УДК 517.9, 504.052

П.О. КАСЬЯНОВ, Н.В. ЗАДОЯНЧУК, В.В. ЯСИНСКИЙ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА[1]

Ключевые слова: *дифференциально-операторное уравнение, λ_0-псевдомонотонное отображение, периодическое решение*.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании математических моделей нелинейных процессов и полей физики, химической кинетики, геофизики в задачах теории оптимального управления возникают такие математические объекты, как операторные дифференциальные уравнения [1–20]. В физике и механике импульсом к изучению эволюционных уравнений и включений второго порядка стали прикладные задачи, связанные с фазовыми переходами и односторонней проводимостью границ веществ, распространением электромагнитных, акустических, вибро-, гидро- и сейсмоакустических волн, квантово-механическими эффектами [2, 8, 10]. Исследование уравнений, описывающих волновые процессы с «нелинейным трением», достаточно сложно и требует особой техники [7]. Последние работы в данном направлении охватывают квазилинейные уравнения с однородными граничными условиями и линеаризованные уравнения с нелинейными условиями на границе области, которые сводятся к нелинейным дифференциально-операторным уравнениям и включениям. Однако линеаризованные объекты не всегда адекватно описывают исследуемый процесс. Поэтому возникает необходимость в рассмотрении эволюционных включений и вариационных неравенств с принципиально более узким набором свойств. В [1] изучались такие объекты для монотонных отображений, в [3, 4] — для отображений с полуограниченной вариацией. Последние разработки по данной тематике касаются операторных дифференциальных уравнений и включений с глобально ограниченной по фазовой переменной немонотонной нелинейностью [5, 6].

В настоящей статье рассматриваются периодические решения эволюционных уравнений гиперболического типа с W_{λ_0}-псевдомонотонными отображениями. Цель работы заключается в развитии данной теории для эволюционных уравнений второго порядка с W_{λ_0}-псевдомонотонными отображениями, а также в получении новых теорем о разрешимости и обосновании конструктивных методов аппроксимации таких решений. Результаты работы могут быть применены, в частности, для исследования процессов динамики структуры системы знаний, накопленных большими группами людей в процессе целенаправленного обучения [7, 16, 21, 22].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть V — рефлексивное банахово пространство над полем действительных чисел; H — гильбертово пространство над полем действительных чисел со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$, отождествленное с сопряженным пространством H^*. Тогда получим цепочку непрерывных и плотных вложений

$$V \subset H \subset V^*,$$

где V^* — сопряженное с V пространство относительно $(\cdot\,,\cdot)$.

---

[1] Работа частично поддержана ГФФИ–БФФИ, грант № Ф29.1/025.

Введем обозначение $S=[0,T]$ — конечный интервал времени,

$$X=L_{p_0}(S;H)\cap L_p(S;V),$$

$$X^*=L_{q_0}(S;H)+L_q(S;V^*)\,,\ Y\equiv Y^*=L_2(S;H),$$

где $p_0\ge 2,\ 1<p\le p_0,\ \dfrac{1}{p_0}+\dfrac{1}{q_0}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.$

Линейное пространство $W=\{y\in X\mid y'\in X^*\}$ является рефлексивным банаховым пространством [13] относительно нормы $\|y\|_W=\|y\|_X+\|y'\|_{X^*}$, где y' — производная элемента $y\in X$ в смысле пространства распределений $D^*(S;V^*)$ [1].

Для произвольных $v\in X$ и $f\in X^*$: $f=f_0+f_1,\ f_0\in L_{q_0}(S;H),\ f_1\in L_q(S;V^*)$ рассмотрим

$$\langle f,v\rangle=\langle f,v\rangle_X=\int_S(f_0(\tau),v(\tau))_H\,d\tau+\int_S\langle f_1(\tau),v(\tau)\rangle_V\,d\tau=\int_S(f(\tau),v(\tau))d\tau\,.$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_V:V^*\times V\to\mathbb{R}$ — каноническое спаривание, совпадающее на $H\times V$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ в H [13].

Для отображений $A,B:X\to X^*$ рассмотрим задачу

$$\begin{cases}u''+A(u')+B(u)=f,\\ u(0)=u(T),\ u'(0)=u'(T),\quad u\in C(S;V),\ u'\in W\subset C(S;H),\end{cases}\tag{1}$$

где $f\in X^*$ — произвольный фиксированный элемент. Цель данной работы состоит в доказательстве разрешимости проблемы (1).

КЛАССЫ ОДНОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПСЕВДОМОНОТОННОГО ТИПА

Пусть X, X^*, W — пространства, описанные ранее. Рассмотрим классы однозначных отображений.

Определение 1. Отображение $A:X\to X^*$ называется:

1) λ-псевдомонотонным на W, если для любой последовательности $\{y_n\}_{n\ge1}\subset W$ такой, что $y_n\to y$ слабо в X при $n\to\infty$, $y_n'\to y'$ слабо в X^* при $n\to\infty$, из неравенства

$$\varlimsup_{n\to\infty}\langle A(y_n),y_n-y\rangle_X\le 0\tag{2}$$

следует, что можно выделить такую подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k\ge1}\subset\{y_n\}_{n\ge1}$, что

$$\varliminf_{k\to\infty}\langle A(y_{n_k}),y_{n_k}-w\rangle_X\ge\langle A(y),y-w\rangle_X\quad\forall w\in W;\tag{3}$$

2) λ_0-псевдомонотонным на W, если для произвольной последовательности $\{y_n\}_{n\ge1}\subset W$ такой, что $y_n\to y$ слабо в X, $A(y_n)\to d$ слабо в X^*, $y_n'\to y'$ слабо в X^* при $n\to\infty$, из неравенства (2) следует, что можно выделить такую подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k\ge1}\subset\{y_n\}_{n\ge1}$, что выполняется неравенство (3).

Заметим, что идея перехода к подпоследовательностям в определении однозначного псевдомонотонного оператора принадлежит И.В. Скрыпнику [19].

Утверждение 1 [18, с. 65]. Пусть $A,B:X\to X^*$ — λ-псевдомонотонные на W отображения. Тогда отображение $C=A+B$ $(C(y)=A(y)+B(y)\ \forall y\in X)$ является λ-псевдомонотонным на W.

Замечание 1. Для λ_0-псевдомонотонных отображений выполняется аналогичное утверждение при условии, что один из операторов ограничен [11, с. 306].

Определение 2. Будем считать, что действительная функция двух переменных $C:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ принадлежит классу Φ, если $C(r_1;\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ является непрерывной функцией при каждом $r_1\ge 0$, причем

$$\tau^{-1}C(r_1;\tau r_2)\to 0,\ \tau\to 0+\ \ \forall r_1, r_2\ge 0.$$

Определение 3. Отображение $A:X\to X^*$ называется оператором с (X,W)-полуограниченной вариацией ((X,W)-п.о.в.), если $\forall R>0$, $\forall y_1, y_2\in X$ таких, что $\|y_i\|_X\le R$, $i=1,2$, справедливо неравенство

$$\langle Ay_1, y_1-y_2\rangle_X\ \ge\langle Ay_2, y_1-y_2\rangle_X - C(R;\|y_1-y_2\|'_W). \qquad (4)$$

Здесь $C\in\Phi$, а полунорма $\|\cdot\|'_W$ компактная относительно $\|\cdot\|_W$ на W и непрерывная относительно $\|\cdot\|_X$ на X.

Определение 4. Оператор $A:X\to X^*$ называется радиально непрерывным, если для любых фиксированных $u,v\in X$ действительная функция $s\to\langle A(u+sv), v\rangle_X$ непрерывна на $[0,1]$.

Определение 5. Оператор $A:X\to X^*$ называется деминепрерывным, если из $u_n\to u$ в X следует, что Au_n слабо сходится к Au в X^*.

Замечание 2. Операторы с $(X;W)$-п.о.в. впервые введены Ю.А. Дубинским в [9], а для многозначных отображений — в работах [10, 11].

Утверждение 2 [18, с. 67]. Имеет место импликация

$$A \text{ — радиально непрерывный оператор с } (X;W)\text{-п.о.в} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \text{ — } \lambda_0\text{-псевдомонотонный на } W \text{ оператор.}$$

Лемма 1. Пусть $A_1, A_2: X\to X^*$ — операторы с $(X;W)$-п.о.в. Тогда их сумма $A:X\to X^*$ также является оператором с $(X;W)$-п.о.в.

Доказательство. Пусть для оператора $A_i: X\to X^*$, некоторой функции $C_i:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ из определения 3 и полунормы $\|\cdot\|_i$, компактной относительно $\|\cdot\|_W$ на W и непрерывной относительно $\|\cdot\|_X$ на X, выполняется (4), $i=1,2$. Положим

$$\forall r,t\ge 0\quad C_A(r,t)=t\widetilde{c}_1(r,t)+t\widetilde{c}_2(r,t),$$

где для всех $r,t\ge 0$

$$\widetilde{c}_i(r,t):=\begin{cases}\sup\limits_{s\in(0,t]}\dfrac{C_i(r,s)}{s}, & t>0,\\ 0, & t=0,\end{cases}\qquad i=1,2.$$

Заметив, что для $r\ge 0$ функция $\mathbb{R}_+\ni t\to\widetilde{c}_i(r,t)\in\mathbb{R}$ монотонно не убывающая, непрерывная $\forall r\ge 0$, $\widetilde{c}_i(r,t)\to 0$ при $t\searrow 0+$, и положив $\|\cdot\|:=\|\cdot\|_1+\|\cdot\|_2$, получим, что для всех $R>0$ и $y_1, y_2\in X$ таких, что $\|y_i\|_X\le R$, $i=1,2$, справедливо неравенство

$$\langle Ay_1, y_1-y_2\rangle_X\ \ge$$
$$\ge\langle Ay_2, y_1-y_2\rangle_X-\|y_1-y_2\|_1\,\widetilde{c}_1(R,\|y_1-y_2\|_1)-$$
$$-\|y_1-y_2\|_2\,\widetilde{c}_2(R,\|y_1-y_2\|_2)\ge$$
$$\ge\langle Ay_2, y_1-y_2\rangle_X-C_A(R;\|y_1-y_2\|).$$

Функция C_A удовлетворяет всем свойствам определения 3, полунорма $\|\cdot\|$ — компактная относительно $\|\cdot\|_W$ на W и непрерывная относительно $\|\cdot\|_X$ на X.

Лемма доказана.

Определение 6. Отображение $A:X\to X^*$ называется коэрцитивным, если существует определенная на $[0,\infty)$ действительная функция γ такая, что $\lim\limits_{s\to\infty}\gamma(s)=+\infty$ и

$$\langle Au,u\rangle_X\ \ge\gamma(\|u\|_X)\|u\|_X\quad\forall u\in X.$$

Определение 7. Отображение $A: X \to X^*$ называется монотонным, если

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

Определение 8. Пусть $D(A) \subset X$ — непустое множество. Оператор $A: D(A) \to X^*$ называется максимально монотонным, если он монотонен на $D(A)$ и из того, что

$$\langle f - Au, v - u \rangle_X \geq 0 \quad \forall u \in D(A),$$

следует $v \in D(A)$, $Av = f$, где $f \in X^*$, $v \in X$, а $D(A)$ — область определения оператора A.

Определение 9. Отображение $A: X \to X^*$ называется отображением типа Вольтерра, если для произвольных фиксированных $u, v \in X$, $t \in S$ из равенства $u(s) = v(s)$ для почти всех $s \in [0, t]$ следует, что $(Au)(s) = (Av)(s)$ для почти всех $s \in [0, t]$.

Определение 10. Отображение $A: X \to X^*$ называется локально ограниченным, если $\forall\, y \in X \; \exists\, m > 0, M > 0: \| A(\xi) \|_+ \leq M$ для всех $\xi \in X : \| y - \xi \|_X \leq m$.

Определение 11. Отображение $A: X \to X^*$ называется конечномерно локально ограниченным, если для произвольного конечномерного пространства $F \subset X$ сужение A на F локально ограничено.

Определение 12. Отображение $A: X \to X^*$ называется квазиограниченным, если для некоторого непустого ограниченного подмножества $B \subset X$ и некоторого $k > 0$ из неравенства $\langle A(y), y \rangle_X \leq k \quad \forall\, y \in B$ следует существование такого $K > 0$, что $\| A(y) \|_{X^*} \leq K \quad \forall\, y \in B$.

Приведем классы λ_0-псевдомонотонных на W отображений.

Определение 13. Отображение $A: X \to X^*$ называется оператором вариационного исчисления на W, если оно допускает представление вида $A(y) = \overline{A}(y, y)$, где отображение $\overline{A}: X \times X \to X^*$ удовлетворяет следующим свойствам:

а) для любого $w \in W$ $\overline{A}(w, \cdot)$ — радиально непрерывный оператор с (X, W)-п.о.в.;

б) для любого фиксированного $w \in W$ отображение $W \ni y \mapsto \overline{A}(y, w) \in X^*$ ограниченное;

в) из того, что $y_n \to y$ слабо в W при $n \to \infty$,

$$\langle \overline{A}(y_n, y_n) - \overline{A}(y_n, y), y_n - y \rangle_X \to 0, \; n \to \infty,$$

следует существование такой подпоследовательности $\{ y_{n_k} \}_{k \geq 1} \subset \{ y_n \}_{n \geq 1}$, что $\forall w \in W$ $\overline{A}(y_{n_k}, w) \to \overline{A}(y, w)$ слабо в X^* при $k \to \infty$;

г) если $y_n \to y$ слабо в W при $n \to \infty$ и $\overline{A}(y_n, w) \to d(w)$ слабо в X^* при $n \to \infty$ $\forall \omega \in X$, то найдется такая подпоследовательность $\{ y_{n_k} \}_{k \geq 1} \subset \{ y_n \}_{n \geq 1}$, для которой $\langle \overline{A}(y_{n_k}, w), y_{n_k} \rangle_X \to \langle d(w), y \rangle_X$ при $k \to \infty$ $\forall w \in X$.

Утверждение 3 [18, с. 69]. Пусть $A_1, A_2 : X \to X^*$ — операторы вариационного исчисления на W. Тогда $A = A_1 + A_2$ — оператор вариационного исчисления на W.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 2. Пусть $A_1 : X \to X^*$ — радиально непрерывный оператор с $(X; W)$-п.о.в., $A_2 : X \to X^*$ удовлетворяет условиям:

1) оператор $A_2 : W \to X^*$ ограничен;

2) если $y_n \to y$ слабо в W при $n \to \infty$,

$$\langle A_2(y_n) - A_2(y), y_n - y \rangle_X \to 0, \; n \to \infty,$$

то найдется такая подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k\ge1}\subset\{y_n\}_{n\ge1}$, для которой $A_2(y_{n_k})\to A_2(y)$ слабо в X^* при $k\to\infty$;

3) если $y_n\to y$ слабо в W при $n\to\infty$ и $A_2(y_n)\to d_2$ слабо в X^* при $n\to\infty$, то найдется такая подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k\ge1}\subset\{y_n\}_{n\ge1}$, для которой $\langle A_2(y_{n_k}), y_{n_k}\rangle_X \to\langle d_2, y\rangle_X \to 0$ при $k\to\infty$.

Тогда $A=A_1+A_2$ $(A(y)=\overline{A}(y,y)=A_1(y)+A_2(y)$, $\overline{A}(u,v)=A_1(v)+A_2(u)$ $\forall u,v\in X)$ является оператором вариационного исчисления на W.

Доказательство. Условие а). Для каждого $v\in W$ $\overline{A}(v,\cdot): X\to X^*$ — радиально непрерывный оператор с $(X;W)$-п.о.в. Радиальная непрерывность — следствие такого же свойства для A_1. Далее, $\forall\, y_1, y_2\in X: \|y_1\|_X\le R$, $\|y_2\|_X\le R$ имеем

$$\langle \overline{A}(v,y_1)-\overline{A}(v,y_2), y_1-y_2\rangle_X =$$
$$=\langle (A_1(y_1)+A_2(v))-(A_1(y_2)+A_2(v)), y_1-y_2\rangle_X =$$
$$=\langle A_1(y_1)-A_1(y_2), y_1-y_2\rangle_X \ge -C(R,\|y_1-y_2\|'_W).$$

Условие б) непосредственно следует из условия 1 леммы 2.

Условие в). Пусть $y_n\to y$ слабо в $W\subset X$ при $n\to\infty$,

$$0\leftarrow\langle\overline{A}(y_n,y_n)-\overline{A}(y_n,y), y_n-y\rangle_X =\langle A_1(y_n)-A_1(y), y_n-y\rangle_X,\ n\to\infty.$$

Тогда из условия 1 данной леммы и теоремы Банаха–Алаоглу вытекает, что существует подпоследовательность $\{y_m\}_m\subset\{y_n\}_{n\ge1}$ и элемент $d_2\in X^*$ такие, что $A_2(y_m)\to d_2$ слабо в X^*. Из условия 3 леммы 2 получим, что существует подпоследовательность $\{y_k\}_k\subset\{y_m\}_m$ такая, что

$$\langle A_2(y_k)-A_2(y), y_k-y\rangle_X =\langle A_2(y_k), y_k\rangle_X -\langle A_2(y_k), y\rangle_X +$$
$$+\langle A_2(y), y-y_k\rangle_X \to\langle d_2, y\rangle_X -\langle d_2, y\rangle_X =0.$$

Следовательно, в силу условия 2 данной леммы найдется такая подпоследовательность $\{y_{n_l}\}_{l\ge1}\subset\{y_k\}_k$, что $A_2(y_{n_l})\to A_2(y)$ слабо в X^*, если $l\to+\infty$. Таким образом, для произвольного фиксированного $w\in W$

$$\overline{A}(y_{n_l},w)=A_1(w)+A_2(y_{n_l})\to A_1(w)+A_2(y)=\overline{A}(y,w)$$

слабо в X^*, если $l\to+\infty$.

Условие г). Пусть $y_n\to y$ слабо в W, $\overline{A}(y_n,\omega)\to d(\omega)$ слабо в X^* для каждого $\omega\in W$. Поскольку $\overline{A}(y_n,\omega)=A_1(\omega)+A_2(y_n)$, то $A_2(y_n)\to\widetilde{d}(\omega)$ слабо в X^*, где $\widetilde{d}(\omega)=d(\omega)-A_1(\omega)$. Но тогда, в силу условия 3 данной леммы, имеем, что существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k\ge1}\subset\{y_n\}_{n\ge1}$ такая, что

$$\langle \mathrm{A}_2(\mathrm{y}_{\mathrm{n_k}}), \mathrm{y}_{\mathrm{n_k}}\rangle_{\mathrm{X}} \to\langle\widetilde{\mathrm{d}}(\omega), \mathrm{y}\rangle_{\mathrm{X}} =\langle \mathrm{d}(\omega)-\mathrm{A}_1(\omega), \mathrm{y}\rangle_{\mathrm{X}}$$

или

$$\langle \overline{A}(y_{n_k},\omega), y_{n_k}\rangle_X =\langle A_1(\omega)+A_2(y_{n_k}), y_{n_k}\rangle_X \to\langle d(\omega), y\rangle_X.$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение является прямым следствием леммы 2.

Лемма 3. Пусть $A_1: X\to X^*$ — оператор из леммы 2, $A_2: Y\to Y^*$ — деминепрерывный оператор, ограниченный как такой, что действует из W в X^*, и пространство W компактно вложено в Y. Тогда оператор $A=A_1+A_2$ — оператор вариационного исчисления.

Доказательство. Для оператора $A_2: Y\to Y^*$ проверим выполнение условий леммы 2:

1) оператор $A_2: W\to X^*$ ограничен по условию леммы;

2) пусть $y_n\to y$ слабо в W, тогда $y_n\to y$ сильно в Y, так как W компактно вложено в Y; поскольку оператор $A_2: Y\to Y^*$ деминепрерывный, $A_2(y_n)\to A_2(y)$ сла-

бо в $Y^* \subset X^*$ при $n \to \infty$ и выполняется $\langle A_2(y_n) - A_2(y), y_n - y \rangle_Y \to 0$; поэтому найдется такая подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k\ge 1} \subset \{y_n\}_{n\ge 1}$, для которой $A_2(y_{n_k}) \to A_2(y)$ слабо в X^*;

3) пусть $y_n \to y$ слабо в W при $n \to \infty$ и $A_2(y_n) \to d_2$ слабо в X^* при $n \to \infty$; тогда за счет компактности вложения W в Y и деминепрерывности $A_2 : Y \to Y^*$ имеем $y_n \to y$ сильно в Y и $A_2(y_n) \to A_2(y)$ слабо в $Y^* \subset X^*$; следовательно, $A_2(y) = d_2$,

$$\langle A_2(y_n), y_n \rangle_X = \langle A_2(y_n), y_n \rangle_Y \to \langle A_2(y), y \rangle_Y =$$
$$= \langle A_2(y), y \rangle_X = \langle d_2, y \rangle_X, \; n \to \infty.$$

Согласно лемме 2 оператор $A = A_1 + A_2$ $(A(y) = \overline{A}(y, y) = A_1(y) + A_2(y)$, $\overline{A}(u, v) = A_2(u) + A_1(v))$ является оператором вариационного исчисления на W.

Лемма доказана.

Теорема 1 [12, теорема 3.1]. Пусть $\Lambda : D(\Lambda) \to X^*$ — радиально непрерывный максимальный монотонный оператор с линейной областью определения $D(\Lambda) \subset X$ и $A : X \to X^*$ удовлетворяет следующим условиям:

а) A — λ_0-псевдомонотонный на W;

б) A — квазиограниченный и конечномерно локально ограниченный;

в) A — ослабленно коэрцитивный, т.е.

$$\forall f \in X^* \;\; \exists R > 0 : \langle A(y) - f, y \rangle \ge 0.$$

Тогда для любого $f \in X^*$ уравнение

$$\Lambda y + A y = f \tag{5}$$

имеет решение $y \in D(\Lambda)$, которое можно получить с помощью метода сингулярных возмущений.

Теорема 2. Пусть оператор $A : X \to X^*$ удовлетворяет условиям а)–в) теоремы 1, а оператор $B : X \to X^*$ — оператор со свойством

$$(Bu)(t) = B_0 u(t) \;\; \forall u \in X, \;\; \forall t \in S,$$

где $B_0 : V \to V^*$ — линейный ограниченный положительно-определенный оператор. Тогда при любом $f \in X^*$ задача (1) имеет решение. Если A еще и строго монотонный, то это решение единственно.

Замечание 3. Если функция $u \in C(S; V)$ с $u' \in X$ удовлетворяет уравнению $u'' + Au' + Bu = f$ (в $D^*(S; V^*)$), то $u'' \in X^*$ и $u' \in W \subset C(S; H)$. Поэтому условие $u'(0) = u'(T)$ имеет смысл.

Доказательство. При рассмотрении задачи (1) целесообразно ввести пространство

$$X_0 = \left\{ u \mid u \in X, \int_S u(s) ds = 0 \right\},$$

которое является замкнутым подпространством в X. Используя теорему Хана–Банаха, нетрудно убедиться, что сопряженное к X_0 пространство X_0^* можно трактовать как фактор-пространство пространства X^* по подпространству элементов, обращающихся в ноль на X_0. Если $w \in X^*$ превращается в ноль на X_0, то для $\varphi \in D(S)$ и $x \in V$ в силу включения $\varphi' x \in X_0$ имеем

$$(w'(\varphi), x) = -(w(\varphi'), x) = -\int_S (w(s), \varphi'(s) x) ds = 0,$$

т.е. w постоянная. (Здесь $w'(\varphi)$ — значение распределения $w' \in D^*(S; V^*)$ на элементе $\varphi \in D(S)$ и $w(\varphi')$ — значения $w \in D^*(S; V^*)$ на $\varphi' \in D(S)$.) Обратно, каждая постоянная функция $w \in X^*$ обращается в ноль на X_0. Итак, пространство X_0^* состоит из классов функций из X^*, которые отличаются лишь на постоянную функцию. В каждом таком классе существует единственный элемент $w \in X^*$, который имеет свойство $\int\limits_S w(s)ds = 0$. Поэтому сопряженное к X_0 пространство X_0^* можно отождествить с пространством

$$(X^*)_0 = \left\{ w \mid w \in X^*, \int\limits_S w(s)ds = 0 \right\}.$$

При этом скалярное произведение между элементами $w \in X_0^*$ и $u \in X_0$ задается формулой

$$\langle w, u \rangle = \int\limits_S (w(s), u(s))ds.$$

Пусть I_0 — (непрерывное) вложение X_0 в X и $I_0^* : X^* \to X_0^*$ — сопряженный к I_0 оператор. Для $w \in X^*$ и $u \in X_0$ имеем

$$\langle I_0^* w, u \rangle = \langle w, I_0 u \rangle = \langle w, u \rangle, \tag{6}$$

и очевидно, что $I_0^* w = w$ для $w \in X_0^*$.

После предварительных замечаний дадим новое формулирование задачи (1). Пусть $R_0 : X_0 \to X$ — оператор, определенный соотношением

$$(R_0 v)(t) = \int\limits_0^t v(s)ds, \ v \in X_0. \tag{7}$$

Если $u \in C(S; V)$ и $u' \in X_0$, то $R_0 u' = u + u_0$, где u_0 — некоторая постоянная на интервале S функция. Пусть, далее, $C = I_0^* (AI_0 + BR_0) : X_0 \to X_0^*$ и $g = I_0^* f \in X_0^*$. Покажем, что задача (1) эквивалентна задаче

$$v' + Cv = g, \ v \in X_0. \tag{8}$$

1. Пусть u — решение задачи (1). Тогда $u' \in X_0$ и $u'' \in X_0^*$. Имеем

$$u'' + Cu' = u'' + I_0^* (AI_0 + BR_0) u' = I_0^* (u'' + Au' + Bu + Bu_0) =$$
$$= I_0^* (u'' + Au' + Bu) = I_0^* f = g,$$

т.е. $v = u'$ — решение задачи (8).

2. Пусть v — решение задачи (8). Положим $u_1 = R_0 v$. Тогда $u_1' = v$ и $u_1(0) = u_1(T)$, а также $u_1'' = v' = g - Cv \in X_0^*$ и $u_1'(0) = u_1'(T)$. Далее,

$$u_1'' + Cu_1' = u_1'' + I_0^* (AI_0 + BR_0) u_1' = I_0^* (u_1'' + Au_1' + Bu_1) = I_0^* f,$$

поэтому

$$u_1'' + Au_1' + Bu_1 = f + f_1$$

при некоторой соответствующей постоянной функции $f_1 \in X^*$. Для $u = u_1 - B^{-1} f_1$ имеем $u(0) = u(T)$, $u'(0) = u'(T)$,

$$u'' + Au' + Bu = u_1'' + Au_1' + Bu_1 - f_1 = f,$$

т.е. u — решение задачи (1). (Оператор $B^{-1} : X^* \to X$ существует в силу его определения.)

Приведенные рассуждения показывают, что существует взаимно однозначное обратимое соответствие между решениями задачи (1) и решениями задачи (8). Теперь решим (8) с помощью теоремы 1.

Для любого $v \in X_0$ имеем

$$\langle BR_0 v, v\rangle = \int_S (B_0(R_0 v)(t), (R_0 v)'(t))dt =$$

$$= \frac{1}{2}\{(B_0(R_0 v)(T), (R_0 v)(T)) - ((B_0(R_0 v)(0), (R_0 v)(0))\} = 0, \qquad (9)$$

так как согласно (7) $(R_0 v)(T) = (R_0 v)(0) = 0$. Из (6), (9) и определения оператора C следует, что для $u, v \in X_0$

$$\langle Cv, v\rangle = \langle Av, v\rangle, \qquad \langle Cu - Cv, u - v\rangle = \langle Au - Av, u - v\rangle.$$

Рассмотрим оператор $I_0^* A I_0 : X^* \to X_0^*$. Покажем, что он удовлетворяет условиям а)–в) теоремы 1.

Условие а). Пусть $y_n \to y$ слабо в X_0, $y_n' \to y'$ слабо в X^*. Имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle I_0^* A I_0 y_n, y_n - y\rangle = \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle AI_0 y_n, I_0(y_n - y)\rangle = \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Ay_n, y_n - y\rangle \le 0.$$

Поэтому существует $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ такая, что

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \langle I_0^* A I_0 y_{n_k}, y_{n_k} - w)\rangle = \underline{\lim}_{k\to\infty} \langle AI_0 y_{n_k}, I_0(y_{n_k} - w)\rangle =$$

$$= \underline{\lim}_{k\to\infty} \langle Ay_n, y_{n_k} - w)\rangle \ge \langle A(y), y - w\rangle = \langle I_0^* A I_0 y, y - w\rangle \quad \forall w \in X_0.$$

Условие б). Квазиограниченность и локальная конечномерная ограниченность C непосредственно следуют из условий теоремы 2.

Условие в). Имеем $\forall g \in X_0^*$ $(g = I_0^* f,\ f \in X^*)$ $\exists R > 0 : \forall y,\ \|y\|_X = R$

$$\langle I_0^* A I_0 y - g, y\rangle = \langle AI_0 y - f, I_0 y\rangle = \langle Ay - f, y\rangle \le 0.$$

Итак, требуемые условия для оператора $I_0^* A I_0 : X^* \to X_0^*$ выполняются.

Докажем, что определенный на $W_0 = \{v \mid v \in X_0,\ v' \in X_0^*\}$ соотношением

$$\Lambda v = v',\ v \in W_0, \qquad (10)$$

оператор Λ как отображение из X_0 в X_0^* является радиально непрерывным и максимально монотонным. Тем самым для задачи (8) выполняются все условия теоремы 1. Из этой теоремы следуют разрешимость задачи (8) и ее однозначная разрешимость в случае строгой монотонности C, откуда вытекает справедливость утверждений теоремы 2.

Для завершения доказательства теоремы установим следующий результат.

Лемма 4. Оператор $\Lambda : W_0 \to X_0^*$, определенный формулой (10), как отображение из X_0 в X_0^* радиально непрерывный и максимально монотонный.

Доказательство. 1. Для $v, w \in W_0$ и $h \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$\Lambda(v + hw) = \Lambda v + h\Lambda w,$$

откуда следует радиальная непрерывность Λ.

2. Для $u \in W_0$ имеем

$$u(T) - u(0) = \int_S u'(s)ds = 0,$$

поэтому

$$\langle \Lambda u, u\rangle = \int_S (u'(s), u(s))ds = \frac{1}{2}(|u(T)|^2 - |u(0)|^2) = 0,$$

т.е. линейный оператор Λ — монотонный.

3. Пусть для заданных $v \in X_0$ и $w \in X_0^*$

$$\langle w - \Lambda u, v - u\rangle \ge 0 \ \ \forall u \in W_0. \qquad (11)$$

Необходимо показать, что $v' = w$, и поэтому $v \in W_0$. Прежде всего выберем $u = \varphi' x$, где $\varphi \in D(S)$ и $x \in V$. Тогда $u \in W_0$,

$$0 \le \langle w - \varphi'' x, v - \varphi' x \rangle = \langle w, v \rangle - \left(\int\limits_S (\varphi''(s) v(s) + \varphi'(s) w(s)) ds, x \right) +$$

$$+ \langle \varphi'' x, \varphi' x \rangle = \langle w, v \rangle + (w'(\varphi) - v''(\varphi), x);$$

$w'(\varphi)$ и $v''(\varphi)$ — соответственно значения распределений w' и v'' на элементе $\varphi \in D(S)$. Последняя оценка показывает, что $(w'(\varphi) - v''(\varphi), x)$ не зависит от x. Это возможно только в случае $w'(\varphi) = v''(\varphi)$. Поэтому $v' - w = u_0$ является постоянной функцией на интервале S. Отсюда и из (11) следует, что для каждого $u \in W_0$ имеет место

$$0 \le \langle v' - u', v - u \rangle = \frac{1}{2} (|v(T) - u(T)|^2 - |v(0) - u(0)|^2) =$$

$$= (u(0), v(0) - v(T)) + \frac{1}{2} (|v(T)|^2 - |v(0)|^2).$$

Так как для любого $x \in V$ функция $u(t) = \left(t^2 - Tt + \frac{T^2}{6} \right) x$ принадлежит W_0, в последнем неравенстве $u(0)$ может быть любым элементом из V. Поэтому данное неравенство возможно только при $v(0) = v(T)$ и для постоянной функции получаем

$$\int\limits_S u_0(t) dt = \int\limits_S (v'(t) - w(t)) dt = v(T) - v(0) = 0;$$

это означает, что $u_0 = 0$ и $v' = w$. Тем самым установлено, что Λ — максимальный монотонный оператор.

Лемма доказана.

Теорема доказана.

ПРИМЕРЫ

Приведем некоторые модельные примеры с операторами типа Лере–Лионса, иллюстрирующие данную теорию. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ [17, с. 338], $S = [0, T]$, $Q = \Omega \times (0; T)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0; T)$. Пусть $m \in \mathbb{N}$, N_1 (соответственно N_2) — число дифференцирований по x порядка не больше чем $m-1$ (соответственно равных m) и $\{A_\alpha(x, \eta, \xi)\}_{|\alpha| \le m}$ — семейство действительных функций, определенных на $\Omega \times R^{N_1} \times R^{N_2}$. Пусть также

$$D^k u = \{D^\beta u, |\beta| = k\} \text{ — дифференцирование по } x,$$

$$\delta u = \{u, Du, \ldots, D^{m-1} u\},$$

$$A_\alpha(x, \delta u, D^m v) : x, t \to A_\alpha(x, \delta u(x, t), D^m v(x, t)).$$

Для произвольного $f \in X^* = L_2(S; H^{-m}(\Omega))$ [1, с. 44] рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha(x, \delta y(x,t), D^m y(x,t))) - \Delta y(x,t) = f(x,t) \text{ в } Q,$$

$$y(x, 0) = y(x, T), \left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right|_{t=T} \text{ в } \Omega, \qquad (12)$$

$$D^\alpha y(x, t) = 0 \text{ в } \Gamma_T \text{ при } |\alpha| \le m.$$

Допустим, что $p_0 = p = 2$, $H = L_2(\Omega)$, $V = H_0^m(\Omega)$. Тогда $X = L_2(S; V)$, $X^* = L_2(S; V^*)$, $Y = L_2(S; H)$. При таких условиях на параметры задачи запишем (12) следующим образом:

$$\begin{cases} y'' + A(y') + B(y) = f, \\ y(0) = y(T), \ \ y'(0) = y'(T). \end{cases} \tag{13}$$

Элемент y такой, что $y' \in W = \{ y \in L_2(S; V) \mid y' \in L^2(S; V^*)\}$ — решение задачи (13), называется обобщенным решением задачи (12).

Определение оператора *A*. Пусть $A_\alpha(x, \eta, \xi)$, заданные в $\Omega \times R^{N_1} \times R^{N_2}$, удовлетворяют условиям:

для почти всех $x \in \Omega$ $\eta, \xi \to A_\alpha(x, \eta, \xi)$ непрерывно на $R^{N_1} \times R^{N_2}$;

$$\forall \eta, \xi \ \ x \to A_\alpha(x, \eta, \xi) \text{ измеримо на } \Omega; \tag{14}$$

$$\forall u, v \in X \ \ A_\alpha(x, \delta u, D^m v) \in L^2(Q). \tag{15}$$

Тогда для всех $u \in X$ отображение

$$\mathrm{w} \to \mathrm{a}(\mathrm{u}, \mathrm{w}) = \sum_{|\alpha| \le \mathrm{m}} \int_{\mathrm{Q}} \mathrm{A}_\alpha(\mathrm{x}, \delta \mathrm{u}, \mathrm{D}^{\mathrm{m}} \mathrm{u}) \mathrm{D}^\alpha \mathrm{w}\, \mathrm{dxdt}$$

непрерывно на X и

$$\exists A(u) \in X^*: a(u, w) = \langle A(u), w \rangle \ \ \forall w \in X. \tag{16}$$

Условия для *A*. Аналогично [17, секции 2.2.5, 2.2.6, 3.2.1] имеем

$$\mathrm{A}(\mathrm{u}) = \mathrm{A}(\mathrm{u}, \mathrm{u}), \ \ \mathrm{A}(\mathrm{u}, v) = \mathrm{A}_1(\mathrm{u}, v) + \mathrm{A}_2(\mathrm{u}),$$

где

$$\langle A_1(u, v), w \rangle = \sum_{|\alpha| = m} \int_Q A_\alpha(x, \delta u, D^m v) D^\alpha w\, dx\, dt,$$

$$\langle A_2(u), w \rangle = \sum_{|\alpha| \le m-1} \int_Q A_\alpha(x, \delta u, D^m u) D^\alpha w\, dx\, dt.$$

Добавим следующие условия:

$$\langle A_1(u, u), u - v \rangle - \langle A_1(u, v), u - v \rangle \ge 0 \ \ \forall u, v \in X; \tag{17}$$

$$\text{если } \ u_j \rightharpoonup u \text{ в } X, \ u'_j \rightharpoonup u' \text{ в } X^*,$$

$$\langle A_1(u_j, u_j) - A_1(u_j, u), u_j - u \rangle \to 0, \tag{18}$$

$$\text{то } A_\alpha(x, \delta u_j, D^m u_j) \rightharpoonup A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \text{ в } L_2(Q).$$

Достаточные условия для (17), (18) [17, теорема 2.2.8]:

$$\sum_{|\alpha| = m} A_\alpha(x, \eta, \xi) \xi_\alpha \frac{1}{|\xi|} \to +\infty, \ \ |\xi| \to \infty,$$

для почти всех $x \in \Omega$ и ограниченных $|\eta|$;

$$\sum_{|\alpha| = m} (A_\alpha(x, \eta, \xi) - A_\alpha(x, \eta, \xi^*))(\xi_\alpha - \xi_\alpha^*) > 0, \ \ \xi \ne \xi^*,$$

для почти всех $x \in \Omega$ и $\forall \eta$.

Достаточное условие коэрцитивности:

$$\sum_{|\alpha| = m} A_\alpha(x, \eta, \xi) \xi_\alpha \ge c |\xi|^2 \ \text{ для больших } |\xi|.$$

Достаточные условия для (15) [17, с. 332]:

$$|A_\alpha(x, \eta, \xi)| \le c[|\eta| + |\xi| + k(x)], \ \ k \in L_2(\Omega). \tag{19}$$

Утверждение 4 [14, предложение 8.2]. Пусть оператор $A: X \to X^*$, определенный с помощью (16), удовлетворяет (14), (15), (17), (18) и условию коэрцитивности. Тогда A — λ-псевдомонотонный на W. Более того, при выполнении (19), он ограничен.

Определение оператора B_0. В качестве оператора B_0 возьмем энергетическое расширение $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$:

$$B_0(\varphi) = -\Delta\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^2(\overline{\Omega}).$$

Таким образом, при перечисленных условиях задача (12) имеет обобщенное решение $y \in C(S; H_0^m(\Omega))$ такое, что $y' \in C(S; L_2(\Omega))$, $y'' \in X^*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 337 с.
2. Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
3. Задоянчук Н.В., Касьянов П.О. Метод Фаедо–Гальоркіна для нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з операторами Вольтера // Нелінійні коливання. — 2007. — № 2. — С. 204–228.
4. Задоянчук Н.В., Касьянов П.О. Про розв'язність диференціально-операторних рівнянь II порядку з некоерцитивними операторами // Доп. НАН України. — 2006. — № 12. — С. 15–19.
5. Papageorgiou N.S. Existence of solutions for the second order evolution inclusions // J. Appl. Math. Stoch. Analysis. — 1994. — **7**, N 4. — P. 525–535.
6. Papageorgiou N.S., Yannakakis N. Second order nonlinear evolution inclusions. II: Structure of the solution set // Acta Mathematica Sinica, Engl. Ser. — 2006. — **22**, N 1. — P. 195–206.
7. Sell G.R. , You Yu. Dynamics of evolutionary equations. — New York: Springer, 2002. — 670 p.
8. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. — К.: Наук. думка, 1998. —– 614 с.
9. Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники (ВИНИТИ). Совр. пробл. математики. — 1976. — № 9. — С. 5–130.
10. Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. — К.: Наук. думка, 2004. — 590 с.
11. Згуровский М.З., Касьянов П.О., Мельник В.С. Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. — К.: Наук. думка, 2008. — 464 с.
12. Касьянов П.О., Мельник В.С. О разрешимости дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств, порожденных отображениями w_{λ_0}-псевдомонотонного типа // Укр. мат. вісн. — 2007. — **4**, № 4. — С. 535–581.
13. Kasyanov P.O., Mel'nik V.S., Piccirillo A.M. On some approximations and main topological descriptions for special classes of Banach spaces with integrable derivatives // Methods of Functional Analisys and Topology. — 2008. — **14**, N 3. — P. 255–270.
14. Kasyanov P.O., Mel'nik V.S., Toscano S. Periodic solutions for nonlinear evolution equations with W_{λ_0}-pseudomonotone maps // Нелінійні коливання. — 2006. — № 2. — С. 187–212.
15. Kasyanov P.O., Mel'nik V.S., Yasinsky V.V. Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with W_λ –pseudomonotone maps. — К.: Наук. думка, 2007. — 308 с.
16. Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V. Global attractors for multivalued dynamical systems. — К.: Наук. думка, 2008. — 208 с.
17. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
18. Мельник В.С., Тоскано Л. О нелинейных дифференциально-операторных уравнениях в банаховых пространствах с отображениями псевдомонотонного типа. 1 // Системні дослідження та інформ. технології. — 2004. — № 3. — Р. 63–81.
19. Скрыпник И.В. Методы исследования эллиптических краевых задач. — М.: Наука, 1990. — 442 с.
20. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — К.: Наук. думка, 1992. — 381 с.
21. Ясінський В.В. Системне моделювання процесів накопичення та дисипації знань // Системні дослідження та інформ. технології. — 2007. — № 3. — Р. 111–121.
22. Синергетическая парадигма. Синергетика образования. — М.: Процесс-традиция, 2007. — 592 с.

Поступила 09.12.2008