УДК 519.2

В.И. МАСОЛ, Л.А. РОМАШОВА

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СЛУЧАЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД ПОЛЕМ *GF*(3)

Ключевые слова: *нелинейная система, случайные коэффициенты, поле из трех элементов, единственность решения.*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим следующую систему уравнений над полем $GF(3)$:

$$\sum\nolimits_{3}{}_{1\le j_1<j_2\le n} a_{j_1 j_2}^{(\mu)} x_{j_1} x_{j_2} = b^{(\mu)}, \ \mu \in J, \tag{1}$$

где $J=\{1,2,\ldots,T\}$, $T\ge 1$, $\sum_3$ — символ суммирования в поле $GF(3)$, удолетворяющую условию (А).

Условие (А): 1) коэффициенты $a_{j_1 j_2}^{(\mu)}$, $1\le j_1<j_2\le n$, $\mu\in J$, — независимые случайные величины, принимающие значение a с вероятностью $P\{a_{j_1 j_2}^{(\mu)}=a\}=p_\mu$, $a\in GF(3)$, $a\ne 0$, и значение $\mathbf{0}\in GF(3)$ с вероятностью $P\{a_{j_1 j_2}^{(\mu)}=\mathbf{0}\}=1-2p_\mu$;

2) элементы $b^{(\mu)}$, $\mu\in J$, представляют собой результат подстановки в левую часть системы (1) фиксированного вектора $\bar{x}^{(0)}\in V_n$, $\bar{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$, имеющего $\rho_1(n)/\rho_2(n)/$ компонент, равных $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}\in GF(3)/\mathbf{2}$, $\mathbf{2}\in GF(3)/$, и $n-\rho_1(n)-\rho_2(n)$ компонент, равных $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}\in GF(3)$, где V_n — совокупность всех n-мерных векторов над полем $GF(3)$.

Для произвольного вектора $\bar{x}\in V_n$ обозначим $i(t_1,t_2)$ количество компонент, равных t_1, которым соответствуют компоненты вектора $\bar{x}^{(0)}$, равные t_2, где $t_1,t_2\in GF(3)$, $0\le i(t_1,t_2)\le n$. Пусть $M(\bar{x}^{(0)}, f(n))$ — совокупность всех векторов $\bar{x}\in V_n$, отличающихся от $\bar{x}^{(0)}$ и удолетворяющих условию

$$i(\mathbf{1},\mathbf{1})+i(\mathbf{2},\mathbf{2})\ge f(n), \tag{2}$$

где $f(n)$ — целое неотрицательное число.

Обозначим θ_n число решений системы (1), принадлежащих множеству $M(\bar{x}^{(0)}, f(n))$.

Вызывает интерес необходимые и достаточные условия, при которых вероятность события $\theta_n>0$ стремится к 0 при $n\to\infty$.

В [1] приведен один из возможных вариантов указанных условий для однородной нелинейной системы. Вопрос о распределении числа решений случайной линейной системы уравнений над полем $GF(3)$ рассматривался в работах [2–5].

Теорема. Пусть выполняются условия (А), (2) и

$$f(n)=o(\rho(n)), \ n\to\infty, \tag{3}$$

где $\rho(n)=\rho_1(n)+\rho_2(n)$;

$$p_\mu \ge \Delta, \ \mu\in T, \tag{4}$$

где $\Delta=\Delta(n)$ и при $n\to\infty$ $E_n\Delta\to\infty$, $E_n\to\infty$ так, что

$$\varliminf_{n\to\infty} (\min(\rho(n); n\Delta)-\sigma(\varepsilon)\sqrt{E_n}(\ln n)^{\frac{3}{2}}) > -\infty \tag{5}$$

для произвольного ε, где $\varepsilon=\mathrm{const}$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0<1$, $\sigma(u)\to 0$, $u\to 0$;

$$(n+A_n)(2\omega^{f(n)}-\ln 3)+\rho(n)\ln 2\to-\infty,\ n\to\infty, \tag{6}$$

где $\omega=\max(e^{-3\Delta}, 2^{-1})$, $A_n\to\infty$, $n\to\infty$.

Тогда условие

$$T=n+A_n \tag{7}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы вероятность события $\theta_n>0$ удолетворяла соотношению

$$P\{\theta_n>0\}=o(1),\ n\to\infty. \tag{8}$$

Замечание 1. Нетрудно проверить, что условие (6) следует из соотношения

$$f(n)\ge\frac{1{,}596}{\ln\omega^{-1}}. \tag{9}$$

Замечание 2. Если $E_n<n^{\frac{1}{Q_n}}$, где $Q_n\to\infty$, $n\to\infty$, и при этом выполняется $E_n\Delta\to\infty$, $n\to\infty$, то вместо условия (5) можно потребовать $\varliminf\limits_{n\to\infty}(\rho(n)-\sigma(\varepsilon)\sqrt{E_n}(\ln n)^{\frac{3}{2}})>-\infty.$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. Пусть ξ — случайная величина, допускающая представление $\xi=\xi_1+_3\ldots+_3\xi_k$, где $\xi_1,\ldots,\xi_k$ — независимые одинаково распределенные случайные величины; $P\{\xi_s=\mathbf{0}\}=1-2p^*$, $P\{\xi_s=a\}=p^*$, $a\in GF(3), a\ne 0$, $s=1,\ldots,k$, $1\le k<\infty$, $+_3$ — операция суммирования в поле $GF(3)$.

Тогда вероятности событий $\xi=\mathbf{0}$ и $\xi=a$ равны сооответсвенно

$$P\{\xi=\mathbf{0}\}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p^*)^k,$$

$$P\{\xi=a\}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p^*)^k,\ a\in GF(3),\ a\ne 0.$$

(Здесь и далее $0^0=1$.)

Доказательство леммы 1 можно получить как следствие примера 1, приведенного в [2, § 8.2].

Обозначим

$$i^*=i(\mathbf{1},\mathbf{0})+i(\mathbf{2},\mathbf{0}),\ j^*=i(\mathbf{0},\mathbf{1})+i(\mathbf{0},\mathbf{2}),$$

$$I_0=\{i(\mathbf{1},\mathbf{0}),i(\mathbf{2},\mathbf{0})\},\ I_1=\{i(\mathbf{0},\mathbf{1}),i(\mathbf{2},\mathbf{1})\},\ I_2=\{i(\mathbf{0},\mathbf{2}),i(\mathbf{1},\mathbf{2})\}. \tag{10}$$

Лемма 2. Если выполняется условие (A), то для математического ожидания $E\theta_n$ случайной величины θ_n справедливо

$$E\theta_n=3^{-T}S(n;Q), \tag{11}$$

$$S(n;Q)=\sum_{s_1=0}^{n-\rho(n)}\binom{n-\rho(n)}{s_1}\sum\frac{s_1!}{\prod\limits_{i\in I_0}i!}\sum_{s_2=0}^{\rho_1(n)}\binom{\rho_1(n)}{s_2}\sum{}'\frac{s_2!}{\prod\limits_{i\in I_1}i!}\times$$

$$\times\sum_{s_3=0}^{\rho_2(n)}\binom{\rho_2(n)}{s_3}\sum{}''\frac{s_3!}{\prod\limits_{i\in I_2}i!}Q, \tag{12}$$

$$Q=\prod_{\mu=1}^{T}(1+2(1-3p_\mu)^{\gamma_2}), \tag{13}$$

суммирование $\sum$, $\sum'$ и $\sum''$ осуществляется по всем $i \in I_0$, $i \in I_1$ и $i \in I_2$ таким, что $\sum_{i \in I_0} i = s_1$, $\sum_{i \in I_1} i = s_2$, $\sum_{i \in I_2} i = s_3$; в равенстве (12) числа s_1, s_2, s_3 удовлетворяют соотношениям

$$s_1 + s_2 + s_3 \geq 1, \tag{14}$$

$$\rho(n) - s_2 - s_3 \geq f(n); \tag{15}$$

$$\gamma_2 = \binom{i^* + \rho(n) - j^*}{2} + \binom{\rho(n)}{2} - 2\binom{\rho(n) - j^*}{2} + (i(\mathbf{2,2}) + i(\mathbf{1,1}))(i(\mathbf{1,2}) + i(\mathbf{2,1})). \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\xi(\bar{x})$ — индикатор события, заключающегося в том, что вектор $\bar{x}$, $\bar{x} \in V_n$, есть решение системы (1). С учетом условия (А) имеем

$$E\theta_n = \sum_{\bar{x}: \bar{x} \in M(\bar{x}^{(0)}, f(n))} E\xi(\bar{x}) = \sum_{\bar{x}: \bar{x} \in M(\bar{x}^{(0)}, f(n))} \prod_{\mu=1}^{T} P\{A^{(\mu)}(\bar{x}, \bar{x}^{(0)}) = 0\}, \tag{17}$$

где

$$A^{(\mu)}(\bar{x}, \bar{x}^{(0)}) = \sum\nolimits_3{}_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} a_{j_1 j_2}^{(\mu)} (x_{j_1} x_{j_2} +_3 2x_{j_1}^{(0)} x_{j_2}^{(0)}), \quad \mu \in J.$$

Обозначим γ_2 количество слагаемых в сумме $A^{(\mu)}(\bar{x}, \bar{x}^{(0)}), \mu \in J$, для которых выполняется соотношение $x_{j_1} x_{j_2} +_3 2x_{j_1}^{(0)} x_{j_2}^{(0)} \neq 0$. С помощью условия (А) и леммы 1 от (17) приходим к $E\theta_n = 3^{-T} \sum_{\bar{x}: \bar{x} \neq \bar{x}^{(0)}} \prod_{\mu=1}^{T} (1 + 2(1 - 3p_\mu)^{\gamma_2})$.

Для фиксированных векторов $\bar{x}$ и $\bar{x}^{(0)}$, используя определения параметров γ_2 и $i(t_1, t_2)$, убеждаемся в справедливости равенства (16). Наконец, суммирование по всем $\bar{x}$ таким, что $\bar{x} \in M(\bar{x}^{(0)}; f(n))$, эквивалентно суммированию по всем $i \in I_0$, $i \in I_1$ и $i \in I_2$, приведенного в правой части (12), причем неравенства (14) и (15) гарантируют принадлежность векторов $\bar{x}$ множеству $M(\bar{x}^{(0)}; f(n))$, поскольку из (14) следует $\bar{x}^{(0)} \neq \bar{x}$, а из соотношения (15) — иная запись условия (2).

Лемма 2 доказана.

Для произвольных векторов $\bar{x}^{(q)} \in V_n$, $\bar{x}^{(q)} = (x_1^{(q)}, \ldots, x_n^{(q)})$, $q = 1, 2$, обозначим $i_{c_1 c_2 c_3}$ количество компонент вектора $\bar{x}^{(1)}$, равных c_1, которым в векторе $\bar{x}^0$ /$\bar{x}^{(2)}$/ соответствуют компоненты, равные c_2 /c_3/, где $c_1, c_2, c_3 \in GF(3)$, $0 \leq i_{c_1 c_2 c_3} \leq n$. Обозначим J_0, J_1 и J_2 множества

$$J_0 = \{i_{\mathbf{001}}, i_{\mathbf{002}}, i_{\mathbf{100}}, i_{\mathbf{200}}, i_{\mathbf{101}}, i_{\mathbf{102}}, i_{\mathbf{201}}, i_{\mathbf{202}}\},$$

$$J_1 = \{i_{\mathbf{011}}, i_{\mathbf{012}}, i_{\mathbf{110}}, i_{\mathbf{210}}, i_{\mathbf{010}}, i_{\mathbf{112}}, i_{\mathbf{211}}, i_{\mathbf{212}}\},$$

$$J_2 = \{i_{\mathbf{021}}, i_{\mathbf{022}}, i_{\mathbf{120}}, i_{\mathbf{220}}, i_{\mathbf{020}}, i_{\mathbf{122}}, i_{\mathbf{221}}, i_{\mathbf{121}}\}.$$

Пусть также

$$i_1 = i_{\mathbf{100}} + i_{\mathbf{200}}, i_2 = i_{\mathbf{001}} + i_{\mathbf{002}}, k_{12} = i_{\mathbf{010}} + i_{\mathbf{020}}, i_{12} = i_{\mathbf{101}} + i_{\mathbf{102}} + i_{\mathbf{201}} + i_{\mathbf{202}}, \tag{18}$$

$$k_1 = i_{\mathbf{011}} + i_{\mathbf{012}} + i_{\mathbf{021}} + i_{\mathbf{022}}, k_2 = i_{\mathbf{110}} + i_{\mathbf{120}} + i_{\mathbf{210}} + i_{\mathbf{220}}, \tag{19}$$

$$i_{123} = i_{\mathbf{111}} + i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{122}} + i_{\mathbf{221}} + i_{\mathbf{212}} + i_{\mathbf{222}} + i_{\mathbf{211}}.$$

Положим, ν_n — число решений системы (1), принадлежащих множеству $M(\bar{x}^{(0)}, 0)$.

Обозначим $E\nu_n^{[2]}$ второй факториальный момент случайной величины ν_n.

Лемма 3. Если выполняется условие (A), то

$$E\nu_n^{[2]} = 9^{-T} S^*(n;Q^*), \tag{20}$$

где

$$S^*(n;Q^*) = \sum_{s_1=0}^{n-\rho(n)} \binom{n-\rho(n)}{s_1} \sum \frac{s_1!}{\prod_{j\in J_0} j!} \times$$
$$\times \sum_{s_2=0}^{\rho_1(n)} \binom{\rho_1(n)}{s_2} \sum{}' \frac{s_2!}{\prod_{j\in J_1} j!} \sum_{s_3=0}^{\rho_2(n)} \binom{\rho_2(n)}{s_3} \sum{}'' \frac{s_3!}{\prod_{j\in J_2} j!} Q^*, \tag{21}$$

$$Q^* = \prod_{\mu=1}^{T} \left(1 + 2\left(\sum_{r=1}^{4} (1-3p_\mu)^{\Gamma^{(r)}}\right)\right), \tag{22}$$

суммирование $\sum$, $\sum{}'$ и $\sum{}''$ осуществляется по всем $j \in J_0$, $j \in J_1$ и $j \in J_2$ таким, что $\sum_{j\in J_0} j = s_1$, $\sum_{j\in J_1} j = s_2$ и $\sum_{j\in J_2} j = s_3$; в равенстве (21) элементы множеств J_0, J_1 и J_2 удолетворяют соотношениям:

$$i_1 + i_{12} + k_1 + k_{12} + i_{\mathbf{120}} + i_{\mathbf{210}} + i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{122}} + i_{\mathbf{212}} + i_{\mathbf{211}} \ge 1, \tag{23}$$

$$i_2 + i_{12} + k_2 + k_{12} + i_{\mathbf{012}} + i_{\mathbf{021}} + i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{221}} + i_{\mathbf{212}} \ge 1, \tag{24}$$

$$i_1 + i_2 + k_1 + k_2 + i_{\mathbf{102}} + i_{\mathbf{201}} + i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{122}} + i_{\mathbf{221}} + i_{\mathbf{211}} \ge 1; \tag{25}$$

$$\Gamma^{(1)} = \binom{i_1}{2} + \binom{i_2}{2} + (i_{12} + i_{123})(i_1 + i_2) + i_1 k_2 + i_2 k_1 + i_{12}(k_1 + k_2) +$$
$$+ \binom{i_{\mathbf{011}} + i_{\mathbf{022}}}{2} + \binom{i_{\mathbf{012}} + i_{\mathbf{021}}}{2} + \binom{i_{\mathbf{110}} + i_{\mathbf{220}}}{2} + \binom{i_{\mathbf{210}} + i_{\mathbf{120}}}{2} +$$
$$+ (i_{\mathbf{011}} + i_{\mathbf{022}})(i_{\mathbf{111}} + i_{\mathbf{211}} + i_{\mathbf{122}} + i_{\mathbf{222}}) + (i_{\mathbf{110}} + i_{\mathbf{220}})(i_{\mathbf{111}} + i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{221}} + i_{\mathbf{222}}) +$$
$$+ (i_{\mathbf{012}} + i_{\mathbf{021}})(i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{221}} + i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{212}}) + (i_{\mathbf{210}} + i_{\mathbf{120}})(i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{122}} + i_{\mathbf{211}} + i_{\mathbf{212}}) +$$
$$+ (i_{\mathbf{211}} + i_{\mathbf{122}} + i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{221}})(i_{\mathbf{111}} + i_{\mathbf{222}} + i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{212}}), \tag{26}$$

$$\Gamma^{(2)} = \binom{i_2 + i_{12}}{2} + \binom{k_2 + k_{12}}{2} + (k_1 + i_{123})(i_2 + k_2 + k_{12} + i_{12}) +$$
$$+ (i_{\mathbf{011}} + i_{\mathbf{111}} + i_{\mathbf{211}} + i_{\mathbf{022}} + i_{\mathbf{122}} + i_{\mathbf{222}})(i_{\mathbf{021}} + i_{\mathbf{221}} + i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{012}} + i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{212}}), \tag{27}$$

$$\Gamma^{(3)} = \binom{i_1 + i_{12}}{2} + \binom{k_1 + k_{12}}{2} + (k_2 + i_{123})(i_1 + k_1 + k_{12} + i_{12}) +$$
$$+ (i_{\mathbf{110}} + i_{\mathbf{111}} + i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{220}} + i_{\mathbf{221}} + i_{\mathbf{222}})(i_{\mathbf{120}} + i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{122}} + i_{\mathbf{210}} + i_{\mathbf{211}} + i_{\mathbf{212}}), \tag{28}$$

$$\Gamma^{(4)} = \Gamma^{(1)} + \binom{k_{12}}{2} + \binom{i_{12}}{2} + k_{12}(k_1 + k_2 + i_{123}) + k_1 k_2 + i_{123} i_{12} +$$
$$+ (i_{\mathbf{120}} + i_{\mathbf{210}})(i_{\mathbf{110}} + i_{\mathbf{111}} + i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{220}} + i_{\mathbf{222}} + i_{\mathbf{221}}) +$$
$$+ (i_{\mathbf{110}} + i_{\mathbf{220}})(i_{\mathbf{210}} + i_{\mathbf{211}} + i_{\mathbf{212}} + i_{\mathbf{120}} + i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{122}}) +$$
$$+ (i_{\mathbf{021}} + i_{\mathbf{012}})(i_{\mathbf{011}} + i_{\mathbf{111}} + i_{\mathbf{211}} + i_{\mathbf{022}} + i_{\mathbf{222}} + i_{\mathbf{122}}) +$$
$$+ (i_{\mathbf{011}} + i_{\mathbf{022}})(i_{\mathbf{012}} + i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{212}} + i_{\mathbf{021}} + i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{221}}) +$$
$$+ (i_{\mathbf{212}} + i_{\mathbf{121}})(i_{\mathbf{111}} + i_{\mathbf{222}}) + (i_{\mathbf{122}} + i_{\mathbf{211}})(i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{221}}). \tag{29}$$

Доказательство. Используя условие (A) и соотношение $E\nu_n^{[2]} = \sum^* E\xi(\bar{x}^{(1)})\xi(\bar{x}^{(2)})$, где суммирование $\sum^*$ осуществляется по всем векторам $\bar{x}^{(1)}$ и $\bar{x}^{(2)}$, $\bar{x}^{(q)} \in V_n$, $q = 1,2$, таким, что $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$, $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(0)}$, $\bar{x}^{(2)} \neq \bar{x}^{(0)}$, имеем

$$E\nu_n^{[2]} = \sum^* \prod_{\mu=1}^{T} P\{\cup\{A_k^{(\mu)}(\bar{x}^{(k)}, \bar{x}^{(0)}) = y_k,\ A_{12}^{(\mu)}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(0)}) = y_{12},\ k = 1,2\}\} =$$

$$= \sum^* \prod_{\mu=1}^{T} \sum^{**} P\{A_{12}^{(\mu)}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(0)}) = y_{12}\} \prod_{k=1,2} P\{A_k^{(\mu)}(\bar{x}^{(k)}, \bar{x}^{(0)}) = y_k\}, \quad (30)$$

где символ $\cup\,/\sum^{**}$/ объединения /суммирования/ распространяется на все решения системы уравнений
$$\begin{cases} y_1 +_3 y_{12} = 0, \\ y_2 +_3 y_{12} = 0 \end{cases}$$
над полем $GF(3)$; для $\mu \in J$

$$A_{12}^{(\mu)}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(0)}) = \sum_{\omega \in E^{(12)}}{}_3\, a_\omega^{(\mu)},\ A_k^{(\mu)}(\bar{x}^{(k)}, \bar{x}^{(0)}) = \sum_{\omega \in E^{(k)}}{}_3\, a_\omega^{(\mu)}, \quad k = 1,2,$$

где
$$E^{(12)} = \{(j_1, j_2), 1 \le j_1 < j_2 \le n:\ x_{j_1}^{(k)} x_{j_2}^{(k)} +_3 2x_{j_1}^{(0)} x_{j_2}^{(0)} \neq 0, k = 1,2\},$$

$$E^{(k)} = \{(j_1, j_2), 1 \le j_1 < j_2 \le n:\ x_{j_1}^{(k)} x_{j_2}^{(k)} +_3 2x_{j_1}^{(0)} x_{j_2}^{(0)} \neq 0, x_{j_1}^{(k^*)} x_{j_2}^{(k^*)} +_3 2x_{j_1}^{(0)} x_{j_2}^{(0)} = 0\},$$

$$k \in \{1,2\},\ k^* \in \{1,2\},\ k^* \neq k.$$

Пусть $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ и $\gamma^{(3)}$ — количество элементов соответственно множеств $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ и $E^{(12)}$.

Положим
$$\Gamma^{(1)} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)},\ \Gamma^{(2)} = \gamma^{(2)} + \gamma^{(3)}, \quad (31)$$

$$\Gamma^{(3)} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} + \gamma^{(3)}. \quad (32)$$

С помощью условия (A) и леммы 1 соотношение (30) можно переписать в виде

$$E\nu_n^{[2]} = 9^{-T} \sum^* \prod_{\mu=1}^{T} \left(1 + 2\left(\sum_{k=1}^{4} (1 - 3p_\mu)^{\Gamma^{(k)}}\right)\right). \quad (33)$$

Суммирование $\sum^*$ в правой части (33) по всем векторам $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}$ таким, что $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(0)}$, $\bar{x}^{(2)} \neq \bar{x}^{(0)}$ и $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$, эквивалентно суммированию по всем параметрам $j \in J_0$, $j \in J_1$ и $j \in J_2$, приведенного в правой части (21). Неравенства (23)–(25) гарантируют выполнение соответственно соотношений $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(0)}$, $\bar{x}^{(2)} \neq \bar{x}^{(0)}$ и $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$. Наконец, используя определения величин $\gamma^{(k)}$, $k = 1,2,3,4$, и $i_{c_1c_2c_3}$, $c_1, c_2, c_3 \in GF(3)$, можно проверить соотношения (26)–(29). Покажем, например, справедливость равенства (28). В самом деле, исходя из (32), находим, что число $\Gamma^{(3)}$ представляет собой мощность множества всех пар (j_1, j_2), $1 \le j_1 < j_2 \le n$, таких, что $x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(1)} +_3 2x_{j_1}^{(0)} x_{j_2}^{(0)} \neq 0$. Указанное множество можно представить в виде объединения четырех непересекающихся множеств: M_1, M_2, M_3, M_4, где

$$M_1 = \{(j_1, j_2),\ 1 \le j_1 < j_2 \le n: x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(1)} \neq 0, x_{j_1}^{(0)} x_{j_2}^{(0)} = 0\},$$

$$M_2 = \{(j_1, j_2),\ 1 \le j_1 < j_2 \le n: x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(1)} = 0, x_{j_1}^{(0)} x_{j_2}^{(0)} \neq 0\},$$

$$M_3=\{(j_1,j_2),\ 1\le j_1<j_2\le n\colon x_{j_1}^{(1)}x_{j_2}^{(1)}=1, x_{j_1}^{(0)}x_{j_2}^{(0)}=2\},$$

$$M_4=\{(j_1,j_2),\ 1\le j_1<j_2\le n\colon x_{j_1}^{(1)}x_{j_2}^{(1)}=2, x_{j_1}^{(0)}x_{j_2}^{(0)}=1\}.$$

Нетрудно проверить, что мощности $|M_t|$ множеств M_t, $t=1,2,3,4$, удолетворяют соотношениям

$$|M_1|=\binom{i_1+i_{12}}{2}+(k_2+i_{123})(i_1+i_{12}),\quad |M_2|=\binom{k_1+k_{12}}{2}+(k_1+k_{12})(k_2+i_{123}),$$

$$|M_3|=(i_{\mathbf{110}}+i_{\mathbf{112}}+i_{\mathbf{111}})(i_{\mathbf{120}}+i_{\mathbf{121}}+i_{\mathbf{122}})+$$
$$+(i_{\mathbf{220}}+i_{\mathbf{221}}+i_{\mathbf{222}})(i_{\mathbf{210}}+i_{\mathbf{211}}+i_{\mathbf{212}}), \tag{34}$$

$$|M_4|=(i_{\mathbf{110}}+i_{\mathbf{112}}+i_{\mathbf{111}})(i_{\mathbf{210}}+i_{\mathbf{211}}+i_{\mathbf{212}})+$$
$$+(i_{\mathbf{120}}+i_{\mathbf{121}}+i_{\mathbf{122}})(i_{\mathbf{220}}+i_{\mathbf{221}}+i_{\mathbf{222}}). \tag{35}$$

Отсюда с учетом равенства $\Gamma^{(3)}=\sum_{t=1}^{4}|M_t|$ получаем (28).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть выполняется

$$i^*+j^*\ge 1. \tag{36}$$

Тогда

$$\gamma_2\ge\rho(n)-1. \tag{37}$$

Доказательство. В силу (16) находим $\gamma_2\ge\binom{i^*+\rho(n)-j^*}{2}+\binom{(n)}{2}-$ $-2\binom{\rho(n)-j^*}{2}$, откуда с учетом условия (36) получаем (37).

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Если выполняются условия (A), (3), (5) и

$$T\le n+m_0, \tag{38}$$

где $m_0=\text{const}$, то при $n\to\infty$

$$E\theta_n\ge a_1. \tag{39}$$

Здесь и далее a_t — фиксированное положительное число, $a_t<\infty$, $t\ge 1$.

Доказательство. Действительно, используя (11) и (12), математическое ожидание $E\theta_n$ представим в виде

$$E\theta_n=\sum\nolimits_1(Q)+\sum\nolimits_2(Q), \tag{40}$$

где $\sum_1(Q)$ /$\sum_2(Q)$/ обозначает сумму из правой части (12) при дополнительном условии на определенные равенством (10) параметры i^* и j^*: $i^*+j^*\ge 1$ /$i^*+j^*=0$/. Так как $\sum_2(Q)\ge 0$, то для доказательства (39) достаточно убедиться, что при $n\to\infty$

$$\sum\nolimits_1(Q)\ge a_2 \tag{41}$$

для некоторого a_2.

С этой целью проверим, что при $n\to\infty$

$$Q\ge a_3. \tag{42}$$

Действительно, с учетом условия (A) представим Q в виде

$$Q=Q_1Q_2, \tag{43}$$

$$Q_1=\prod_{\mu\in J,\, p_\mu\le\frac{1}{3}}(1+2(1-3p_\mu)^{\gamma_2}),\qquad Q_2=\prod_{\mu\in J,\, \frac{1}{3}<p_\mu\le\frac{1}{2}}(1+2(1-3p_\mu)^{\gamma_2}).$$

Для параметра $\mu \in J$ такого, что $p_\mu \le \frac{1}{3}$, имеем

$$Q_1 \ge 1. \tag{44}$$

Используя (36) и (38), находим

$$Q_2 \ge 1 - 2^{-\rho(n)+2}(n + m_0). \tag{45}$$

Из (5) следует, что $\rho(n) > (\ln n)^{\frac{3}{2}}$. Отсюда получаем, что правая часть (45) стремится к 1 при $n \to \infty$ и

$$Q_2 > 0 \tag{46}$$

при $n \to \infty$.

Соотношения (43), (44) и (46) доказывают (42).

Используя (42), получаем неравенство $\sum_1 (Q) \ge a_3 \sum_1 (1)$, где $\sum_1 (1)$ обозначает сумму из правой части (12) при дополнительных условиях: $i^* + j^* \ge 1$, $Q \equiv 1$. Отсюда с помощью (3) и (5) находим

$$\sum_1 (Q) \ge a_4 3^{-m_0}(1 + o(1)),\ n \to \infty. \tag{47}$$

Из (47) следует неравенство (41), которое с учетом (40) дает (39).

Лемма 5 доказана.

Обозначим X множество $X = \{i_{\mathbf{121}}, i_{\mathbf{122}}, i_{\mathbf{212}}, i_{\mathbf{211}}, i_{\mathbf{221}}, i_{\mathbf{112}}\}$.

Лемма 6. Пусть выполняются соотношения (23)–(25) и

$$i_1 = i_2 = i_{12} = k_1 = k_2 = k_{12} = 0. \tag{48}$$

1. Если имеет место хотя бы одно из четырех условий:
1) $i_{\mathbf{211}} \ge 1$, $i_{\mathbf{221}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{211}}, i_{\mathbf{221}}\}$,
2) $i_{\mathbf{211}} \ge 1$, $i_{\mathbf{112}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{211}}, i_{\mathbf{112}}\}$,
3) $i_{\mathbf{122}} \ge 1$, $i_{\mathbf{112}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{122}}, i_{\mathbf{112}}\}$,
4) $i_{\mathbf{122}} \ge 1$, $i_{\mathbf{221}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{112}}, i_{\mathbf{221}}\}$,

то

$$\Gamma^{(k)} \ge 1, \quad k \in \{2, 3, 4\}; \tag{49}$$

2. Если имеет место хотя бы одно из четырех условий:
$i_{\mathbf{121}} \ge 1$, $i_{\mathbf{112}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{121}}, i_{\mathbf{112}}\}$,
$i_{\mathbf{121}} \ge 1$, $i_{\mathbf{221}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{121}}, i_{\mathbf{221}}\}$,
$i_{\mathbf{212}} \ge 1$, $i_{\mathbf{112}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{212}}, i_{\mathbf{112}}\}$,
$i_{\mathbf{212}} \ge 1$, $i_{\mathbf{221}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{212}}, i_{\mathbf{221}}\}$,

то

$$\Gamma^{(k)} \ge 1, \quad k \in \{1, 3, 4\}; \tag{50}$$

3. Если имеет место хотя бы одно из четырех условий:
$i_{\mathbf{121}} \ge 1$, $i_{\mathbf{122}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{121}}, i_{\mathbf{122}}\}$,
$i_{\mathbf{121}} \ge 1$, $i_{\mathbf{211}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{121}}, i_{\mathbf{211}}\}$,
$i_{\mathbf{122}} \ge 1$, $i_{\mathbf{212}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{122}}, i_{\mathbf{212}}\}$,
$i_{\mathbf{212}} \ge 1$, $i_{\mathbf{211}} \ge 1$ и $i = 0$, где $i \in X \setminus \{i_{\mathbf{212}}, i_{\mathbf{211}}\}$,

то

$$\Gamma^{(k)} \ge 1, \quad k \in \{1, 2, 4\}. \tag{51}$$

Доказательство. Действительно, в силу (23)–(25) с помощью (48) получаем

$$i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{122}} + i_{\mathbf{212}} + i_{\mathbf{211}} \ge 1, \tag{52}$$

$$i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{121}} + i_{\mathbf{221}} + i_{\mathbf{212}} \ge 1, \tag{53}$$

$$i_{\mathbf{112}} + i_{\mathbf{122}} + i_{\mathbf{221}} + i_{\mathbf{211}} \ge 1. \tag{54}$$

Используя (26)–(29) и (48), приходим к соотношениям:

$$\Gamma^{(1)} = (i_{211} + i_{122} + i_{112} + i_{221})(i_{111} + i_{222} + i_{121} + i_{212}); \quad (55)$$

$$\Gamma^{(2)} = (i_{111} + i_{211} + i_{122} + i_{222})(i_{221} + i_{121} + i_{112} + i_{212}); \quad (56)$$

$$\Gamma^{(3)} = (i_{111} + i_{112} + i_{221} + i_{222})(i_{121} + i_{122} + i_{211} + i_{212}); \quad (57)$$

$$\Gamma^{(4)} = (i_{211} + i_{122} + i_{112} + i_{221})(i_{111} + i_{222} + i_{121} + i_{212}) +$$

$$+ (i_{212} + i_{121})(i_{111} + i_{222}) + (i_{122} + i_{211})(i_{112} + i_{221}). \quad (58)$$

Пусть

$$i_{211} \geq 1, i_{221} \geq 1 \text{ и } i = 0, \text{ где } i \in X \setminus \{i_{211}, i_{221}\}. \quad (59)$$

Тогда выполняются неравенства (52)–(54) и на основании (55) заключаем $\Gamma^{(1)} \geq 0$. Для остальных $\Gamma^{(k)}$, $k \in \{2,3,4\}$, с учетом (56)–(59) находим $\Gamma^{(k)} \geq i_{211} i_{221} \geq 1$. Соотношение (49) установлено. Аналогично убеждаемся в справедливости (49) в условиях 2)–4). Так же, как (49), проверяются неравенства (50) и (51).

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Если выполняется соотношение

$$i_1 + i_{12} + k_1 + k_{12} \geq 1, \quad (60)$$

то

$$\Gamma^{(3)} \geq \rho(n) - 1; \quad (61)$$

если выполняется соотношение

$$i_2 + i_{12} + k_2 + k_{12} \geq 1, \quad (62)$$

то

$$\Gamma^{(2)} \geq \rho(n) - 1. \quad (63)$$

Доказательство. Используя определения чисел $\gamma^{(k)}$, $k = 1,2,3$, и $i_{c_1 c_2 c_3}$, где $c_1, c_2, c_3 \in GF(3)$, можно получить представления для сумм $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(3)}$, отличающиеся от (27) и (28) соответственно, а именно:

$$\Gamma^{(2)} = \binom{i_2 + i_{12} + \rho(n) - k_2 - k_{12}}{2} + \binom{\rho(n)}{2} - 2\binom{\rho(n) - k_2 - k_{12}}{2} +$$

$$+ (i_{011} + i_{111} + i_{211} + i_{022} + i_{122} + i_{222})(i_{021} + i_{221} + i_{121} + i_{012} + i_{112} + i_{212}), \quad (64)$$

$$\Gamma^{(3)} = \binom{i_1 + i_{12} + \rho(n) - k_1 - k_{12}}{2} + \binom{\rho(n)}{2} - 2\binom{\rho(n) - k_1 - k_{12}}{2} +$$

$$+ (i_{110} + i_{111} + i_{112} + i_{220} + i_{221} + i_{222})(i_{120} + i_{121} + i_{122} + i_{210} + i_{211} + i_{212}). \quad (65)$$

Проверим, например, равенство (65). Используя введенные ранее обозначения M_t, $t = 1, 2, 3, 4$, находим, что мощность множества M_1 (M_2) удовлетворяет соотношению

$$|M_1| = \binom{i_1 + i_{12} + \rho(n) - k_1 - k_{12}}{2} - \binom{\rho(n) - k_1 - k_{12}}{2}$$

$$\left(|M_2| = \binom{\rho(n)}{2} - \binom{\rho(n) - k_1 - k_{12}}{2} \right).$$

Отсюда с учетом (34) и (35) получаем (65).

На основании (64) /(65)/ для $\Gamma^{(2)}$ /$\Gamma^{(3)}$ / имеем, очевидно, оценку

$$\Gamma^{(2)} \geq \binom{i_1 + i_{12} + \rho(n) - k_1 - k_{12}}{2} + \binom{\rho(n)}{2} - 2\binom{\rho(n) - k_1 - k_{12}}{2}$$

$$/\Gamma^{(3)} \geq \binom{i_2 + i_{12} + \rho(n) - k_2 - k_{12}}{2} + \binom{\rho(n)}{2} - 2\binom{\rho(n) - k_2 - k_{12}}{2}/,$$

откуда с помощью (62)/(60)/ приходим к (63) /(61)/.

Лемма 7 доказана.

Пусть

$$\Psi_1 = \left\{\mu\colon 1 \leq \mu \leq n + m_0 : \Delta \leq p_\mu \leq \frac{1}{3}\right\}, \quad \Psi_2 = \left\{\mu\colon 1 \leq \mu \leq n + m_0 : \frac{1}{3} < p_\mu \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Обозначим α и β мощности соответственно множеств Ψ_1 и Ψ_2. Тогда при условии $\Delta \leq p_\mu \leq \frac{1}{2}$ для $1 \leq \mu \leq n + m_0$ имеем

$$\alpha + \beta = n + m_0. \tag{66}$$

Положим $J^* = J_0 \cup J_1 \cup J_2 \cup \{i_{\mathbf{000}}\} \cup \{i_{\mathbf{111}}\} \cup \{i_{\mathbf{222}}\}$.

Лемма 8. Пусть выполняются условия (А), (4), (38) и

$$\Gamma^{(k)} < \binom{\varepsilon\sqrt{E_n}\ln n}{2}, \tag{67}$$

где $\Gamma^{(k)}$, $k = 1,2,3,4$, удовлетворяют соотношениям (26)–(29), $\varepsilon = \text{const}$, $0 < \varepsilon < 1$, $E_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Тогда

$$S^*_{2;4}(n; Q^*) \leq a_5 e^{\sigma_1(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}\left(7^n \exp\left\{\frac{2}{7} n\omega^{\rho(n)-1}\right\} + 3^{n+\alpha} 2^\beta \exp\{-2\Delta\alpha\}\right), \tag{68}$$

где $S^*_{2;4}(n; Q^*)$ отличается от $S^*(n; Q^*)$ тем, что суммирование $\sum$, $\sum'$ и $\sum''$ в правой части (21) распространяется на все параметры $j \in \Psi_3$:

$$\Psi_3 = \{j, j \in J^* : \Gamma^{(k)} < \binom{\varepsilon\sqrt{E_n}\ln n}{2},\ k = 1,2,3,4,\ \varepsilon = \text{const},\ 0 < \varepsilon < 1\},$$

$\sigma_r(\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ для $r \geq 1$.

Доказательство. Сумму $S^*_{2;4}(n; Q^*)$ разобьем на конечное число слагаемых:

$$S^*_{2;4}(n; Q^*) = \sum_{t=1}^{3} S^*_{2;4;t}(n; Q^*). \tag{69}$$

Здесь $S^*_{2;4;1}(n; Q^*)$ /$S^*_{2;4;2}(n; Q^*)$/ и $S^*_{2;4;3}(n; Q^*)$ отличаются от $S^*_{2;4}(n; Q^*)$ дополнительным условием $i_1 + i_{12} + k_1 + k_{12} \geq 1$ /$i_1 + i_{12} + k_1 + k_{12} = 0, i_2 + k_2 \geq 1$/ и $i_1 + i_{12} + k_1 + k_{12} = 0, i_2 + k_2 = 0$ соответственно.

На основании леммы 7 и соотношений (22), (38) и (67) заключаем

$$S^*_{2;4;t}(n; Q^*) \leq S^*_{2;4;t}(n;1) Q^*_t, \tag{70}$$

где $Q^*_t = a_6 7^n \exp\left\{\frac{2}{7} n\omega^{\rho(n)-1}\right\}$, $t = 1,2$; здесь и далее запись $S^*_{2;r;t}(n;1)$ обозначает сумму $S^*_{2;r;t}(n; Q^*)$ для $Q^* \equiv 1$, $r \geq 1$, $t \geq 1$.

Убедимся, что для $t = 1, 2$

$$\max_{t \in \{1,2\}} S^*_{2;4;t}(n;1) \leq e^{\sigma_2(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}. \tag{71}$$

Действительно, из оценки $\Gamma^{(k)} < \left(\frac{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}\right)$, $k = 1,2,3,4$, вытекает, что все параметры j, $j \in \Psi_3$, участвующие в записи $\Gamma^{(k)}$, $k = 1,2,3,4$, согласно (26)–(29), не превышают $\sqrt{E_n \ln n}$. Отсюда с помощью полиномиальной формулы получаем (71).

Из (70) и (71) для $t = 1,2$ находим

$$S^*_{2;4;t}(n; Q^*) \le a_6 7^n \exp\left\{\sigma_2(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n + \frac{2}{7} n\,\omega^{\rho(n)-1}\right\}. \tag{72}$$

Покажем, что

$$S^*_{2;4;3}(n; Q^*) \le a_7 3^{n+\alpha} 2^{\beta} \exp\left\{\sigma_3(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n - 2\Delta\alpha\right\}. \tag{73}$$

Используя (22), получаем

$$Q^* \le \prod_{\mu=1}^{T}\left(1 + 2\left(\sum_{k=1}^{4} |1 - 3p_\mu|^{\frac{\Gamma^{(k)}}{2}}\right)\right). \tag{74}$$

С учетом неравенств(38), (74) и леммы 6, условие (48) которой выполнено согласно определению суммы $S^*_{2;4;3}(n; Q^*)$, приходим к оценке

$$Q^* \le \prod_{\mu=1}^{n+m_0}(3 + 6|1 - 3p_\mu|). \tag{75}$$

Правую часть (75) представим в виде

$$\prod_{\mu=1}^{n+m_0}(3 + 6|1 - 3p_\mu|) = Q_1^* Q_2^*, \tag{76}$$

где Q_1^* /Q_2^* / отличается от Q^* тем, что $\mu \in \Psi_1$ /$\mu \in \Psi_2$ /. При выполнении условия (4) можно установить

$$Q_1^* \le a_8 9^{\alpha} \exp\{-2\alpha\Delta\}. \tag{77}$$

Далее, для $\mu \in \Psi_2$

$$Q_2^* \le a_9 6^{\beta}. \tag{78}$$

На основании (75)–(78) с учетом (66) получаем $Q^* \le a_{10} 3^{n+\alpha} 2^{\beta} \exp\{-2\Delta\alpha\}$. Отсюда можно заключить, что

$$S^*_{2;4;3}(n; Q^*) \le a_{11} 3^{n+\alpha} 2^{\beta} S^*_{2;4;3}(n;1)\exp\{-2\Delta\alpha\}, \tag{79}$$

где для $S^*_{2;4;3}(n;1)$ аналогично (71) имеем $S^*_{2;4;3}(n;1) \le e^{\sigma_4(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}$. Используя (79), приходим к оценке (73). Соотношения (69), (72) и (73) доказывают (68).
Лемма 8 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Достаточность. Убедимся, что при выполнении условия (7) имеет место соотношение

$$E\theta_n = o(1), \quad n \to \infty. \tag{80}$$

Для обоснования (80) достаточно показать, что при $n \to \infty$

$$\sum\nolimits_1 (Q) = o(1), \tag{81}$$

$$\sum\nolimits_2 (Q) = o(1), \tag{82}$$

где суммы $\sum_1 (Q)$ и $\sum_2 (Q)$ определены в (40). В силу (13) имеем оценку

$Q \le (1+2\omega^{\gamma_2})^T$. Отсюда с учетом (37) получаем

$$Q \le \exp\{2T\omega^{\rho(n)-1}\}. \tag{83}$$

Используя (83) и полиномиальную формулу, находим

$$\sum\nolimits_1 (Q) \le \exp\{2T\omega^{\rho(n)-1} - (T-n)\ln 3\}. \tag{84}$$

При выполнении условия (5) с учетом предположения (7) от (84) приходим к (81).

Проверим (82). Действительно, из равенства $i^* + j^* = 0$ следует $i(\mathbf{1,0}) = i(\mathbf{2,0}) = i(\mathbf{0,1}) = i(\mathbf{0,2}) = 0$, откуда с учетом (14) имеем $i(\mathbf{1,2}) + i(\mathbf{2,1}) \ge 1$. С помощью (16) нетрудно получить

$$\gamma_2 \ge f(n) \tag{85}$$

при условии (2).

Неравенство (85) позволяет установить оценку $Q \le \exp\{2T\omega^{f(n)}\}$. Далее, принимая во внимание (7), предположение $i^* + j^* = 0$ и полиномиальную формулу, имеем

$$\sum\nolimits_2 (Q) \le \frac{2^{\rho(n)}}{3^{n+A_n}} \exp\{2(n+A_n)\omega^{f(n)}\}. \tag{86}$$

Используя условие (6), от (86) приходим к (82). Из (40), (81) и (82) следует (80). Соотношение (80) и неравенство Чебышева дают $P\{\theta_n > 0\} = o(1)$ при $n \to \infty$.

Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть при $n \to \infty$ система (1) имеет с вероятностью единица единственное решение $\bar{x}^{(0)}$, т.е. $P\{\theta_n > 0\} \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что тогда выполняется (7).

Допустим, что равенство (7) не выполняется. Тогда имеет место соотношение (38), используя которое убедимся в справедливости того, что

$$P\{\theta_n > 0\} > 0, \ \ n \to \infty, \tag{87}$$

т.е. с положительной вероятностью существует, по крайней мере, одно решение, принадлежащее множеству $M(\bar{x}^{(0)}, f(n))$. С этой целью проверим следующие неравенства:

$$(E\theta_n)^{-1} \le a_{12}, \ \ n \to \infty, \tag{88}$$

$$E\theta_n^{[2]} (E\theta_n)^{-2} \le a_{13}, \ \ n \to \infty. \tag{89}$$

С помощью леммы 5 получаем (88).

Далее, принимая во внимание (11) и (42), находим

$$(3^{T-n} E\theta_n)^{-1} \le \left(\frac{S(n;1)}{3^n}) \right)^{-1} a_3^{-1} \le a_{14}, n \to \infty. \tag{90}$$

Соотношение (90) позволяет заключить, что для доказательства (89) достаточно убедиться, что

$$9^{T-n} E\theta_n^{[2]} \le a_{15}, \ \ n \to \infty. \tag{91}$$

Из определения случайных величин θ_n и ν_n следует

$$E\theta_n^{[2]} \le E\nu_n^{[2]} \tag{92}$$

для $n \ge 1$. Таким образом, для обоснования (91) достаточно проверить соотношение

$$9^{T-n} E\nu_n^{[2]} \le a_{16}. \tag{93}$$

Для этой цели сумму $S^*(n;Q^*)$ (см. равенства (20)–(22)) представим в виде

$$S^*(n;Q^*) = S_1^*(n;Q^*) + S_2^*(n;Q^*), \tag{94}$$

где $S_1^*(n;Q^*)$ отличается от $S^*(n;Q^*)$ тем, что суммирование в правой части выражения (21) распространяется на все i, $i \in J^*$, такие, что

$$\Gamma^{(k)} \ge \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2} \tag{95}$$

для $k = 1,2,3,4$, где $\varepsilon = \text{const}$, $0 < \varepsilon < 1$; $S_2^*(n;Q^*)$ — сумма, дополняющая $S_1^*(n;Q^*)$ до $S^*(n;Q^*)$.

С помощью (4), (22) и (95) находим

$$S_1^*(n;Q^*) \le S_1^*(n;1) Q_1^*, \tag{96}$$

где $Q_1^* = \exp\left\{8T\omega^{\binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}}\right\}$. Неравенства (38), (96) и $S_1^*(n;1) \le 9^n$ позволяют заключить, что

$$S_1^*(n;Q^*) \le a_{17} 9^n. \tag{97}$$

Сумму $S_2^*(n;Q^*)$ представим в виде

$$S_2^*(n;Q^*) = \sum_{r=1}^{4} S_{2;r}^*(n;Q^*), \tag{98}$$

где $S_{2;r}^*(n;Q^*)$ отличается от $S_2^*(n;Q^*)$ тем, что все i, $i \in J^*$, участвующие в записи $S_2^*(n;Q^*)$, согласно (21) принимают лишь такие значения, что существует набор $\{l_1, \ldots, l_r\} \subseteq \{1, \ldots, 4\}$, для которого $\Gamma^{(l_h)} < \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}$, $\Gamma^{(k)} \ge \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}$, где $k \in \{1, \ldots, 4\} \setminus \{l_1, \ldots, l_r\}$, $h = 1, \ldots, r$, $r = 1, \ldots, 4$. Далее, сумму $S_{2;r}^*(n;Q^*)$ для $r = 1,2,3$ запишем следующим образом:

$$S_{2;r}^*(n;Q^*) = \sum_{1 \le t_1 < \ldots < t_r \le 4} S_{2;r;t_1,\ldots,t_r}^*(n;Q^*), \tag{99}$$

где $S_{2;\,r;t_1,\ldots,t_r}^*(n;Q^*)$ обозначает сумму всех слагаемых, принадлежащих $S_{2;\,r}^*(n;Q^*)$ и для которых $\Gamma^{(t_l)} < \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}$, $l = 1,2,\ldots,r$, $\Gamma^{(t')} \ge \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}$, $t' \in \{1, \ldots, 4\} \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$.

Покажем, что при $r = 1$

$$S_{2;r}^*(n;Q^*) = a_{18} 3^n \exp\{2n\omega^{\binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}} + \sigma_5(\varepsilon)\sqrt{E_n} \ln^{\frac{3}{2}} n\}(2^{\rho(n)} + 3^{n-\rho(n)}). \tag{100}$$

Действительно, с помощью (4), (22), (38)и (99) для $r = 1$ имеем

$$S_{2;r}^*(n;Q^*) \le Q_{2;r}^* \sum_{t=1}^{4} S_{2;r;t}^*(n;1), \tag{101}$$

где $Q_{2;r}^* = a_{19} 3^n \exp\left\{2n\omega^{\binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}}\right\}$.

Найдем оценку для каждого слагаемого $S_{2;r;t}^*$, $t = 1,2,3,4$, из правой части (101).

Из неравенства $\Gamma^{(1)} < \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}$ и соотношения (26) следует, что все параметры $j, j \in J^* \setminus \{i_{\mathbf{010}}, i_{\mathbf{020}}, i_{\mathbf{000}}\}$, участвующие в записи $S^*(n; Q^*)$, согласно (21) не превышают $\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}$, откуда, используя полиномиальную формулу, имеем

$$S^*_{2;1;1}(n;1) \le 2^{\rho(n)} e^{\sigma_6(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}. \qquad (102)$$

На основании (29) аналогично (102) устанавливаем

$$S^*_{2;1;4}(n;1) \le 2^{\rho(n)} e^{\sigma_7(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}. \qquad (103)$$

Для того чтобы убедиться в справедливости оценки

$$S^*_{2;1;2}(n;1) \le 3^{n-\rho(n)} e^{\sigma_8(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}, \qquad (104)$$

достаточно заметить, что согласно неравенству $\Gamma^{(2)} < \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}$ все параметры $j, j \in J^* \setminus \{i_{\mathbf{100}}, i_{\mathbf{200}}, i_{\mathbf{000}}\}$ из правой части (21) не превышают $\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}$.

Аналогично (104) в силу (28) имеем

$$S^*_{2;1;3}(n;1) \le 3^{n-\rho(n)} e^{\sigma_9\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}. \qquad (105)$$

С помощью (101)–(105) получаем

$$S^*_{2;1}(n;1) \le a_{19} e^{\sigma_{10}(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n} (2^{\rho(n)} + 3^{n-\rho(n)}). \qquad (106)$$

Соотношения (101) и (106) доказывают (100).

Покажем, что для $r = 2$ имеет место оценка

$$S^*_{2;r}(n; Q^*) \le a_{20}\, 5^n \exp\Big\{\frac{4}{5} n \omega^{\binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}} + \sigma_{11}(\varepsilon)\sqrt{E_n} \ln^{\frac{3}{2}} n\Big\}. \qquad (107)$$

Действительно, на основании (4), (22), (38) и (99) для $r = 2$ заключаем, что

$$S^*_{2;r}(n; Q^*) \le Q^*_{2;r} \sum_{1 \le t_1 < t_2 \le 4} S^*_{2;r;t_1,t_2}(n;1), \qquad (108)$$

где $Q_{2;r} = a_{21}\, 5^n \exp\Big\{\frac{4}{5} n \omega^{\binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}}\Big\}$.

С помощью неравенств $\Gamma^{(t_1)} < \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}$, $\Gamma^{(t_2)} < \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}$, $1 \le t_1 < t_2 \le 4$, и соотношений (26)–(29) устанавливаем, что все параметры $j \in J^* \setminus \{i_{\mathbf{000}}\}$ из правой части (21) не превышают $\sqrt{E_n \ln n}$. Это позволяет записать следующую оценку:

$$\max_{1 \le t_1 < t_2 \le 4} S_{2;2;t_1,t_2}(n;1) \le e^{\sigma_{12}(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}. \qquad (109)$$

Принимая во внимание (108) и (109), приходим к неравенству для $r = 2$:

$$S^*_{2;r}(n;1) \le a_{22} e^{\sigma_{13}(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}. \qquad (110)$$

Из (108) и (110) следует (107).

Убедимся, что при $r=3$

$$S^{*}_{2;r}(n;Q^{*}) \le a_{23}\, 7^{n} \exp\left\{\frac{2}{7} n\omega^{\binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}} + \sigma_{14}(\varepsilon)\sqrt{E_n} \ln^{\frac{3}{2}} n\right\}. \tag{111}$$

На основании (4), (22), (38) и (99) для $r=3$ заключаем

$$S^{*}_{2;r}(n;Q^{*}) \le Q_{2;r} \sum_{1\le t_1<t_2<t_3\le 4} S^{*}_{2;r;t_1,t_2,t_3}(n;1), \tag{112}$$

где $Q^{*}_{2;r} = a_{24}\, 7^{n} \exp\left\{\frac{2}{7} n\omega^{\binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}}\right\}$.

Покажем, что

$$\max_{1\le t_1<t_2<t_3\le 4} S^{*}_{2;3;t_1,t_2,t_3}(n;1) \le e^{\sigma_{15}(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}. \tag{113}$$

Действительно, неравенства $\Gamma^{(t_1)} < \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}$, $\Gamma^{(t_2)} < \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}$, $\Gamma^{(t_3)} < \binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}$, $1 \le t_1 < t_2 < t_3 \le 4$, соотношения (26)–(29) и полиномиальная формула позволяют аналогично (109) получить (113).

Принимая во внимание (112) и (113), приходим к оценке для $r=3$:

$$S^{*}_{2;r}(n;1) \le a_{24} e^{\sigma_{16}(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}. \tag{114}$$

Соотношения (112) и (114) доказывают (111).

Для $S^{*}_{2}(n;Q^{*})$ с учетом (98), (100), (107), (111) и леммы 8 устанавливаем

$$S^{*}_{2}(n;Q^{*}) \le a_{25}\, 3^{2n-\rho(n)} \exp\left\{2n\omega^{\binom{\varepsilon\sqrt{E_n \ln n}}{2}} + \sigma_{17}(\varepsilon)\sqrt{E_n} \ln^{\frac{3}{2}} n\right\}(1+o(1)) +$$
$$+\; a_{26} e^{\sigma_{18}(\varepsilon)\sqrt{E_n}\ln^{\frac{3}{2}} n}\, 3^{n+\alpha}\, 2^{\beta} \exp\{-2\Delta\alpha\}. \tag{115}$$

С помощью (20), (94), (97) и (115) находим (93). Соотношения (90)–(93) доказывают (89).

Таким образом, из того, что выполняется (38), получили неравенства (88) и (89), которые совместно с оценкой

$$P\{\theta_n > 0\} \ge (2(E\theta_n)^{-1} + E\theta_n^{[2]}(E\theta_n)^{-2})^{-1} \tag{116}$$

позволяют сделать вывод, что имеет место (87), а это, в свою очередь, противоречит тому, что с вероятностью 1 существует единственное решение $\bar{x}^{(0)}$ системы (1) при $n \to \infty$. (Неравенство (116) для случайной величины, принимающей целые неотрицательные значения, приведено в [6].)

Необходимость условия (7) установлена.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Масол В.И., Ромашова Л.А. Некоторые свойства систем нелинейных случайных уравнений над полем GF(3) / Обозрение прикл. и промышл. математики. — 2008. — **15**, № 3. — С. 563–564.
2. Коваленко И.Н., Левитская А.А., Савчук М.Н. Избранные задачи вероятностной комбинаторики. — Киев: Наук. думка, 1986. — 223 с.
3. Михайлов В.Г. О числе решений случайной системы линейных однородных уравнений, не содержащих определенной комбинации знаков // Обозрение прикл. и промышл. математики. — 2007. — **14**, № 2. — С. 249–250.
4. Kolchin V.F. Systems of random linear equations with small number of non-zero coefficients in finite fields // Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. — 1997. — P. 295–304.
5. Cooper C. On the distribution of rank of a random matrix over a finite field // Random Structures and Algorithms. — 2001. — P. 1–18.
6. Ширяев А.Н. Задачи по теории вероятностей: Уч. пособие. — М.: МЦНМО, 2006. — 416 с.

Поступила 12.03.2009