УДК 519.8

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, К.Г. КУЗЬМИН

О РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ РЕГУЛЯРНОСТИ НОРМЫ В КРИТЕРИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ключевые слова: *векторная задача целочисленного линейного программирования, множество Парето, множество Слейтера, устойчивость, радиус устойчивости, возмущающая матрица, норма вектора, критериальное пространство, пространство решений.*

ВВЕДЕНИЕ

Начальным результатом качественной теории устойчивости векторных задач дискретной оптимизации является теорема, установленная в работах [1–3] (см. также [4–8]). Согласно этой теореме совпадение множеств Парето и Слейтера необходимо и достаточно для устойчивости по функционалу векторной задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) с конечным множеством допустимых решений, состоящей в отыскании решений, оптимальных по Парето. В [9] были исследованы количественные характеристики устойчивости такой задачи. В частности, получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости векторной задачи ЦЛП в случае, когда в пространствах решений и критериев задана одна и та же чебышевская норма. Следует отметить, что предложенная в [9] верхняя оценка радиуса устойчивости, представляющая собой норму матрицы коэффициентов векторного критерия, является достаточно грубой. В настоящей статье благодаря использованию упомянутого выше необходимого и достаточного условия устойчивости задачи установлена более точная верхняя оценка этого радиуса. Кроме того, основываясь на известном неравенстве Минковского–Малера, удалось обобщить полученные ранее оценки на случай произвольной нормы в пространстве решений и нормы в критериальном пространстве, удовлетворяющей некоторым необременительным условиям (такими нормами являются, например, все нормы Гёльдера l_p, $1 \le p \le \infty$). Отметим, что подобная техника использования неравенства Минковского–Малера ранее была применена в [10] для получения нижней и верхней достижимых оценок радиуса сильной устойчивости (T_1-устойчивости в терминологии [5–8]), а также в [11] для нахождения формулы радиуса устойчивости эффективного решения векторной задачи ЦЛП.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $\mathbf{R}^m$ — критериальное пространство, $\mathbf{R}^n$ — пространство решений, C — матрица размера $n \times m$ со столбцами $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})^T \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in X \subset \mathbf{Z}^n$, причем $1 < |X| < \infty$. Пусть также на конечном множестве целочисленных векторов (решений) X задан линейный векторный критерий

$$C^T x = ((C_1, x), (C_2, x), \ldots, (C_m, x))^T \to \min_{x \in X},$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов.

Под векторной (m-критериальной) задачей ЦЛП $Z^m(C)$, $C \in \mathbf{R}^{n \times m}$, будем понимать задачу поиска множества Парето (множества эффективных векторов)

$$P^m(C) = \{x \in X \colon P^m(x, C) = \varnothing\},$$

где

$$P^m(x, C) = \{x' \in X \colon C^T x \geq C^T x' \,\&\, C^T x \neq C^T x'\}.$$

В силу конечности X множество $P^m(C) \neq \varnothing$ при любой матрице $C \in \mathbf{R}^{n \times m}$.

Возмущение элементов матрицы C будем осуществлять путем прибавления к ней матриц C' из $\mathbf{R}^{n \times m}$. Таким образом, возмущенная задача $Z^m(C + C')$ имеет вид

$$(C + C')^T x \to \min_{x \in X},$$

а множество Парето такой задачи — вид $P^m(C + C')$.

В пространстве решений $\mathbf{R}^n$, в котором векторы суть матрицы размера $n \times 1$, зададим произвольную норму $\|\cdot\|$. Пусть $\|\cdot\|^*$ — норма в сопряженном пространстве $(\mathbf{R}^n)^*$. Тогда выполняются равенства

$$\|v\|^* = \max\left\{\frac{|(u, v)|}{\|u\|} \colon u \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\right\},$$

$$\|u\| = \max\left\{\frac{|(u, v)|}{\|v\|^*} \colon v \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\right\},$$

где $\mathbf{0}$ — нуль–вектор пространства $\mathbf{R}^n$. Поэтому для любых векторов $u, v \in \mathbf{R}^n$ справедливо неравенство Минковского–Малера [12] (иногда это неравенство называют неравенством Шварца [13])

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|^*. \tag{1}$$

Отсюда вытекает формула

$$\forall \gamma \geq 0, \ \forall v \in \mathbf{R}^n \ \exists a \in \mathbf{R}^n \ \ (|(a, v)| = \gamma \|v\|^* \,\&\, \|a\| = \gamma). \tag{2}$$

Норму $\|\cdot\|$, заданную в критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$, будем называть регулярной, если она монотонна ($y \leq y' \,\&\, y,\ y' \in \mathbf{R}^m_+ \Rightarrow \|y\| \leq \|y'\|$) и все единичные векторы пространства $\mathbf{R}^m$ нормированы ($\|e_i\| = 1,\ i \in N_m$).

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ определим множество возмущающих матриц

$$\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{n \times m} \colon \|C'\| < \varepsilon\}.$$

Здесь и далее норма $\|C'\|$ матрицы C' со столбцами $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m \in \mathbf{R}^n$ определяется как норма вектора, компонентами которого являются нормы столбцов матрицы

$$\|C'\| = \left\| (\|C'_1\|, \|C'_2\|, \ldots, \|C'_m\|)^T \right\|.$$

Ввиду регулярности нормы в $\mathbf{R}^m$ выполняются неравенства $\|C'\| \geq \|C'_i\|$, $i \in N_m$.

Как обычно (например, [9, 14–17]), радиусом устойчивости задачи $Z^m(C)$ (в терминологии [5–8] T_3-устойчивости) будем называть величину

$$\rho^m(C) = \begin{cases} \sup\ \Xi(C), & \text{если } \ \Xi(C) \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\Xi(C) = \{\varepsilon > 0 \colon \forall C' \in \Omega(\varepsilon) \ (P^m(C + C') \subseteq P^m(C))\}.$$

Таким образом, радиус устойчивости задачи $Z^m(C)$ — это предельный уровень возмущений элементов матрицы C в пространстве $\mathbf{R}^{n\times m}$, которые не приводят к появлению новых эффективных векторов.

Естественно задачу $Z^m(C)$ называть устойчивой, если $\rho^m(C)>0$. Поскольку любые две нормы в конечномерном линейном пространстве эквивалентны [18], то все утверждения, касающиеся понятия устойчивости, не зависят от вида норм в пространствах $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$. В частности, в тривиальном случае, когда множество $\overline{P^m}(C):=X\setminus P^m(C)$ пусто, включение $P^m(C+C')\subseteq P^m(C)$ имеет место при любой возмущающей матрице $C'\in\mathbf{R}^{n\times m}$, поэтому вне зависимости от вида норм в $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$ задача $Z^m(C)$ устойчива при любой матрице $C\in\mathbf{R}^{n\times m}$. Задачу $Z^m(C)$, для которой множество $\overline{P^m}(C)$ непусто, будем называть нетривиальной.

Введем множество Слейтера (множество слабо эффективных векторов), определяемое по правилу [19]

$$\mathrm{Sl}^m(C)=\{x\in X:\ \mathrm{Sl}^m(x,C)=\varnothing\},$$

где

$$\mathrm{Sl}^m(x,C)=\{x'\in X:\ \forall\ i\in N_m\ \ ((C_i,x-x')>0)\}.$$

Очевидно, что при каждой матрице $C\in\mathbf{R}^{n\times m}$ выполняется включение $P^m(C)\subseteq\mathrm{Sl}^m(C)$ и для любого вектора $x\in X$ верно включение $\mathrm{Sl}^m(x,C)\subseteq P^m(x,C)$. Для вектора $x\in\overline{P^m}(C)$ введем множество $P_x(C)=P^m(C)\cap\mathrm{Sl}^m(x,C)$.

Далее используем несколько очевидных вспомогательных утверждений.

Свойство 1. Если $P^m(C)=\mathrm{Sl}^m(C)\neq X$, то $\|C_i\|>0$ при любом индексе $i\in N_m$.

Свойство 2. Если $P^m(C)=\mathrm{Sl}^m(C)$, то $P_x(C)\neq\varnothing$ при любом векторе $x\in\overline{P^m}(C)$.

Свойство 3. Если $P^m(C)=\mathrm{Sl}^m(C)$, $x\in\overline{P^m}(C)$, $x'\in P_x(C)$, то $(C_i,x-x')>0$ при любом индексе $i\in N_m$.

Свойство 4. Если $C,C^0\in\mathbf{R}^{n\times m}$, $x\in\overline{P^m}(C)$ и

$$P^m(C)\cap\mathrm{Sl}^m(x,C+C^0)=\varnothing, \tag{3}$$

то

$$\overline{P^m}(C)\cap\mathrm{Sl}^m(C+C^0)\neq\varnothing.$$

Действительно, если $\mathrm{Sl}^m(x,C+C^0)=\varnothing$, то $x\in\mathrm{Sl}^m(C+C^0)$, поэтому свойство очевидно. Если $\mathrm{Sl}^m(x,C+C^0)\neq\varnothing$, то в силу внешней устойчивости множества Слейтера (см. например, [19]) существует такой $x^0\in\mathrm{Sl}^m(x,C+C^0)$, что $x^0\in\mathrm{Sl}^m(C+C^0)$, причем ввиду (3) вектор $x^0\in\overline{P^m}(C)$.

Лемма. Пусть $P^m(C)=\mathrm{Sl}^m(C)$, $x\in\overline{P^m}(C)$, $(r,s)\in N_m\times N_m$. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ задана произвольная норма, а в $\mathbf{R}^m$ — регулярная. Тогда, полагая

$$\zeta=\max\left\{\frac{(C_r,x-x')}{(C_s,x-x')}:\ x'\in P_x(C)\right\},$$

$$\psi=\zeta\|C_s\|, \tag{4}$$

имеем

$$\forall\ \varepsilon>\psi\ \ \exists\, C^0\in\Omega(\varepsilon)\ \ (\overline{P^m}(C)\cap\mathrm{Sl}^m(C+C^0)\neq\varnothing). \tag{5}$$

Доказательство. Следует отметить, что согласно свойствам 1–3 справедливо неравенство $\psi > 0$. Выберем произвольно число ε, подчиненное условию $\varepsilon > \psi = \zeta \| C_s \|$. Столбцы возмущающей матрицы $C^0 \in \mathbf{R}^{n \times m}$ зададим по правилу

$$C_i^0 = \begin{cases} -\zeta C_s, \text{ если } & i = r, \\ \mathbf{0}, \qquad \text{если } & i \in N_m \setminus \{r\}. \end{cases}$$

Тогда, учитывая регулярность нормы в $\mathbf{R}^m$, получаем $\left\| C^0 \right\| = \zeta \| C_s \|$, т.е. $C^0 \in \Omega(\varepsilon)$.

Пусть $x \in \overline{P}^m(C)$. Покажем, что выполняется равенство (3). Для этого достаточно доказать, что никакой вектор $x^0 \in P^m(C)$ не принадлежит множеству $\mathrm{Sl}^m(x, C + C^0)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $x^0 \in P_x(C)$. Тогда, принимая во внимание строение возмущающей матрицы C^0 и определение числа ζ, получаем

$$(C_r + C_r^0, x - x^0) = (C_r, x - x^0) - \zeta (C_s, x - x^0) = (C_r, x - x^0) -$$

$$-(C_s, x - x^0) \max_{x' \in P_x(C)} \frac{(C_r,\, x - x')}{(C_s,\, x - x')} \le (C_r, x - x^0) - (C_s, x - x^0) \frac{(C_r,\, x - x^0)}{(C_s,\, x - x^0)} = 0.$$

Поэтому $x^0 \notin \mathrm{Sl}^m(x,\, C + C^0)$.

Случай 2. Пусть $x^0 \in P^m(C) \setminus P_x(C)$. Если существует такой индекс $l \in N_m \setminus \{r\}$, что $(C_l, x - x^0) \le 0$, то в силу строения возмущающей матрицы C^0 имеют место соотношения

$$(C_l + C_l^0, x - x^0) = (C_l, x - x^0) \le 0.$$

Если для всякого индекса $i \in N_m \setminus \{r\}$ справедливо неравенство $(C_i, x - x^0) \ge 0$, то (ввиду $x' \in X \setminus P(x^0, C)$) имеем $(C_r, x - x^0) \le 0$. Поэтому с учетом строения возмущающей матрицы C^0 получаем

$$(C_r + C_r^0, x - x^0) \le (C_r, x - x^0) \le 0 \quad \text{при} \quad s \ne r.$$

$$(C_r + C_r^0, x - x^0) = (C_r, x - x^0) - (C_r, x - x^0) = 0 \quad \text{при} \quad s = r.$$

Следовательно, и во втором случае $x^0 \notin \mathrm{Sl}^m(x,\, C + C^0)$.

Резюмируя утверждаем, что равенство (3) верно, поэтому согласно свойству 4 верна формула (5).

Лемма доказана.

ОЦЕНКИ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ

Как было отмечено выше, необходимым и достаточным условием неустойчивости нетривиальной задачи $Z^m(C)$ является несовпадение множеств Парето $P^m(C)$ и Слейтера $\mathrm{Sl}^m(C)$. Поэтому в этом случае радиус устойчивости задачи $Z^m(C)$ равен нулю.

Остается рассмотреть лишь случай, когда выполняется равенство $P^m(C) = \mathrm{Sl}^m(C)$.

Теорема 1. Пусть задача ЦЛП $Z^m(C)$, $m \ge 1$, нетривиальна, $P^m(C) = \mathrm{Sl}^m(C)$ и пусть в пространстве решений $\mathbf{R}^n$ задана произвольная норма, а в критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ норма регулярна. Тогда, полагая

$$\varphi = \min_{x \in \overline{P^m}(C)} \max_{x' \in P_x(C)} \min_{i \in N_m} \frac{(C_i, x - x')}{\| x - x' \|^*},$$

$$\psi = \min_{x \in \overline{P^m}(C)} \min_{(i,k) \in N_m \times N_m} \max_{x' \in P_x(C)} \frac{(C_i, x - x')}{(C_k, x - x')} \| C_k \|, \tag{6}$$

имеем

$$0 < \varphi \le \rho^m (C) \le \psi .$$

Доказательство. Отметим, что $\overline{P^m}(C) \ne \varnothing$, так как задача $Z^m(C)$ нетривиальна. Поскольку выполняется равенство $P^m(C) = \mathrm{Sl}^m(C)$, то на основании критерия устойчивости задачи $Z^m(C)$ очевидно неравенство $\rho^m(C) > 0$. Кроме того, учитывая свойства 1–3, легко увидеть, что $\psi > 0$.

Сначала докажем справедливость неравенства $\rho^m(C) \le \psi$. В соответствии с определением величины ψ найдутся такие $x \in \overline{P^m}(C)$ и $(r,s) \in N_m \times N_m$, что выполняется равенство (4). Поэтому согласно лемме верна формула (5), при этом норма $\left\| C^0 \right\| = \alpha$ удовлетворяет неравенствам $\varepsilon > \alpha > \varphi$. Поскольку $P^m(C + C^0) \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Sl}^m(C + C^0)$, то возможны два случая.

Случай 1. Пусть $\overline{P^m}(C) \cap P^m(C + C^0) \ne \varnothing$. Тогда очевидно, что $P^m(C + C^0) \not\subseteq P^m(C)$, причем $C^0 \in \Omega(\varepsilon)$.

Случай 2. Пусть $\overline{P^m}(C) \cap P^m(C + C^0) = \varnothing$. Тогда существует вектор $x^0 \in (\overline{P^m}(C) \cap \mathrm{Sl}^m(C + C^0)) \setminus P^m(C + C^0)$. Поэтому согласно лемме 4.2 из [5] (см. также [4]) найдется такая матрица $\hat{C} \in \Omega(\varepsilon')$, где $\beta = \varepsilon - \alpha > 0$, что $x^0 \in P^m(C + C^0 + \hat{C})$. Иначе говоря, для всякого числа $\varepsilon = \alpha + \beta$ существует такая матрица $\widetilde{C} = C^0 + \hat{C} \in \Omega(\varepsilon)$, что $P^m(C + \widetilde{C}) \not\subseteq P^m(C)$.

Резюмируя эти случаи, получаем, что при любом числе $\varepsilon > \psi$ справедливо неравенство $\rho^m(C) < \varepsilon$. Следовательно, $\rho^m(C) \le \psi$.

Далее покажем справедливость неравенств $0 < \varphi \le \rho^m(C)$.

На основании свойства 2 множество $P_x(C)$ непусто при любом векторе $x \in \overline{P^m}(C)$. Поэтому согласно свойству 3 имеем $\varphi > 0$.

Пусть $C' \in \Omega(\varphi)$. Тогда согласно определению величины φ и регулярности нормы в $\mathbf{R}^m$ для любого $x \in \overline{P^m}(C)$ найдется такой вектор $x^0 \in P_x(C)$, что справедливы соотношения

$$\| C'_i \| \le \| C' \| < \varphi \le \frac{(C_i, x - x^0)}{\left\| x - x^0 \right\|^*}, \quad i \in N_m .$$

Отсюда, используя неравенство Минковского–Малера (1), находим

$$(C_i + C'_i, x - x^0) \ge (C_i, x - x^0) - \| C'_i \| \left\| x - x^0 \right\|^* > 0, \; i \in N_m .$$

Таким образом, $x \in \overline{P^m}(C + C')$, откуда заключаем, что при любой матрице $C' \in \Omega(\varphi)$ имеет место включение $P^m(C + C') \subseteq P^m(C)$. Следовательно, верна оценка снизу $\rho^m(C) \ge \varphi$.

Теорема доказана.

Широкий класс скалярных (однокритериальных) траекторных задач, для которых нижняя оценка φ достижима, описан в [16]. Достижимость нижней оценки радиуса устойчивости векторной линейной булевой задачи в случае чебышевской нормы l_∞ в пространствах $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$ была доказана в [9, 17].

Следствие 1. Пусть задача ЦЛП $Z^m(C)$, $m \ge 1$, нетривиальна, норма в пространстве $\mathbf{R}^n$ произвольна, а в пространстве $\mathbf{R}^m$ регулярна. Тогда, положив

$$\tau(x, x') = \min \left\{ \frac{(C_i, x - x')}{\| x - x' \|^*} : \; i \in N_m \right\}, \quad \varphi' = \min_{x \in \overline{P^m}(C)} \; \max_{x' \in P^m(C) \cap P^m(x, C)} \tau(x, x'),$$

имеем

$$\varphi' \le \rho^m(C) \le \min_{i \in N_m} \| C_i \| . \qquad (7)$$

Кроме того, при $m \ge 2$ радиус устойчивости $\rho^m(C) = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi' = 0$.

Доказательство. Сначала докажем последнее утверждение следствия. Пусть $\rho^m(C) = 0$, $m \ge 2$. Тогда $P^m(C) \ne \mathrm{Sl}^m(C)$ и поэтому очевидно существование вектора $x^0 \in \overline{P^m}(C) \cap \mathrm{Sl}^m(C)$. Отсюда для всякого $x' \in P^m(C) \cap P^m(x, C)$ найдется индекс $s \in N_m$ с условием $(C_s, x^0 - x') = 0$. Следовательно, $\varphi' = 0$.

Пусть теперь $\varphi' = 0$. Тогда найдется такой вектор $x^0 \in \overline{P^m}(C)$, что для всякого вектора $x' \in P^m(C) \cap P^m(x^0, C)$ существует индекс $s \in N_m$ при условии $(C_s, x^0 - x') \le 0$. Это означает, что никакой вектор $x' \in P^m(C) \cap P^m(x^0, C)$ не принадлежит множеству $\mathrm{Sl}^m(x^0, C)$ и потому (ввиду $\mathrm{Sl}^m(x^0, C) \subseteq P^m(x^0, C)$) множество $P^m(C) \cap \mathrm{Sl}^m(x^0, C)$ пусто. Отсюда в силу свойства 4 множество $\overline{P^m}(C) \cap \mathrm{Sl}^m(C)$ непусто. Поэтому $P^m(C) \ne \mathrm{Sl}^m(C)$. Следовательно, задача $Z^m(C)$ не является устойчивой и $\rho^m(C) = 0$.

Далее доказательство оценок (7) проведем в предположении, что $\rho^m(C) > 0$. Тогда $P^m(C) = \mathrm{Sl}^m(C)$ и поэтому в силу теоремы $\rho^m(C) \le \psi$. Полагая $k = i$ в выражении (6) и учитывая регулярность нормы в $\mathbf{R}^m$, легко убедиться в справедливости верхних оценок формулы (7).

Наконец, докажем, что $\rho^m(C) \ge \varphi'$. Поскольку $\rho^m(C) > 0$, то $P^m(C) = \mathrm{Sl}^m(C)$ и поэтому согласно теореме 1 нижней оценкой радиуса устойчивости является число $\varphi > 0$. Легко видеть, что в этих предположениях $\varphi' = \varphi$. Действительно, в силу свойства 3 при любых $x \in \overline{P^m}(C)$, $x' \in P_x(C)$ число $\tau(x, x') > 0$, а при $x \in \overline{P^m}(C)$ и $x' \in (P^m(C) \cap P^m(x, C)) \setminus P_x(C)$ имеем $\tau(x, x') = 0$.

Следствие 1 доказано.

Очевидно, что верхняя оценка радиуса устойчивости скалярной задачи ЦЛП $\rho^1(C) \le \| C \|$, $C \in \mathbf{R}^n$, справедлива при любой норме. Универсальный характер этой оценки впервые был описан в работе [15] (см. также [14]) для скалярных траекторных задач.

Следующее следствие свидетельствует о достижимости нижней оценки радиуса устойчивости, установленной теоремой 1.

Следствие 2. Пусть задача ЦЛП $Z^m(C)$, $m \ge 1$, имеет единственный эффективный вектор x^0 и пусть норма в пространстве $\mathbf{R}^n$ произвольна, а в пространстве $\mathbf{R}^m$ — регулярна. Тогда

$$\rho^m(C) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \min_{i \in N_m} \frac{(C_i, x - x^0)}{\| x - x^0 \|^*} . \qquad (8)$$

Доказательство. Для краткости дальнейшего изложения левую часть формулы (8) обозначим через θ.

Пусть $P^m(C) = \{x^0\}$. Тогда согласно определению величины θ найдутся такие $\hat{x} \in \overline{P^m}(C)$ и $s \in N_m$, что справедливо равенство

$$\theta \| \hat{x} - x^0 \|^* = (C_s, \hat{x} - x^0), \qquad (9)$$

при этом $\theta > 0$. Задав $\varepsilon > \theta$, зафиксируем число γ, удовлетворяющее неравенствам $\theta<\gamma<\varepsilon$. В силу формулы (2), являющейся следствием неравенства Минковского–Малера, найдется такой вектор-столбец $a\in\mathbf{R}^n$, что

$$\| a\| =\gamma , \qquad (a,\hat{x}-x^0)=-\gamma \,\|\hat{x}-x^0\|^*.$$

Поэтому, определив столбцы возмущающей матрицы $C^0\in\mathbf{R}^{n\times m}$ по правилу

$$C_i^0=\begin{cases} a, \text{ если } i=s, \\ \mathbf{0}, \text{ если } i\in N_m\setminus\{s\}, \end{cases}$$

на основании регулярности нормы в $\mathbf{R}^m$ имеем

$$\| C^0\| =\gamma , \qquad (C_s^0,\hat{x}-x^0)=-\gamma \,\|\hat{x}-x^0\|^*.$$

Отсюда и из равенства (9) получаем

$$(C_s+C_s^0,\hat{x}-x^0)=(C_s,\hat{x}-x^0)-\gamma\,\|\hat{x}-x^0\|^*=(\theta-\gamma)\,\|\hat{x}-x^0\|^*<0,$$

т.е. $x^0\notin P^m(\hat{x},\, C+C^0)$. Если $P^m(\hat{x},\, C+C^0)=\varnothing$, то $\hat{x}\in P^m(C+C^0)$. Если $P^m(\hat{x},\, C+C^0)\neq\varnothing$, то благодаря внешней устойчивости множества $P^m(C+C^0)$ (см., например, [19]) найдется такой вектор $\tilde{x}\in P^m(\hat{x},C+C^0)$, что $\tilde{x}\in P^m(C+C^0)$.

Итак, для любого числа $\varepsilon>\theta$ гарантируется существование такой возмущающей матрицы $C^0\in\Omega(\varepsilon)$, что найдется вектор $x'\in X\setminus\{x^0\}$ с условием $x'\in P^m(C+C^0)$, т. е. $P^m(C+C^0)\not\subseteq P^m(C)$. Следовательно, $\rho^m(C)<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>\theta$. Это свидетельствует о справедливости оценки $\rho^m(C)\leq\theta$.

Поскольку задача $Z^m(C)$ нетривиальна ($|P^m(C)|=1$), то в силу следствия 1 верно неравенство $\rho^m(C)\geq\theta$. Исходя из этого, а также с учетом показанной выше оценки $\rho^m(C)\leq\theta$ получаем формулу (8).

Следствие 2 доказано.

Итак, нижняя оценка радиуса устойчивости φ достижима при $|P^m(C)|=1$. Из следствия 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. Если задача ЦЛП $Z^m(C)$, $m\geq 2$, нетривиальна, то при наличии в матрице $C\in\mathbf{R}^{n\times m}$ хотя бы одного нулевого столбца, радиус устойчивости $\rho^m(C)=0$.

Очевидно, что следствие 3 доказывает достижимость верхней оценки радиуса устойчивости, выявленной следствием 1.

Поскольку все нормы Гёльдера l_p, $1\leq p\leq\infty$, регулярны, то частным случаем следствия 1 является следующий результат.

Следствие 4. Пусть в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ задана норма Гёльдера l_p :

$$\| z\|_p=\left(\sum_i |z_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1\leq p<\infty, \qquad \| z\|_\infty=\max_i |z_i|.$$

Тогда для радиуса устойчивости нетривиальной задачи ЦЛП $Z^m(C)$, $C\in\mathbf{R}^{n\times m}$, $m\geq 1$, справедливы оценки

$$\min_{x\in\overline{P^m}(C)}\ \max_{x'\in P^m(x,C)}\ \min_{i\in N_m}\frac{(C_i,x-x')}{\|x-x'\|_q}\leq\rho^m(C)\leq\min\{\|C_i\|_p : i\in N_m\}\leq\|C\|.$$

Здесь, как обычно, $1/p+1/q=1$ при $1<p<\infty$; $q=1$ при $p=\infty$; $q=\infty$ при $p=1$.

В случае чебышевской нормы l_∞ в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ эти оценки были получены в [9] (см. также [17]).

Поскольку $P^1(C) = \mathrm{Sl}^1(C)$, то из теоремы 1 вытекает также, что однокритериальная (скалярная) задача $Z^1(C)$ устойчива при любом векторе $C \in \mathbf{R}^n$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье впервые получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости векторного варианта широко известной задачи ЦЛП в предположении, что в пространстве решений задана произвольная норма, а в критериальном пространстве — монотонная норма. Причем достижимость нижней оценки, полученной на основе использования неравенства Минковского-Малера, гарантируется указанием такого класса задач, для которых эта оценка является формулой. Приводится также легко вычислимая достижимая верхняя оценка, равная минимальной из норм столбцов матрицы коэффициентов векторного критерия. Из этих результатов естественным образом вытекают известные ранее оценки радиуса устойчивости рассматриваемой задачи для случая чебышевской метрики в пространствах решений и критериев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Вопросы параметрического анализа и исследование устойчивости многокритериальных задач целочисленного линейного программирования // Кибернетика. — 1988. — № 3. — С. 41–44.
2. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Необходимые и достаточные условия многокритериальных задач целочисленного программирования // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1988. — № 10. — С. 76–78.
3. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Задачи целочисленного программирования с векторным критерием: параметрический анализ и исследование устойчивости // Докл. АН СССР. — 1989. — **307**, № 3. — С. 527–529.
4. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наук. думка, 1995. — 170 с.
5. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наук. думка, 2003. — 261 с.
6. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 1. — С. 63–70.
7. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Там же. — 2005. — № 4. — С. 90–100.
8. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Там же. — 2008. — № 3. — С. 142–148.
9. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1998. — **38**, № 11. — С. 1801–1805.
10. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. Об одном типе устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования в случае монотонной нормы // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 5. — С. 45–51.
11. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискретная математика. — 2007. — **19**. — Вып. 3. — С. 79–83.
12. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965. — 276 с.
13. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
14. Леонтьев В.К. Устойчивость в линейных дискретных задачах // Пробл. кибернетики. — 1979. — Вып. 35. — С. 169–184.
15. Леонтьев В.К., Гордеев Э.Н. Качественное исследование траекторных задач // Кибернетика. — 1986. — № 5. — С. 82–89.
16. Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К. Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1996. — **36**, № 1. — С. 66–72.
17. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. — 2002. — **51**, N 4. — P. 645–676.
18. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2004. — 572 с.
19. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

Поступила 29.10.2008