ск}^0(x,y)$, $W_{в}^0(x,y)$, $W_{ск}^1(x,y)$, $W_{в}^1(x,y)$, $S(x,y,t)$, $T(x,y,t)$, $\Psi(x,y,t)$ обладают достаточной гладкостью [1].

Положим Z — множество вектор-функций $w(x,y,t) = (w_{ск}(x,y,t), w_{в}(x,y,t))^T = (w_1(x,y,t), w_2(x,y,t))^T = (w_{11}(x,y,t), w_{12}(x,y,t), w_{21}(x,y,t), w_{22}(x,y,t))^T$, удовлетворяющих главному краевому условию (6), компоненты которых принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$ $\forall\, t\in(0,T]$, их производные по времени $\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial t^2}(x,y,t)$, $i,j=1,2,$ $\forall\, t\in(0,T]$, $\frac{\partial w_{ij}}{\partial t}(x,y,0)$, $i,j=1,2,$ вместе с $w_{ij}(x,y,0)$, $i,j=1,2,$ принадлежат $W_2^1(\Omega)$, смешанные производные $\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x\partial t} = \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial t\partial x}$, $\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y\partial t} = \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial t\partial y}$, $i,j=1,2$, «почти всюду» и принадлежат $L_2(\Omega)$. Предполагается также, что вектор-функции из Z $\forall\, t\in(0,T]$ не удовлетворяют условию

$$w_1\equiv 0, \ \operatorname{div} w_2\equiv 0, \ (x,y)\in\overline{\Omega}. \quad (9)$$

Множеству Z_0 принадлежат вектор-функции $q(x, y) = (q_1(x, y), q_2(x, y))^T = (q_{11}(x, y), q_{12}(x, y), q_{21}(x, y), q_{22}(x, y))^T$, которые удовлетворяют однородному главному краевому условию (6), а их компоненты принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$ и не удовлетворяют условию (9).

Согласно [1] обобщенным решением начально-краевой задачи (1), (2), (5)-(8) является вектор-функция $w(x, y, t) \in Z$, удовлетворяющая следующим интегральным соотношениям:

$$m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, q\right) + \overline{m}\left(w; \frac{\partial w}{\partial t}, q\right) + a(w_1; w, q) = \left\langle \overline{F}, q \right\rangle \quad \forall\, q \in Z_0, \ \forall\, t \in (0, T], \tag{10}$$

$$\left\langle w(x, y, 0), q(x, y) \right\rangle = \left\langle \widetilde{W}^0(x, y), q(x, y) \right\rangle \quad \forall\, q \in Z_0, \tag{11}$$

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0), q(x, y) \right\rangle = \left\langle \widetilde{W}^1(x, y), q(x, y) \right\rangle \quad \forall\, q \in Z_0. \tag{12}$$

Здесь
$$m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, q\right) = \iint\limits_{\Omega} \left[\rho_{\text{ск}}(1-m)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, q_1\right) + \rho_{\text{в}} m \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, q_2\right)\right] d\Omega, \tag{13}$$

$$\overline{m}\left(w; \frac{\partial w}{\partial t}, q\right) = \iint\limits_{\Omega} \left(P(w) \frac{\partial}{\partial t}(w_1 - w_2), q_1 - q_2 \right) d\Omega, \tag{14}$$

$$a(w_1; w, q) = \mathbf{W}_1(w_1; w_1, q_1) + \mathbf{W}_2(w, q), \tag{15}$$

$$\mathbf{W}_1(w_1; w_1, q_1) = \iint\limits_{\Omega} \left[\lambda(w_1)\left(\frac{\partial w_{11}}{\partial x} + \frac{\partial w_{12}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q_{11}}{\partial x} + \frac{\partial q_{12}}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. +2\mu(w_1)\left(\frac{\partial w_{11}}{\partial x}\frac{\partial q_{11}}{\partial x} + \frac{\partial w_{12}}{\partial y}\frac{\partial q_{12}}{\partial y}\right) + \mu(w_1)\left(\frac{\partial w_{11}}{\partial y} + \frac{\partial w_{12}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q_{11}}{\partial y} + \frac{\partial q_{12}}{\partial x}\right)\right] d\Omega, \tag{16}$$

$$\mathbf{W}_2(w, q) = M^{\text{в}} \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{(1-m)^2}{m} \operatorname{div} w_1 \operatorname{div} q_1 + (1-m) \operatorname{div} w_2 \operatorname{div} q_1 + \right.$$

$$\left. +(1-m) \operatorname{div} w_1 \operatorname{div} q_2 + m \operatorname{div} w_2 \operatorname{div} q_2 \right] d\Omega,$$

$$\widetilde{W}^0(x, y) = (W_{\text{ск}}^0(x, y), W_{\text{в}}^0(x, y))^T, \quad \widetilde{W}^1(x, y) = (W_{\text{ск}}^1(x, y), W_{\text{в}}^1(x, y))^T, \tag{17}$$

$\langle \xi, q \rangle = \iint\limits_{\Omega} (\xi, q)\, d\Omega$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$.

Для существования интегралов в (10)–(12) достаточно, чтобы функции принадлежали следующим пространствам [3]:

$$K_{\text{ф},x}^{-1}(w),\ K_{\text{ф},y}^{-1}(w),\ F_{ij}(x, y, t) \in L_\infty(\Omega), \quad i, j = 1, 2;$$

$$b_i(x, y),\ K\left(x, y, \frac{\partial w_{\text{ск}}}{\partial x}, \frac{\partial w_{\text{ск}}}{\partial y}\right) \in W_2^1(\Omega), \quad i = 1, 2;$$

$$S(x, y, t),\ T(x, y, t) \in L_\infty(\Gamma_2); \quad \Psi(x, y, t) \in L_\infty(\partial\Omega) \quad \forall\, t \in (0, T];$$

$$\widetilde{W}^0(x, y),\ \widetilde{W}^1(x, y) \in L_\infty(\Omega).$$

Приближенное обобщенное решение задачи (10)–(12) находится методом конечных элементов в конечно-измеримом пространстве $Z^N \subset Z$ [1]. Для этого область $\overline{\Omega}$ разбивается на треугольные элементы $\bar{e}_i : (\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{I} \bar{e}_i,\ e_i \cap e_j = \varnothing$, $i \neq j,\ i, j = \overline{1, I})$. Любую вектор-функцию $w^N \in Z^N$ можно представить в виде

$$w^N(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i(t) \Phi_i(x, y), \tag{18}$$

где N' — количество базисных функций, отвечающих всем узловым точкам в разбиении области $\overline{\Omega}$; $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, N'}$, — функции, интегрируемые вместе со второй производной на $[0, T]$; $\{\Phi_i\}_{i=1}^{N'}$ — базис пространства Z_t^N, получаемого из Z^N фиксированием $\forall\, t \in [0, T]$.

Базис подпространства $Z_0^N \subset Z_0$ совпадает с базисом $\{\Phi_i\}_{i=1}^{N'}$ пространства Z_t^N, т.е. любая вектор-функция $q^N(x, y) \in Z_0^N$ может быть представлена в виде

$$q^N(x, y) = \sum_{i=1}^{N'} \beta_i \Phi_i(x, y), \tag{19}$$

где β_i — константы.

Приближенное обобщенное решение задачи (10)–(12) $w^N \in Z^N$ удовлетворяет следующим интегральным соотношениям:

$$m\left(\frac{\partial^2 w^N}{\partial t^2}, q^N\right) + \overline{m}\left(w^N; \frac{\partial w^N}{\partial t}, q^N\right) + a(w_1^N; w^N, q^N) = \left\langle \overline{F}, q^N \right\rangle,$$

$$w^N(x, y, t) \in Z^N,\ \forall\, q^N(x, y) \in Z_0^N,\ \forall\, t \in (0, T], \tag{20}$$

$$\left\langle w^N(x, y, 0), q^N \right\rangle = \left\langle \widetilde{W}^0(x, y), q^N \right\rangle \ \ \forall\, q^N(x, y) \in Z_0^N, \tag{21}$$

$$\left\langle \frac{\partial w^N(x, y, 0)}{\partial t}, q^N \right\rangle = \left\langle \widetilde{W}^1(x, y), q^N \right\rangle \ \ \forall\, q^N(x, y) \in Z_0^N. \tag{22}$$

Для вектор-функции вида $v = (v_1, v_2)^T = (v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})^T$ определим следующие нормы и полунормы:

$$\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 = \iint_\Omega (v, v)\, d\Omega = \|v_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{L_2(\Omega)}^2,\ \ \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|v_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

$$\|v_i\|_{L_2(\Omega)}^2 = \iint_\Omega [v_{i1}^2 + v_{i2}^2]\, d\Omega,$$

$$\|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial v_{i1}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{i1}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{i2}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{i2}}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega,\ \ i = 1, 2;$$

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2;\ \ \|v\|_{W_2^0(\Omega)}^2 = \|v\|_{L_2(\Omega)}^2;$$

$$\|v_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{(x, y) \in \overline{\Omega}} \left| v_{ij}(x, y) \right|,\ \ i, j = 1, 2;$$

$$\|v\|^2_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le|k|} \|D^\alpha v\|^2_{L_2(\Omega)}; \ \ D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}, \ \ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2,$$

k, α_1, α_2 — неотрицательные целые числа; $\|v\|^2_{L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega))} = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|v\|^2_{W_2^1(\Omega)}$.

В [1] получено оценку погрешности непрерывного по времени приближенного обобщенного решения

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (w(x,y,t) - w^N(x,y,t)) \right\|_{L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega))} +$$

$$+ \left\| w(x,y,t) - w^N(x,y,t) \right\|_{L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega))} \le Ch^k,$$

где h — максимальная длина сторон треугольников разбиения $\overline{\Omega}$, $k = 1, 2, 3$ — степень многочленов метода конечных элементов.

Для оценки дискретного по времени приближенного обобщенного решения используем схему Кранка–Николсона [3].

Пусть $T = J\tau$ для некоторого целого $J \ge 1$. Будем искать последовательность $\{W^j(x,y)\}_{j=0}^J \subset Z_t^N$ такую, чтобы W^j аппроксимировало $w^N \in Z^N$ оптимально в $W_2^1(\Omega)$. Определим следующие соотношения:

$$\partial_\tau P^j = \frac{1}{\tau}(P^{j+1} - P^j),$$

$$P^{j+1/2} = \frac{1}{2}(P^{j+1} + P^j), \ \ j = \overline{0, J-1}. \tag{23}$$

Схема Кранка–Николсона для задачи Коши (20)–(22) может быть записана в виде

$$\langle W^0, q^N \rangle = \langle \widetilde{W}^0, q^N \rangle \ \ \forall q^N(x,y) \in Z_0^N, \tag{24}$$

$$\langle \theta^0, q^N \rangle = \langle \widetilde{W}^1, q^N \rangle \ \ \forall q^N(x,y) \in Z_0^N, \tag{25}$$

$$m(\partial_\tau \theta^j, q^N) + \overline{m}(W^{j+1/2}; \theta^{j+1/2}, q^N) + a(W_1^{j+1/2}; W^{j+1/2}, q^N) =$$

$$= (\overline{F}^{j+1/2}, q^N) \ \ \forall q^N(x,y) \in Z_0^N, \tag{26}$$

$$W^{j+1} = W^j + \tau \theta^{j+1/2}, \ \ j = \overline{0, J-1}. \tag{27}$$

Здесь

$$W^{j+1}(x,y) = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i^{j+1} \Phi_i(x,y), \ \ \theta^{j+1}(x,y) = \sum_{i=1}^{N'} d_i^{j+1} \Phi_i(x,y), \ \ j = \overline{0, J-1}. \tag{28}$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$0 < \beta_0^i \le |b_i(x,y)| \le \beta_1^i, \ \ i = 1, 2; \ \ 0 < k_0 \le \left| K\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \right| \le k_1,$$

$$\left| K\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - K\left(x, y, \frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \right| \le k_2 \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left| \frac{\partial u_{1i}}{\partial x} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u_{1i}}{\partial y} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial y} \right| \right\},$$

$$\forall t \in [0,T] \ \ K\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \in C^1(\Omega),$$

$$K'_x\left(x,y,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial u_1}{\partial y}\right),\ K'_y\left(x,y,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\in L_\infty(\Omega_T),$$

$$\left|K^{-1}_{\text{ф},x}(u)\right|\le\widetilde{k},\ \left|K^{-1}_{\text{ф},y}(u)\right|\le\widetilde{k},$$

$$\left|K^{-1}_{\text{ф},x}(u)-K^{-1}_{\text{ф},x}(v)\right|\le\gamma_1|u-v|,\ \left|K^{-1}_{\text{ф},y}(u)-K^{-1}_{\text{ф},y}(v)\right|\le\gamma_2|u-v|\ \ \forall u\in Z,\ \ \forall v\in Z. \qquad (29)$$

Тогда справедлива теорема.

Теорема. Пусть $w(x,y,t)$ — обобщенное решение задачи (10)–(12) и $\{W^j(x,y)\}_{j=0}^J\subset Z_t^N$ — решение задачи (24)–(27). Предположим, что $w\in W_2^{k+1}(\Omega)$. Тогда существует константа $C=C(T)>0$, не зависящая от h, τ и такая, что

$$\max_{0\le j\le J}\|W^j-w^j\|_{W_2^1(\Omega)}\le C(h^k+\tau^2).$$

Доказательство. Запишем уравнение (10) при $t_{j+1/2}=(j+1/2)\tau$ в виде

$$m\left(\partial_\tau\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^j+\rho^j,q^N\right)+\overline{m}(w^{j+1/2}+\delta^j;\partial_\tau w^j+\sigma^j,q^N)+$$

$$+a(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j;w^{j+1/2}+\delta^j,q^N)=(\overline{F}^{\,j+1/2}+\gamma^j,q^N)\ \ \forall q^N\in Z_0^N,\ j=\overline{0,J-1}, \qquad (30)$$

где

$$\rho^j=O(\tau^2),\ \delta^j=O(\tau^2),\ \sigma^j=O(\tau^2),\ \gamma^j=O(\tau^2). \qquad (31)$$

Введем следующие обозначения:

$$\eta^j=w^j-\widetilde{w}^j,\ \xi^j=W^j-\widetilde{w}^j,\ p^j=\theta^j-\left(\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t}\right)^j. \qquad (32)$$

Здесь $\widetilde{w}^j\in Z^N$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{W}_1(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j;w_1^{j+1/2}+\delta_1^j,q_1^N)+\overline{\mathbf{W}}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j;w_2^{j+1/2}+\delta_2^j,q_2^N)+$$

$$+\beta_0\left\langle K\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j),\frac{\partial}{\partial y}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j)\right)(w^{j+1/2}+\delta^j),q^N\right\rangle=$$

$$=\mathbf{W}_1(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j;\widetilde{w}_1^{j+1/2}+\zeta_1^j,q_1^N)+\overline{\mathbf{W}}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j;\widetilde{w}_2^{j+1/2}+\zeta_2^j,q_2^N)+$$

$$+\beta_0\left\langle K\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j),\frac{\partial}{\partial y}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j)\right)(\widetilde{w}^{j+1/2}+\zeta^j),q^N\right\rangle$$

$$\forall q^N\in Z_0^N,\ j=\overline{0,J-1}, \qquad (33)$$

в котором

$$\zeta^j=O(\tau^2), \qquad (34)$$

$$\overline{\mathbf{W}}(w_1;w_2,q_2)=\iint_\Omega K\left(x,y,\frac{\partial w_1}{\partial x},\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial w_{21}}{\partial x}\frac{\partial q_{21}}{\partial x}+\frac{\partial w_{21}}{\partial y}\frac{\partial q_{21}}{\partial y}+\frac{\partial w_{22}}{\partial x}\frac{\partial q_{22}}{\partial x}+\frac{\partial w_{22}}{\partial y}\frac{\partial q_{22}}{\partial y}\right)d\Omega, \qquad (35)$$

$\mathbf{W}_1$ имеет вид (16), $\beta_0=\min\{\beta_0^1,\beta_0^2,k_0\}$.

Учитывая обозначения (32) и соотношения (26), (30), (15), (33), можем записать:

$$m(\partial_\tau p^j, q^N) + \overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \xi^j, q^N) + a(W_1^{j+1/2}; \xi^{j+1/2}, q^N) =$$

$$= m(\partial_\tau \theta^j, q^N) + \overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau W^j, q^N) + a(W_1^{j+1/2}; W^{j+1/2}, q^N) -$$

$$- m\left(\partial_\tau \left(\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}\right)^j, q^N\right) - \overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \widetilde{w}^j, q^N) - a(W_1^{j+1/2}; \widetilde{w}^{j+1/2}, q^N) =$$

$$= (\overline{F}^{j+1/2}, q^N) - m\left(\partial_\tau \left(\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}\right)^j, q^N\right) - \overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \widetilde{w}^j, q^N) -$$

$$- a(W_1^{j+1/2}; \widetilde{w}^{j+1/2}, q^N) = m\left(\partial_\tau \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^j + \rho^j, q^N\right) +$$

$$+ \overline{m}(w^{j+1/2} + \delta^j; \partial_\tau w^j + \sigma^j, q^N) + a(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j; w^{j+1/2} + \delta^j, q^N) -$$

$$- (\gamma^j, q^N) - m\left(\partial_\tau \left(\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}\right)^j, q^N\right) - \overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \widetilde{w}^j, q^N) -$$

$$- a(W_1^{j+1/2}; \widetilde{w}^{j+1/2}, q^N) = m\left(\partial_\tau \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^j + \rho^j, q^N\right) +$$

$$+ \overline{m}(w^{j+1/2} + \delta^j; \partial_\tau \eta^j + \sigma^j, q^N) + \overline{m}(w^{j+1/2} + \delta^j; \partial_\tau \widetilde{w}^j, q^N) -$$

$$- \overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \widetilde{w}^j, q^N) + \mathbf{W}_1(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j; \widetilde{w}_1^{j+1/2} + \zeta_1^j, q_1^N) -$$

$$- \mathbf{W}_1(W_1^{j+1/2}; \widetilde{w}_1^{j+1/2}, q_1^N) + \mathbf{W}_2(\eta^{j+1/2} + \delta^j, q^N) -$$

$$- \overline{\mathbf{W}}(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j; \eta_2^{j+1/2} + \delta_2^j - \zeta_2^j, q_2^N) -$$

$$- \beta_0 \left\langle K\left(x, y, \frac{\partial}{\partial x}(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j), \frac{\partial}{\partial y}(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j)\right)(\eta^{j+1/2} + \delta^j - \zeta^j), q^N \right\rangle - (\gamma^j, q^N)$$

$$\forall q^N \in Z_0^N, \quad j = \overline{0, J-1}. \tag{36}$$

В соотношении (36) введем обозначения:

$$D(w^j, W^j, \widetilde{w}^j, q^N) = \overline{m}(w^{j+1/2} + \delta^j; \partial_\tau \eta^j, q^N) + \overline{m}(w^{j+1/2} + \delta^j; \partial_\tau \widetilde{w}^j, q^N) -$$

$$- \overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \widetilde{w}^j, q^N) + \mathbf{W}_1(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j; \widetilde{w}_1^{j+1/2}, q_1^N) -$$

$$- \mathbf{W}_1(W_1^{j+1/2}; \widetilde{w}_1^{j+1/2}, q_1^N) + \mathbf{W}_2(\eta^{j+1/2}, q^N) - \overline{\mathbf{W}}(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j; \eta_2^{j+1/2}, q_2^N) -$$

$$- \beta_0 \left\langle K\left(x, y, \frac{\partial}{\partial x}(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j), \frac{\partial}{\partial y}(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j)\right)\eta^{j+1/2}, q^N \right\rangle,$$

$$d(\rho^j, \delta^j, \sigma^j, \zeta^j, q^N) = m(\rho^j, q^N) + \overline{m}(w^{j+1/2} + \delta^j; \sigma^j, q^N) +$$

$$+ \mathbf{W}_1(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j; \zeta_1^j, q_1^N) + \mathbf{W}_2(\delta^j, q^N) - \overline{\mathbf{W}}(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j; \delta_2^j - \zeta_2^j, q_2^N) -$$

$$- \beta_0 \left\langle K\left(x, y, \frac{\partial}{\partial x}(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j), \frac{\partial}{\partial y}(w_1^{j+1/2} + \delta_1^j)\right)(\delta^j - \zeta^j), q^N \right\rangle - (\gamma^j, q^N)$$

$$\forall q^N \in Z_0^N, \quad j = \overline{0, J-1}. \tag{37}$$

Тогда (36) с учетом (37) перепишется следующим образом:

$$m(\partial_\tau p^j, q^N) + \overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \xi^j, q^N) + a(W_1^{j+1/2}; \xi^{j+1/2}, q^N) =$$

$$= m\left(\partial_\tau \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^j, q^N\right) + D(w^j, W^j, \widetilde{w}^j, q^N) +$$

$$+ d(\rho^j, \delta^j, \sigma^j, \zeta^j, q^N) \quad \forall q^N \in Z_0^N, \quad j = \overline{0, J-1}. \tag{38}$$

Из соотношений (23), (27), (32) следует

$$\partial_\tau \xi^j = \theta^{j+1/2} - \partial_\tau \widetilde{w}^j = p^{j+1/2} + \partial_\tau \eta^j - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{j+1/2} - \kappa^j,$$

где

$$\kappa^j = \partial_\tau w^j - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{j+1/2} = O(\tau^2), \quad j = \overline{0, J-1}. \tag{39}$$

Тогда

$$\partial_\tau \xi^0 = p^0 + \frac{\tau}{2}\partial_\tau p^0 + \partial_\tau \eta^0 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{1/2} - \kappa^0,$$

$$\partial_\tau \xi^j = p^0 + \frac{\tau}{2}\partial_\tau p^j + \tau \sum_{k=0}^{j-1} \partial_\tau p^k + \partial_\tau \eta^j - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{j+1/2} - \kappa^j, \quad j = \overline{1, J-1}. \tag{40}$$

Рассмотрим функции $\varphi^i(x, y)$, $i = \overline{0, J}$, которые определены следующим образом:

$$\varphi^0(x, y) = 0, \quad \varphi^j(x, y) = \tau \sum_{k=0}^{j-1} \xi^{k+1/2}(x, y), \quad j = \overline{1, J}. \tag{41}$$

Тогда

$$\varphi^{1/2} = \frac{\tau}{2}\xi^{1/2}, \quad \varphi^{j+1/2} = \frac{\tau}{2}\xi^{j+1/2} + \tau \sum_{k=0}^{j-1} \xi^{k+1/2}, \quad j = \overline{1, J-1}. \tag{42}$$

Учитывая соотношения (40), (38), (42) и равенство

$$m\left(p^0 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^0, q^N\right) = m\left(\theta^0 - \left(\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}\right)^0 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^0, q^N\right) =$$

$$= m\left(\theta^0 - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^0, q^N\right) = 0 \;\; \forall q^N \in Z_0^N, \tag{43}$$

имеем

$$m(\partial_\tau \xi^0, q^N) + \overline{m}(W^{1/2}; \xi^{1/2}, q^N) + a(W_1^{1/2}; \varphi^{1/2}, q^N) =$$

$$= m\left(p^0 + \partial_\tau \eta^0 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{1/2} - \kappa^0, q^N\right) + \frac{\tau}{2}\left[m\left(\partial_\tau \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^0, q^N\right) + \right.$$

$$+ D(w^0, W^0, \widetilde{w}^0, q^N) + d(\rho^0, \delta^0, \sigma^0, \zeta^0, q^N) - \overline{m}(W^{1/2}; \partial_\tau \xi^0, q^N) -$$

$$\left. - a(W_1^{1/2}; \xi^{1/2}, q^N)\right] + \overline{m}(W^{1/2}; \xi^{1/2}, q^N) + a(W_1^{1/2}; \varphi^{1/2}, q^N) =$$

$$= m(\partial_\tau \eta^0 - \kappa^0, q^N) + \overline{m}(W^{1/2}; \xi^0, q^N) +$$

$$+ \frac{\tau}{2}(D(w^0, W^0, \widetilde{w}^0, q^N) + d(\rho^0, \delta^0, \sigma^0, \zeta^0, q^N)) \quad \forall q^N \in Z_0^N.$$

В общем случае из формул (38), (40), (42), (43) с учетом последнего соотношения получаем

$$m(\partial_\tau \xi^j, q^N) + \overline{m}(W^{j+1/2}; \xi^{j+1/2}, q^N) + a(W_1^{j+1/2}; \varphi^{j+1/2}, q^N) =$$

$$= m\left(p^0 + \partial_\tau \eta^j - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^{j+1/2} - \kappa^j, q^N\right) + \overline{m}(W^{j+1/2}; \xi^0, q^N) +$$

$$+\frac{\tau}{2}[m(\partial_\tau p^j, q^N) + \overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \xi^j, q^N) + a(W_1^{j+1/2}; \xi^{j+1/2}, q^N)] +$$

$$+\tau \sum_{k=0}^{j-1} [m(\partial_\tau p^k, q^N) + \overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \xi^k, q^N) + a(W_1^{j+1/2}; \xi^{k+1/2}, q^N)] =$$

$$= m(\partial_\tau \eta^j - \kappa^j, q^N) + \overline{m}(W^{j+1/2}; \xi^0, q^N) +$$

$$+\frac{\tau}{2}[D(w^j, W^j, \widetilde{w}^j, q^N) + d(\rho^j, \delta^j, \sigma^j, \zeta^j, q^N)] +$$

$$+\tau \sum_{k=0}^{j-1} [D(w^k, W^k, \widetilde{w}^k, q^N) + d(\rho^k, \delta^k, \sigma^k, \zeta^k, q^N) + \overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \xi^k, q^N) -$$

$$- \overline{m}(W^{k+1/2}; \partial_\tau \xi^k, q^N) + a(W_1^{j+1/2}; \xi^{k+1/2}, q^N) - a(W_1^{k+1/2}; \xi^{k+1/2}, q^N)]$$

$$\forall\, q^N \in Z_0^N, \quad j = \overline{0, J-1}. \tag{44}$$

Положим в (44) $q^N = \partial_\tau \varphi^j = \xi^{j+1/2}$, $j = \overline{0, J-1}$. Тогда (44) с учетом (23) и симметричности форм $a(u; v, v)$, $m(v, v)$ перепишется следующим образом:

$$\frac{1}{2\tau}[m(\xi^{j+1}, \xi^{j+1}) - m(\xi^j, \xi^j) + a(W_1^{j+1/2}; \varphi^{j+1}, \varphi^{j+1}) - a(W_1^{j+1/2}; \varphi^j, \varphi^j)] +$$

$$+\overline{m}(W^{j+1/2}; \xi^{j+1/2}, \xi^{j+1/2}) = m(\partial_\tau \eta^j - \kappa^j, \xi^{j+1/2}) + \overline{m}(W^{j+1/2}; \xi^0, \xi^{j+1/2}) +$$

$$+\frac{\tau}{2}[D(w^j, W^j, \widetilde{w}^j, \xi^{j+1/2}) + d(\rho^j, \delta^j, \sigma^j, \zeta^j, \xi^{j+1/2})] +$$

$$+\tau \sum_{k=0}^{j-1} [D(w^k, W^k, \widetilde{w}^k, \xi^{j+1/2}) + d(\rho^k, \delta^k, \sigma^k, \zeta^k, \xi^{j+1/2}) +$$

$$+\overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \xi^k, \xi^{j+1/2}) - \overline{m}(W^{k+1/2}; \partial_\tau \xi^k, \xi^{j+1/2}) + a(W_1^{j+1/2}; \xi^{k+1/2}, \xi^{j+1/2}) -$$

$$-a(W_1^{k+1/2}; \xi^{k+1/2}, \xi^{j+1/2})], \quad j = \overline{0, J-1}. \tag{45}$$

Оценим правую часть равенства (45) с учетом (29). Имеем

$$\left| m(\partial_\tau \eta^j - \kappa^j, \xi^{j+1/2}) \right| \le P_1 \|\partial_\tau \eta^j - \kappa^j\|_{L_2(\Omega)} \|\xi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left| \overline{m}(W^{j+1/2}; \xi^0, \xi^{j+1/2}) \right| \le P_2 \|\xi^0\|_{L_2(\Omega)} \|\xi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left| \sum_{k=0}^{j-1} (\overline{m}(W^{j+1/2}; \partial_\tau \xi^k, \xi^{j+1/2}) - \overline{m}(W^{k+1/2}; \partial_\tau \xi^k, \xi^{j+1/2})) \right| \le$$

$$\le 2P_2 \|\xi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)} \sum_{k=0}^{j-1} \|\partial_\tau \xi^k\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left| \sum_{k=0}^{j-1} (a(W_1^{j+1/2}; \xi^{k+1/2}, \xi^{j+1/2}) - a(W_1^{k+1/2}; \xi^{k+1/2}, \xi^{j+1/2})) \right| \le$$

$$\le 2P_3 \|\xi^{j+1/2}\|_{H_0^1(\Omega)} \sum_{k=0}^{j-1} \|\xi^{k+1/2}\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{46}$$

где $P_1 = \max\{\rho_{\text{ск}}(1-m), \rho_{\text{в}} m\}$, $P_2 = 2\rho_{\text{в}} g m^2 \widetilde{k}$, а P_3 зависит от k_1, β_1^1, β_1^2, m, $M^{\text{в}}$.

Далее, исходя из (37), (14), (16), (32), (35), оценим D и d. Получим

$$\left|\overline{m}\,(w^{j+1/2}+\delta^j;\partial_\tau\eta^j,\xi^{j+1/2})\right|\le P_2\,\|\partial_\tau\eta^j\|_{L_2(\Omega)}\,\|\xi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left|\overline{m}\,(w^{j+1/2}+\delta^j;\partial_\tau\widetilde{w}^j,\xi^{j+1/2})-\overline{m}\,(W^{j+1/2};\partial_\tau\widetilde{w}^j,\xi^{j+1/2})\right|\le$$

$$\le P_4\left(\|\delta^j\|_{L_2(\Omega)}+\|\eta^{j+1/2}-\xi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)}\right)\|\xi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left|\mathbf{W}_1(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j;\widetilde{w}_1^{j+1/2},\xi_1^{j+1/2})-\mathbf{W}_1(W_1^{j+1/2};\widetilde{w}_1^{j+1/2},\xi_1^{j+1/2})\right|\le$$

$$\le P_5\left(\|\delta^j\|_{H_0^1(\Omega)}+\|\eta^{j+1/2}-\xi^{j+1/2}\|_{H_0^1(\Omega)}\right)\|\xi^{j+1/2}\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\left|\mathbf{W}_2(\eta^{j+1/2},\xi^{j+1/2})\right|\le P_6\,\|\eta^{j+1/2}\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\xi^{j+1/2}\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\left|\overline{\mathbf{W}}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j;\eta_2^{j+1/2},\xi_2^{j+1/2})\right|\le k_1\,\|\eta^{j+1/2}\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\xi^{j+1/2}\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\left|\left\langle K\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j),\frac{\partial}{\partial y}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j)\right)\eta^{j+1/2},\xi^{j+1/2}\right\rangle\right|\le$$

$$\le k_1\,\|\eta^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)}\,\|\xi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left|m(\rho^j,\xi^{j+1/2})\right|\le P_1\,\|\rho^j\|_{L_2(\Omega)}\,\|\xi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left|\overline{m}(w^{j+1/2}+\delta^j;\sigma^j,\xi^{j+1/2})\right|\le P_2\,\|\sigma^j\|_{L_2(\Omega)}\,\|\xi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left|\mathbf{W}_1(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j;\zeta_1^j,\xi_1^{j+1/2})\right|\le P_7\,\|\zeta^j\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\xi^{j+1/2}\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\left|\mathbf{W}_2(\delta^j,\xi^{j+1/2})\right|\le P_6\,\|\delta^j\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\xi^{j+1/2}\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\left|\overline{\mathbf{W}}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j;\delta_2^j-\zeta_2^j,\xi_2^{j+1/2})\right|\le$$

$$\le k_1\left(\|\delta^j\|_{H_0^1(\Omega)}+\|\zeta^j\|_{H_0^1(\Omega)}\right)\|\xi^{j+1/2}\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\left|\left\langle K\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j),\frac{\partial}{\partial y}(w_1^{j+1/2}+\delta_1^j)\right)(\delta^j-\zeta^j),\xi^{j+1/2}\right\rangle\right|\le$$

$$\le k_1\left(\|\delta^j\|_{L_2(\Omega)}+\|\zeta^j\|_{L_2(\Omega)}\right)\|\xi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left|(\gamma^j,\xi^{j+1/2})\right|\le\|\gamma^j\|_{L_2(\Omega)}\,\|\xi^{j+1/2}\|_{L_2(\Omega)},\quad j=\overline{0,J-1},\tag{47}$$

где $P_4=2\rho_{\text{в}}gm^2\max\left\{\gamma_1\,\|\partial_\tau\widetilde{w}_{11}^j-\partial_\tau\widetilde{w}_{21}^j\|_{L_\infty(\Omega)},\gamma_2\,\|\partial_\tau\widetilde{w}_{12}^j-\partial_\tau\widetilde{w}_{22}^j\|_{L_\infty(\Omega)}\right\}$, константа P_5 зависит от k_2, β_1^1, β_1^2, а также норм $\left\|\dfrac{\partial\widetilde{w}_{1i}^{j+1/2}}{\partial x}\right\|_{L_\infty(\Omega)}$, $\left\|\dfrac{\partial\widetilde{w}_{1i}^{j+1/2}}{\partial y}\right\|_{L_\infty(\Omega)}$, $i=1,2$, P_6 — от m, $M^{\text{в}}$, P_7 — от k_1, β_1^1, β_1^2.

Таким образом, из оценок (47) и неравенства $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ получим

$$\left| D(w^j, W^j, \widetilde{w}^j, \xi^{j+1/2}) + d(\rho^j, \delta^j, \sigma^j, \zeta^j, \xi^{j+1/2}) \right| \le c_1 \|\xi^{j+1/2}\|^2_{W_2^1(\Omega)} +$$
$$+ c_2 \|\eta^{j+1/2}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c_3 \|\partial_\tau \eta^j\|^2_{L_2(\Omega)} + c_4 \|\delta^j\|^2_{W_2^1(\Omega)} +$$
$$+ c_5 \|\zeta^j\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c_6 \|\gamma^j\|^2_{L_2(\Omega)} + c_7 \|\rho^j\|^2_{L_2(\Omega)} + c_8 \|\sigma^j\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad j = \overline{0, J-1}, \qquad (48)$$

где c_i, $i = \overline{1,8}$, выражаются через β_0, k_1, P_l, $l = \overline{1,7}$.

Аналогично оценке (48) записывается оценка

$$\left| \sum_{k=0}^{j-1} [D(w^k, W^k, \widetilde{w}^k, \xi^{j+1/2}) + d(\rho^k, \delta^k, \sigma^k, \zeta^k, \xi^{j+1/2})] \right| \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{j-1} \Big[\hat{c}_1 \|\xi^{j+1/2}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \widetilde{c}_1 \|\xi^{k+1/2}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c_2 \|\eta^{k+1/2}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c_3 \|\partial_\tau \eta^k\|^2_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ c_4 \|\delta^k\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c_5 \|\zeta^k\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c_6 \|\gamma^k\|^2_{L_2(\Omega)} + c_7 \|\rho^k\|^2_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ c_8 \|\sigma^k\|^2_{L_2(\Omega)} \Big], \quad j = \overline{1, J-1}. \qquad (49)$$

Учитывая в соотношении (45) положительную определенность формы $a(u; v, v)$, неотрицательную определенность $\overline{m}(u; v, v)$ [1], а также неравенства (46), (48), (49), получаем

$$m(\xi^{j+1}, \xi^{j+1}) - m(\xi^j, \xi^j) \le 2\tau \Bigg(a_0 \|\xi^0\|^2_{L_2(\Omega)} + a_1 \sum_{k=0}^{j-1} \|\partial_\tau \xi^k\|^2_{L_2(\Omega)} + a_2 \|\kappa^j\|^2_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{j} \Big[a_3 \|\xi^{k+1/2}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + a_4 \|\partial_\tau \eta^k\|^2_{L_2(\Omega)} + c_2 \|\eta^{k+1/2}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c_4 \|\delta^k\|^2_{W_2^1(\Omega)} +$$
$$+ c_5 \|\zeta^k\|^2_{W_2^1(\Omega)} + c_6 \|\gamma^k\|^2_{L_2(\Omega)} + c_7 \|\rho^k\|^2_{L_2(\Omega)} + c_8 \|\sigma^k\|^2_{L_2(\Omega)} \Big] \Bigg), \quad j = \overline{0, J-1}. \quad (50)$$

Просуммируем обе части полученного неравенства по j от 0 до $l-1$, $1 \le l \le J$, и учтем оценки $m(v, v) \ge \min\{\rho_{\text{ск}}(1-m), \rho_{\text{в}} m\} \|v\|^2_{L_2(\Omega)}$, $\|u^{j+1/2}\|^2 \le 1/2(\|u^j\|^2 + \|u^{j+1}\|^2)$, $\|\partial_\tau u^j\|^2 \le c(T)(\|u^j\|^2 + \|u^{j+1}\|^2)$. Имеем

$$\|\xi^l\|^2_{L_2(\Omega)} \le \widetilde{a}_0 \|\xi^0\|^2_{L_2(\Omega)} + \widetilde{a}_1(T) \tau \sum_{j=0}^{l} \left(\|\xi^j\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|\eta^j\|^2_{W_2^1(\Omega)} \right) +$$
$$+ \widetilde{a}_2 \tau \sum_{j=0}^{l-1} \Bigg(\|\delta^j\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|\zeta^j\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|\gamma^j\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\rho^j\|^2_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ \|\kappa^j\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\sigma^j\|^2_{L_2(\Omega)} \Bigg), \quad 1 \le l \le J. \qquad (51)$$

Очевидно, что $\exists$ const $L_1 = L_1(T) > 0$, для которой справедливо неравенство $\|\xi^l\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le L_1 \tau \sum_{j=0}^{l} \|\xi^j\|^2_{H_0^1(\Omega)}$. Использовав этот факт и применив к (51) дискретный аналог леммы Гроноулла–Беллмана [4], получим

$$\|\xi^l\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \hat{c}\left(\tilde{a}_0 \|\xi^0\|^2_{L_2(\Omega)} + \tilde{a}_1(T)\tau \sum_{j=0}^{l} \|\eta^j\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \tilde{a}_2 \tau \sum_{j=0}^{l-1}\left(\|\delta^j\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \|\zeta^j\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|\gamma^j\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\rho^j\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\kappa^j\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\sigma^j\|^2_{L_2(\Omega)} \right)\right), \ 1 \le l \le J. \quad (52)$$

Согласно [5] для η справедливы оценки

$$\|\eta\|_{L_2(\Omega)}(t) \le S_1 h^{k+1} \|w\|_{W_2^{k+1}(\Omega)}(t),$$

$$\|\eta\|_{H_0^1(\Omega)}(t) \le S_2 h^k \|w\|_{W_2^{k+1}(\Omega)}(t) \ \ \forall\, t \in (0, T],$$

где S_1, S_2 — константы. Тогда имеют место и оценки

$$\|\eta^j\|_{L_2(\Omega)} \le S_1 h^{k+1} \|w^j\|_{W_2^{k+1}(\Omega)},$$

$$\|\eta^j\|_{H_0^1(\Omega)} \le S_2 h^k \|w^j\|_{W_2^{k+1}(\Omega)}, \ 0 \le j \le J. \quad (53)$$

Из соотношений (32), (11), (24), (53) следует

$$\|\xi^0\|_{L_2(\Omega)} \le \|W^0 - \tilde{w}^0\|_{L_2(\Omega)} \le \|W^0 - w^0\|_{L_2(\Omega)} + \|w^0 - \tilde{w}^0\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \|\eta^0\|_{L_2(\Omega)} \le S_1 h^{k+1} \|w^0\|_{W_2^{k+1}(\Omega)}. \quad (54)$$

Тогда в неравенстве (52) с учетом оценок (39), (31), (53), (54) будем иметь

$$\|\xi^l\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \tilde{c}_0 T\, O(\tau^4) + \tilde{c}_1 T \sum_{j=0}^{l} (S_1^2 h^{2(k+1)} + S_2^2 h^{2k}) \|w^j\|^2_{W_2^{k+1}(\Omega)}, \ 1 \le l \le J.$$

Из последней оценки и (32) получим

$$\|W^l - w^l\|_{W_2^1(\Omega)} \le \|\xi^l\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\eta^l\|_{W_2^1(\Omega)} \le$$

$$\le \bar{c}_0 \sqrt{T}\, O(\tau^2) + (S_1^2 h^{2(k+1)} + S_2^2 h^{2k})^{1/2} \|w^l\|_{W_2^{k+1}(\Omega)} +$$

$$+ \bar{c}_1 \sqrt{T} \left(\sum_{j=0}^{l} (S_1^2 h^{2(k+1)} + S_2^2 h^{2k}) \|w^j\|^2_{W_2^{k+1}(\Omega)} \right)^{1/2}, \ 1 \le l \le J. \quad (55)$$

Из оценки (55) следует справедливость теоремы.

Таким образом, для полностью дискретного приближенного обобщенного решения задачи (1), (2), (5)–(8) получена оценка его скорости сходимости в пространстве $W_2^1(\Omega)$ к соответствующему обобщенному решению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скопецкий В.В., Марченко О.А., Самойленко Т.А. Приближенное решение нелинейной системы уравнений для двухфазных сред // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 4. — С. 524–536.
2. Зарецкий Ю. К. Лекции по современной механике грунтов. — Рн/Д.: Изд-во Ростов. ун-та, 1989. — 608 с.
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. — К.: Наук. думка, 1998. — 615 с.
4. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — 215 с.
5. Wheeler M.F. A priori L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — **10**, N 4. — P. 723–759.

Поступила 19.09.2008